Bewegungsvorgänge mit mehrfach durchlaufenen Bahnkurven

Von

Hans Robert Müller, Berlin — Braunschweig

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 20. März 1963)

Vollführt ein starres ebenes System $\mathbf{E}$ auf ebener Unterlage $\mathbf{E}'$ einen zwangläufigen Bewegungsvorgang $\mathbf{B} = \mathbf{E}/\mathbf{E}'$, so beschreiben die einzelnen Punkte von $\mathbf{E}$ Bahnkurven in der Ebene $\mathbf{E}'$, die sich im allgemeinen stets voneinander unterscheiden. Wir fragen nun nach solchen Bewegungsvorgängen, bei denen jede Bahnkurve in der Rastebene $\mathbf{E}'$ nicht nur von einem Punkt $X = X_0$ der Gangebene $\mathbf{E}$, sondern gleichzeitig auch noch von weiteren Punkten $X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$ von $\mathbf{E}$ durchlaufen wird. Ein Beispiel eines Bewegungsvorgangs mit solch mehrfach durchlaufenen Bahnen erlangte erst jüngst praktische Bedeutung: Der Querschnitt des zylinderförmigen Gehäuses des NSU-*Wankel*-Motors ist eine überschneidungsfreie zweibogige Epitrochoide. Der ebenfalls zylindrisch geformte Dreiecksläufer wird einer Trochoidenbewegung (Kreisrollung) unterworfen, wobei die drei Anliegepunkte des Querschnittes, in denen die Dichtleisten angebracht sind, ein gleichseitiges Dreieck bilden und auf obiger Epitrochoide wandern. Diese Kurve wird somit von drei Punkten des bewegten Systems (Läufer) beschrieben.

Es erweist sich als zweckmäßig, die beiden Ebenen $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ als *Gauss*sche Zahlenebenen anzusehen und rechtwinkelige Achsenkreuze als ihre Repräsentanten zu wählen. Wir fassen hierzu die auf dem Gangkreuz $\{U; x_1, x_2\}$ in $\mathbf{E}$ fußenden kartesischen Koordinaten x_1, x_2 eines reellen Punktes X zu einer komplexen Zahl $x = x_1 + i\,x_2$ mit $i^2 = -1$ zusammen. Gleiches geschehe in $\mathbf{E}'$ mit den auf dem Rastkreuz $\{U'; x_1', x_2'\}$ begründeten kartesischen Koordinaten x_1', x_2' von X. Im festen System $\mathbf{E}'$ wird also der Punkt X durch $x' = x_1' + i\,x_2'$ erfaßt. Diese komplexen Zahlen x, x' entsprechen den Vektoren $\overrightarrow{UX}$ bzw. $\overrightarrow{U'X}$. Gehört zum Ursprung U im Rastsystem die Zahl $u' = u_1' + i\,u_2'$, die somit den Vektor $\overrightarrow{U'U}$ vertritt, so gilt gemäß Abb. 1 bei Einführung des Dreh-

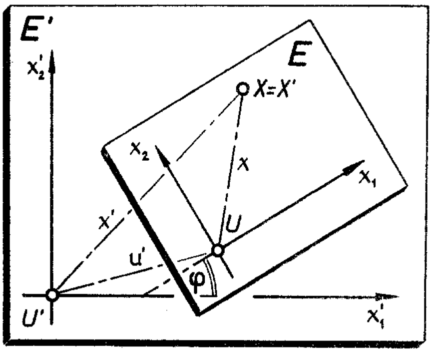

Abb. 1. Gang- und Rastebene

winkels φ, durch den das Gangkreuz gegenüber dem Rastkreuz verdreht erscheint,

$$x' = u' + x\,e^{i\varphi}. \tag{1}$$

Sind nun $u' = u'(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ genügend oft stetig differenzierbare Funktionen eines reellen Parameters t (Zeit) mit gemeinsamem Definitionsbereich, so wird durch (1) ein zwangläufiger Bewegungsvorgang **B** beschrieben, d. h. genauer gesagt die Bahnkurve dargestellt, die ein Punkt X der Ebene **E** bei **B** durchläuft.

I) Im besonderen wollen wir nun für **B** voraussetzen[1]:

a) *Die Funktion $u' = u'(t)$ sei periodisch mit der Periode T,*

b) *Der Drehwinkel φ hänge linear von der Zeit t ab: $\varphi(t) = ct + d$.*

Erteilt man dem Parameter t den Zuwachs T, so ergibt sich

$$u'(t+T) + x\,e^{i\varphi(t+T)} = u'(t) + x_1\,e^{i\varphi(t)}$$

mit

$$x_1 = x\,e^{icT}.$$

Fügt man allgemeiner zu t ein ganzzahliges Vielfaches von T hinzu, so wird

$$u'(t+kT) + x\,e^{i\varphi(t+kT)} = u'(t) + x_k\,e^{i\varphi(t)}$$

[1] Vgl. *H. R. Müller,* Kinematik (Samml. Göschen, Bd. 584/584a, Berlin 1963), S. 96.

mit

$$x_k = x\, e^{ickT}, \; k = \text{ganz}. \tag{2}$$

Falls nun cT ein *ganzzahliges Vielfaches* von 2π ist, so gilt

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = \ldots = x.$$

Der Bewegungsvorgang **B** hat in diesem Fall selbst die Periode T.

Ist jedoch cT *kein ganzzahliges Vielfaches* von 2π, so wird die Bahnkurve eines jeden Punktes X auch von weiteren Punkten der Gangebene **E** durchlaufen. Diese Punkte $X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$ gehen wegen (2) aus X durch Drehung um den Ursprung U mit ganzzahligen Vielfachen von cT als Drehwinkel hervor. Die Punkte $X_0 = X, X_1, \ldots X_k, \ldots$ bilden also einen *regelmäßigen Polygonzug.*

Ist im besonderen cT ein *rationalzahliges Vielfaches* von 2π, also $cT = 2\pi \cdot \frac{m}{n}$ (m und n ganz, teilerfremd), so schließt sich dieser Polygonzug, d. h. fallen die Punkte für $k \geq n$ mit schon betrachteten Punkten zusammen: $X_j = X_{j+n}$. Zu jedem Punkt X gibt es in diesem Fall endlichviele Punkte $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$, die mit ihm zusammen in der Gangebene **E** ein *regelmäßiges n-Eck* bilden und bei **B** auf der gleichen Bahnkurve wandern. Der Bewegungsvorgang **B** besitzt die *Periode* nT und kann durch Führung der Eckpunkte dieses regelmäßigen Vielecks von **E** auf der gleichen Kurve von **E**$'$ erzeugt werden.

Man gelangt zu abzählbar unendlich vielen Punkten $X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$ wenn cT ein *irrationalzahliges Vielfaches* von 2π ist. Der *unendliche* (sich nicht schließende) *regelmäßige Polygonzug* in **E** läßt sich auf der gleichen Bahnlinie von **E**$'$ bei **B** bewegen.

Nur für den Ursprung U, d. h. für $x = 0$, fallen diese Punkte X_k trivialerweise zusammen.

Für die Umkehrbewegung $\mathbf{B}' = \mathbf{E}'/\mathbf{E}$ fungieren diese Punkte $X_0 = X, X_1, \ldots X_k, \ldots$ als Stützpunkte, durch die die früher gemeinsam durchlaufene Bahnkurve stets hindurchgleitet.

Einfache Beispiele finden wir in den *Trochoidenbewegungen*[2]. Sie entstehen durch Rollung eines Kreises p vom Halbmesser r auf einem Kreis p' vom Halbmesser $r' = (1 - c)\, r$. Für sie gilt, wie man leicht einsieht,

$$x' = -c\, r\, e^{it} + x\, e^{ict}.$$

[2] Vgl. auch *W. Wunderlich,* Über Gleitkurvenpaare aus Radlinien. Math. Nachr. 20 (1959), 373—380.

Abb. 2 zeigt das Gehäuseprofil des *Wankel*-Motors mit $c = {}^1/_3$ oder $r' : r = 2:3$. In Abb. 3 ist $c = {}^1/_4$ oder $r' : r = 3:4$.

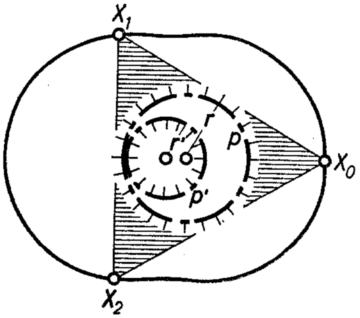

Abb. 2. Von drei Punkten beschriebene zweibogige Epitrochoide

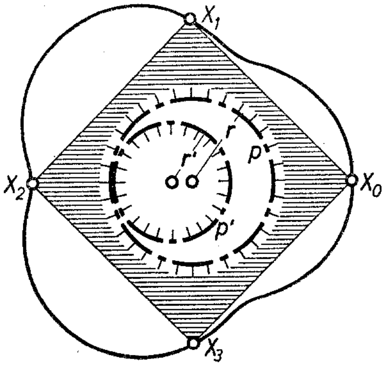

Abb. 3. Von vier Punkten beschriebene dreibogige Epitrochoide

II) Wir wollen nun die *allgemeinsten Bewegungsvorgänge* ermitteln, bei denen eine *mehrfache Bahndurchlaufung durch Punkte festen zeitlichen Abstands* T jeweils stattfindet.

Sollen die Bahnen zweier Punkte X, X_1 der Gangebene $\mathbf{E}$ sich decken, so muß für feste (komplexe) Werte x, x_1 wiederum

$$u'(t+T) + x\, e^{i\varphi(t+T)} = u'(t) + x_1\, e^{i\varphi(t)} \tag{3}$$

erfüllt sein. Diese Beziehung muß im besonderen auch für den Ursprung U, also für $x = 0$ gelten. Bezeichnen wir den zugehörigen Wert von x_1 mit q, so ist

$$u'(t+T) = u'(t) + q\, e^{i\varphi(t)}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$e^{i[\varphi(t+T)-\varphi(t)]} = \frac{x_1 - q}{x} = e^{i\varphi_0}$$

oder

$$x_1 = q + x\, e^{i\varphi_0}, \tag{5}$$

$$\varphi(t+T) - \varphi(t) = \varphi_0 = \text{konst.} \tag{6}$$

Die *Differenzengleichung* (6) für den Drehwinkel φ in Abhängigkeit von der Zeit t kann leicht gelöst werden, da ja

$$\varphi^*(t) = c\,t \qquad \text{mit } c = \text{konst.}$$

als spezielle Lösung bekannt ist. Gemäß

$$\varphi^*(t+T) - \varphi^*(t) = \varphi_0 \tag{7}$$

setzen wir $cT = \varphi_0$ und betrachten die Funktion

$$\omega(t) = \varphi(t) - \varphi^*(t) = \varphi(t) - c\,t.$$

Für sie gilt wegen (6), (7)

$$\omega(t+T) - \omega(t) = 0.$$

$\omega(t)$ ist also periodisch mit der Periode T. *Somit hat $\varphi(t)$ die Gestalt*

$$\varphi(t) = c\,t + \omega(t) \tag{8}$$

mit einer reellen Konstanten c und beliebiger periodischer Funktion $\omega(t)$ der Periode T.

Zwecks Kennzeichnung der Funktion $u' = u'(t)$ fassen wir (4) ebenfalls als *Differenzengleichung* auf:

$$u'(t+T) - u'(t) = q\,e^{i\varphi(t)}. \tag{9}$$

Hierbei ist q eine komplexe Konstante und $\varphi(t)$ von der Gestalt (8).

Um (9) zu lösen, fragen wir, was durch geeignete Verschiebung des Achsenkreuzes in der Gangebene **E** bewirkt werden kann. Man führt hierzu

$$x = y + s \qquad (s = \text{komplex, konst.}) \tag{10}$$

in (1) ein und erhält

$$y' = x' = v'(t) + y\,e^{i\varphi(t)} \tag{11}$$

mit

$$v'(t) = u'(t) + s\,e^{i\varphi(t)}. \tag{12}$$

Daraus entnimmt man unter Beachtung von (6)

$$u'(t+T) - u'(t) = v'(t+T) - v'(t) + s\,e^{i\varphi(t)}\,(1 - e^{i\varphi_0}).$$

Wählt man nun nach Vergleich mit (9) die noch verfügbare Größe s so, daß

$$q = s(1 - e^{i\varphi_0}) \tag{13}$$

gilt, dann wird

$$v'(t+T) - v'(t) = 0,$$

also $v'(t)$ *eine periodische Funktion mit der Periode T*. Hierbei ist nur auf

$$1 - e^{i\varphi_0} \neq 0, \text{ also } \varphi_0 \neq 2\,k\pi \qquad (k = \text{ganz})$$

zu achten. $u'(t)$ *ist somit von der Form*

$$u'(t) = v'(t) - s\,e^{i\varphi(t)}. \tag{14}$$

Durch (1) in Verbindung mit (8) und (14) sind nun die allgemeinsten Bewegungsvorgänge mit mehrfacher Bahndurchlaufung und $T =$ konst. bestimmt.

III) Nun wenden wir uns den *Bewegungsvorgängen* zu, bei denen der *zeitliche Abstand T der auf gleicher Bahn bewegten Punkte mit der Zeit t variiert*: $T = T(t)$.

In genau der gleichen Weise, wie früher bei II lassen sich nun die Gleichungen (3) bis (6), sowie die Bedingung (9) herleiten. Die Funktion $t^* = \varphi(t)$ kann jedoch weitgehend *beliebig* vorgegeben werden; sie sei nur wenigstens stückweise umkehrbar. Ihre Auflösung nach t möge mit $t = \psi(t^*)$ bezeichnet werden. Dann ist $T = T(t)$ bestimmt, denn es folgt aus (6)

$$T = T(t) = \psi(\varphi(t) + \varphi_0) - t. \tag{15}$$

Wir vollziehen nun einen Wechsel in der Variablen und schreiben statt (9)

$$u'(\psi(t^* + \varphi_0)) - u'(\psi(t^*)) = q\, e^{it^*}.$$

Mit der Abkürzung

$$u'(t) = u'(\psi(t^*)) = w'(t^*) \tag{16}$$

finden wir also in

$$w'(t^* + \varphi_0) - w'(t^*) = q\, e^{it^*} \tag{17}$$

eine *Differenzengleichung* vom früher unter II behandelten Typus: φ_0 entspricht nun dem früher konstanten Wert T. Gemäß (8) ist $c = 1$ und $\omega \equiv 0$ zu nehmen.

Nach (14) kann man also $w'(t^*)$ in der Gestalt

$$w'(t^*) = v'(t^*) - s\, e^{it^*} \tag{18}$$

ansetzen. Damit gelangt man schließlich wegen (16) zu

$$u'(t) = v'(\varphi(t)) - s\, e^{i\varphi(t)}, \tag{19}$$

wobei $v'(t^*)$ eine beliebige periodische Funktion der Periode φ_0 ist. Bei Vorgabe von q muß s wieder so gewählt werden, daß (13) erfüllt ist. (1) und (19) geben dann über die allgemeinsten Bewegungsvorgänge mit mehrfacher Bahndurchlaufung Aufschluß.

IV) *Nun untersuchen wir die Verteilung und die Lage der Punkte von* **E**, *die bei* **B** *eine gemeinsame Bahn in E' beschreiben.*

Aus (6) folgt sofort für festes T (Fall I und II)

$$\varphi(t + 2\,T) - \varphi(t) = 2\,\varphi_0$$

und daraus durch vollständige Induktion

$$\varphi(t + kT) - \varphi(t) = k\,\varphi_0,\ k = \text{ganz}. \tag{20}$$

Wegen (5) und (13) gilt

$$x_1 = s + (x - s)\, e^{i\varphi_0}.$$

Mit (20) finden wir, daß der Punkt X_k von **E** mit

$$x_k = s + (x - s)\, e^{ik\varphi_0} \tag{21}$$

im zeitlichen Abstand kT den gleichen Punkt der gemeinsamen Bahnkurve passiert wie der Ausgangspunkt X. Wir bestätigen hierzu nämlich

$$u'(t + kT) + x\, e^{i\varphi(t+kT)} = u'(t) + x_k\, e^{i\varphi(t)}. \tag{22}$$

Im Fall III, also bei beliebiger Vorgabe von $\varphi(t)$ gilt (21) ebenfalls wegen (16), (18). An die Stelle von (22) tritt

$$w'(t^* + k\,\varphi_0) + x\, e^{i(t^*+k\varphi_0)} = w'(t^*) + x_k\, e^{it^*}.$$

Die Punkte $X_0 = X, X_1, X_2, \ldots X_k, \ldots$ *der Gangebene* **E** *sind somit Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons bzw. Polygonzuges, dessen Mitte im Ursprung* S *des verschobenen Gangkreuzes liegt* ($y = 0$, $x = s$). Bei **B** werden diese Punkte auf der gleichen Bahnkurve bewegt. Der eingangs behandelte Sonderfall I, ja noch spezieller die Trochoidenbewegungen sind also bereits für Bewegungsvorgänge mit mehrfach beschriebenen Bahnkurven typisch. (Vgl. auch VI!)

Für $\varphi_0 = 2\,\pi\,\dfrac{m}{n}$ ist der Bewegungsvorgang **B** *geschlossen*, er besitzt in den Fällen I und II hinsichtlich der Veränderlichen t die *Periode* nT bzw. im Falle III bezüglich t^* die *Periode* $n\,\varphi_0$ und wegen

$$\oint \mathrm{d}\,\varphi = n\,\varphi_0 = 2\,m\,\pi$$

die *Drehzahl* m.

V) *Der Inhalt* F_X *des Flächenstückes*, das durch die Bahnkurve eines Punktes X von **E** bei einem geschlossenen Bewegungsvorgang **B** in der Ebene **E**′ berandet wird, kann nach der Formel

$$F_X = \frac{1}{2} \oint (x_1'\, dx_2' - x_2'\, dx_1') = \frac{1}{4\,i} \oint (\bar{x}'\, dx' - x'\, d\bar{x}')$$

berechnet werden. Hierin ist durch Überstreichen die Bildung des Konjugiums angedeutet: $\bar{x}' = x_1' - i\,x_2'$.

Mit *Jakob Steiner* kann man für die Fläche auch

$$F_X = m\pi[x\,\bar{x} - (x\,\bar{s}^* + \bar{x}\,s^*)] + F_U \tag{23}$$

schreiben, wobei durch

$$s^* = \frac{\oint p\, d\varphi}{\oint d\varphi} \tag{24}$$

der *Schwerpunkt* S^* der *Gangpolbahn* bei einer Belegung mit den Massenelementen $d\varphi$ gegeben ist und F_U die *Bahnfläche* des *Gangursprungs* U bedeutet[3].

Führt man

$$u' = -u\, e^{i\varphi}$$

ein, so wird der Momentanpol P im beweglichen System $\mathbf{E}$ durch

$$p = u - i\,\frac{\dot u}{\dot\varphi} = i\,\frac{\dot u'}{\dot\varphi}\, e^{-i\varphi}$$

erfaßt und gilt

$$F_U = \frac{1}{4} \oint (u\,\bar p + \bar u\, p)\, d\,\varphi. \tag{25}$$

Bei geschlossenen (periodischen) Bewegungsvorgängen mit mehrfacher Bahndurchlaufung muß naturgemäß

$$F_X = F_{X_k} \text{ für } k = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

gelten. In Hinblick auf (10) und (21) findet man

$$y\,\bar y = (x - s)\,(\bar x - \bar s) = (x_k - s)\,(\bar x_k - \bar s) = y_k\,\bar y_k.$$

Mit der Flächenformel (23), bezogen auf das verschobene Gangkreuz (Ursprung S), folgt aus (26) daher

$$(x - s)\,(\bar s^* - \bar s) + (\bar x - \bar s)\,(s^* - s) = (x_k - s)\,(\bar s^* - \bar s) + (\bar x_k - \bar s)\,(s^* - s)$$

oder schließlich

$$s^* - s = 0.$$

Der Steiner-Punkt S^* *fällt also mit dem Ursprung* S *des verschobenen Gangkreuzes zusammen*[4]. Die Flächenformel (23) vereinfacht sich auf

$$F_X = m\,\pi\, y\,\bar y + F_S = m\,\pi (x - s)\,(\bar x - \bar s) + F_S.$$

Der Steiner-Punkt $S^* = S$ *ist also stets der gemeinsame Mittelpunkt der auf gleicher Bahn bewegten regelmäßigen Vielecke.*

VI) Bisher gingen wir davon aus, daß das Zeitgesetz, also die Abhängigkeit von dem als Zeit gedeuteten Parameter t wesentlich sei. Verzichten wir darauf und betrachten wir allein den geometrischen

---

[3] Vgl. *W. Blaschke-H. R. Müller*, Ebene Kinematik (München 1956), S. 113.

[4] Man kann auch direkt $\oint (p - s)\, d\varphi = 0$ nachweisen, etwa dadurch, daß man mittels einer *Fourier*-Entwicklung zeigt:

$$\int_0^{nT} w(t)\, e^{-it}\, dt = 0, \text{ wenn } w(t + T) = w(t) \text{ und } T = 2\,\pi\,\frac{m}{n}.$$

Sachverhalt, was bereits auch in IV und V geschehen ist, so bietet sich wegen (19) der Drehwinkel $\varphi = t^*$ als vorteilhafter, „*natürlicher*" *Parameter* an. Bei seiner Verwendung und bei geeigneter Wahl des Gangkreuzes in **E**, nämlich bei Wahl des Ursprungs U im *Steiner*-Punkt S^*, was $s = 0$ und $q = 0$ zur Folge hat, werden wir geradezu auf Fall I mit $c = 1$, $d = 0$ geführt.

Die allgemeinsten Bewegungsvorgänge mit mehrfacher Bahndurchlaufung sind also im Wesentlichen bereits durch Fall I erfaßt; jeder solche Bewegungsvorgang läßt sich auf diese Form transformieren.