Monatshefte für Mathematik 75, 193—197 (1971)

Das Wienersche Maß einer gewissen Menge von Vektorfunktionen

Von

Wilhelm Fleischer, Salzburg

(*Eingegangen am 20. Juli 1970*)

In dieser Arbeit soll ein metrischer Satz von HLAWKA [3] zur Theorie der C-Gleichverteilung auf den mehrdimensionalen Fall übertragen werden. Eine Ungleichung, die HLAWKA in [3] beweist, wird unten als Hilfssatz 1 angeführt. Weiters wird hier eine Methode verwendet, welche BERNSTEIN bei seiner Verschärfung der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung benützte (vgl. [6]), wodurch eine Gleichung der Maßtheorie (siehe [2], § 35) anwendbar wird, was schon den Beweisschluß liefert. Für Definitionen und Ergebnisse zur Theorie der Gleichverteilung sei noch der Bericht von CIGLER-HELMBERG [1] erwähnt, für Sätze über das Wienersche Maß etwa das Buch von ITÔ-MCKEAN [5].

Gegeben sei die Menge W der stetigen Funktionen $\mathfrak{y}$ von $I^+=[0,+\infty)$ in den R^k. Ist $a(T,t)$ für $T \geq 0$ und $t \geq 0$ eine reellwertige und meßbare Funktion mit $\sup\limits_T \int\limits_0^\infty |\, a(T,t)\,|\, dt < +\infty$ und $\lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^\infty a(T,t) dt = 1$, so heißt $\mathfrak{y}$ aus W eine A-gleichverteilte Funktion, falls für jeden Quader $Q = \prod\limits_{\nu=1}^{k} [\alpha_\nu, \beta_\nu)$ aus dem k-dimensionalen Einheitswürfel die Beziehung

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^\infty a(T,t)\, c_Q(\{\mathfrak{y}(t)\})\, dt = \lambda(Q) \tag{1}$$

erfüllt ist. Dabei sei c_Q die charakteristische Funktion von Q, λ das Lebesguesche Maß im R^k und

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_k)\} = (\xi_1-[\xi_1], \ldots, \xi_k-[\xi_k]).$$

Für den folgenden Satz seien noch zwei Bedingungen durch $a(T,t)$ erfüllt:

a) Bezeichnet $\varphi(t)$ eine reellwertige und stetige Funktion über I^+, dann existiere stets ein T_φ, sodaß $\int_0^\infty a(T,t)\, e^{i\varphi(t)} dt$ für $T \geq T_\varphi$ gleichmäßig stetig ist.

b) Für jedes $\delta > 0$ sei $\int_0^\infty e^{-\delta^2/\alpha(T)} dT < +\infty$.

$$\left(\alpha(T) = \int_0^\infty a^2(T,t)\, dt. \right)$$

Es gilt nun der

Satz: *Die Menge der A-gleichverteilten $\mathfrak{y}$ aus W hat das Wienersche Maß Eins.*

Bemerkung: Bekanntlich ist für die Beziehung (1) notwendig und hinreichend, daß für jeden Gitterpunkt $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{o}$ aus R^k die Gleichung

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^\infty a(T,t)\, e^{2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t) \rangle} dt = 0 \tag{2}$$

richtig ist.

Hilfssatz 1 (HLAWKA): *Es sei $h(t) \geq 0$ eine meßbare Funktion über I^+, $\beta > 0$ und Δ_{2n} die Menge der $(t_1, \ldots, t_{2n})$ mit $t_\nu > 0$ für alle ν und $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{2n}$. Dann gilt*

$$\int_{\Delta_{2n}} \prod_{\nu=1}^{2n} h(t_\nu)\, e^{(-1)^{\nu-1} \beta t_\nu} dt_1 \ldots dt_{2n} \leq \frac{1}{n!\, \beta^n} \left(\int_0^\infty h^2(x)\, dx \right)^n. \tag{3}$$

Hilfssatz 2. Es sei $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ reelle Zahlen, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{o}$ ein Gitterpunkt und μ_w das k-dimensionale Wienersche Maß. Dann ist

$$\int_W \prod_{\nu=1}^{n} e^{\varepsilon_\nu 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t_\nu) \rangle} d\mu_w(\mathfrak{y}) = \prod_{\nu=1}^{n} e^{-2\pi^2 \|\mathfrak{m}\|^2 \left(\sum_{\mu=\nu}^{n} \varepsilon_\mu\right)^2 (t_\nu - t_{\nu-1})} \quad (t_0 = 0). \tag{4}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung durch elementare Rechnung. Anderseits ist die linke Seite von (4)

$$\prod_{\nu=1}^{n} (2\pi(t_\nu - t_{\nu-1}))^{-k/2} \int_{R^k} e^{\varepsilon_\nu 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}_\nu \rangle} e^{-\frac{\|\mathfrak{y}_\nu - \mathfrak{y}_{\nu-1}\|^2}{2(t_\nu - t_{\nu-1})}} d\mathfrak{y}_\nu. \tag{5}$$

Hier bedeute $t_0 = 0$, $\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{y}_1 = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $\ldots$, $\mathfrak{y}_n = (\xi_{(n-1)k+1}, \ldots, \xi_{nk})$ und $\| \mathfrak{y} \|$ die euklidische Norm im R^k.

Die beiden letzten Faktoren in (5) sind aber

$$\gamma \int_{R^k} e^{(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)\, 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}_{n-1}\rangle} e^{-\frac{\|\mathfrak{y}_{n-1}-\mathfrak{y}_{n-2}\|^2}{2(t_{n-1}-t_{n-2})}} d\,\mathfrak{y}_{n-1} \int_{R^k} e^{\varepsilon_n 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}_n-\mathfrak{y}_{n-1}\rangle} .$$

$$. e^{-\frac{\|\mathfrak{y}_n-\mathfrak{y}_{n-1}\|^2}{2(t_n-t_{n-1})}} d\mathfrak{y}_n \text{ mit } \gamma = (2\pi(t_{n-1}-t_{n-2}))^{-k/2} (2\pi(t_n-t_{n-1}))^{-k/2} . \tag{6}$$

Der Ausdruck (6) ist jedoch

$$(2\pi(t_{n-1}-t_{n-2}))^{-k/2} \int_{R^k} e^{(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n (2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}_{n-1}\rangle} e^{-\frac{\|\mathfrak{y}_{n-1}-\mathfrak{y}_{n-2}\|^2}{2(t_{n-1}-t_{n-2})}} d\mathfrak{y}_{n-1} .$$

$$. e^{-2\pi^2 \|\mathfrak{m}\|^2 \varepsilon_n^2 (t_n-t_{n-1})} . \tag{7}$$

Jetzt liefert die Induktionsannahme schon die Behauptung.

Beweis des Satzes: Es sei $T \geq 0$, n eine natürliche Zahl und $\mathfrak{m}$ ein Gitterpunkt $\neq \mathfrak{o}$ im R^k. Dann gilt mit $a(T, t) = a(t)$:

$$\int_W \Big| \int_0^\infty a(t)\, e^{2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t)\rangle} dt \Big|^{2n} d\mu_w(\mathfrak{y}) =$$

$$= \int_W \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{2n} \prod_{\nu=1}^{2n} a(t_\nu)\, e^{(-1)^\nu 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t_\nu)\rangle} dt_1 \ldots dt_{2n}\, d\mu_w(\mathfrak{y}) =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{2n} \prod_{\mu=1}^{2n} a(t_\mu) \int_W \prod_{\nu=1}^{2n} e^{(-1)^\nu 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t_\nu)\rangle} d\mu_w(\mathfrak{y})\, dt_1 \ldots dt_{2n} . \tag{8}$$

Für eine Permutation σ der $\mathfrak{S}_{2n}$ sei Δ_{2n}^σ die Gesamtheit der Tupel $(t_1, \ldots, t_{2n})$ mit $0 < t_{\sigma(1)} < t_{\sigma(2)} < \ldots < t_{\sigma(2n)}$. Also ist der letzte Ausdruck

$$\sum_{\sigma \varepsilon \mathfrak{S}_{2n}} \int_{\Delta_{2n}^\sigma} (\ldots)\, dt_1 \ldots dt_{2n} . \tag{9}$$

Nun folgt für einen Summanden in (9)

$$\Big| \int_{\Delta_{2n}^\sigma} (\ldots)\, dt_1 \ldots dt_{2n} \Big| \leq$$

$$\leq \int_{\Delta_{2n}} \prod_{\varrho=1}^{2n} |a(t_\varrho)|\, \Big| \int_W \prod_{\nu=1}^{2n} e^{\varepsilon_\nu 2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t_\nu)\rangle} d\mu_w(\mathfrak{y}) \Big|\, dt_1 \ldots dt_{2n} , \tag{10}$$

wobei $\varepsilon_\nu = \pm 1$ und $\sum_{\nu=1}^{2n} \varepsilon_\nu = 0$, denn Δ_{2n}^σ kann ja durch eine Permutation der Variablen, also durch eine Transformation, deren Funktionaldeterminante den Betrag 1 hat, in Δ_{2n} übergeführt werden.

Wegen Hilfssatz 2 kann (10) durch

$$\int_{\Delta_{2n}} \prod_{\nu=1}^{2n} |a(t_\nu)|\, e^{-2\pi^2 \|\mathfrak{m}\|^2 (\sum_{\mu=\nu}^{2n} \varepsilon_\mu)^2 (t_\nu - t_{\nu-1})} dt_1 \ldots dt_{2n} \tag{11}$$

nach oben abgeschätzt werden. Wenn man $(\sum_{\mu=\nu}^{2n} \varepsilon_\mu)^2$ für gerades ν durch 1 und für ungerades ν durch 0 ersetzt, so wird (11) kleiner oder gleich

$$\int_{\Delta_{2n}} \prod_{\mu=1}^{2n} |a(t_\mu)| \prod_{\nu=1}^{n} e^{-2\pi^2 \|\mathfrak{m}\|^2 (t_{2\nu} - t_{2\nu-1})} dt_1 \ldots dt_{2n}. \tag{12}$$

Nach Hilfssatz 1 ist (12) nicht größer als

$$\frac{1}{n!}\Big(\int_0^\infty a^2(t)\, dt\Big)^n. \tag{13}$$

Da man über alle σ der $\mathfrak{S}_{2n}$ summieren muß, erhält man schließlich

$$\int_W \Big|\int_0^\infty a(T,t)\, e^{2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t)\rangle} dt\Big|^{2n} d\mu_w(\mathfrak{y}) \leq \frac{(2n)!}{n!}\Big(\int_0^\infty a^2(T,t)\, dt\Big)^n. \tag{14}$$

Zur Abkürzung werde jetzt $y(T, \mathfrak{y}) = \int_0^\infty a(T,t)\, e^{2\pi i \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{y}(t)\rangle} dt$ gesetzt.

Dann ist mit $\varepsilon > 0$

$$\int_W \cosh \varepsilon |y|\, d\mu_w = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!} \int_W |y|^{2n} d\mu_w \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{\varepsilon^{2n}}{n!} (\alpha(T))^n = e^{\varepsilon^2 \alpha(T)}$$

und somit

$$\int_W e^{\varepsilon|y|}\, d\mu_w \leq 2 e^{\varepsilon^2 \alpha(T)}. \tag{15}$$

Mit reellem γ bilde man die Menge

$$A = \{\mathfrak{y} \mid e^{\varepsilon|y|} \geq e^\gamma \int_W e^{\varepsilon|y|}\, d\mu_w\} \supseteq \{\mathfrak{y} \mid |y| \geq \frac{1}{\varepsilon}(\gamma + \log 2 + \varepsilon^2 \alpha(T))\}.$$

Da $\int_W e^{\varepsilon|y|}\, d\mu_w \geq \mu_w(A)\, e^\gamma \int_W e^{\varepsilon|y|}\, d\mu_w$, so erhält man die Ungleichung

$$\mu_w(\{\mathfrak{y} \mid |y| \geq \frac{1}{\varepsilon}(\gamma + \log 2 + \varepsilon^2 \alpha(T))\}) \leq e^{-\gamma}. \tag{16}$$

Setzt man in (16) $\varepsilon = \delta/\alpha(T)$ mit $\delta > 0$ und $\gamma = \delta^2/\alpha(T) - \log 2$, so folgt

$$\mu_w(\{\mathfrak{y} \mid | y(T, \mathfrak{y}) | \geq 2\delta\}) \leq 2e^{-\delta^2/\alpha(T)}. \tag{17}$$

Wegen b) ist daher

$$\int_W \lambda (\{T \mid | y(T, \mathfrak{y}) | \geq 2\delta\}) \, d\mu_w(\mathfrak{y}) = \int_0^\infty \mu_w(\{\mathfrak{y} \mid | y(T, \mathfrak{y}) | \geq 2\delta\}) \, dT \leq$$
$$\leq 2 \int_0^\infty e^{-\delta^2/\alpha(T)} \, dT < +\infty.$$

Somit muß für jedes $\delta > 0$ die Menge der $\mathfrak{y}$, für die

$$\lambda (\{T \mid | y(T, \mathfrak{y}) | > \delta\}) < +\infty$$

ist, das Wienersche Maß Eins haben.

Läßt man δ eine Nullfolge durchlaufen, so bekommt man die Aussage, daß für μ_w - fast alle $\mathfrak{y}$ aus W das Lebesguesche Maß der Menge $\{T \mid | y(T, \mathfrak{y}) | > \delta\}$ kleiner als $+\infty$ für jedes $\delta > 0$ ist. Für diese $\mathfrak{y}$ aus W muß aber wegen a) die Gleichung

$$\lim_{T \to \infty} y(T, \mathfrak{y}) = 0$$

gelten.

Beachtet man noch die Abzählbarkeit der Gitterpunkte, so folgt die Beziehung (2) für μ_w- fast alle $\mathfrak{y}$ aus W, und alles ist gezeigt.

Literatur

[1] Cigler, J., G. Helmberg: Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresbericht der DMV **64,** 1–50 (1961).

[2] Halmos, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand. 1950.

[3] Hlawka, E.: Ein metrischer Satz in der Theorie der C-Gleichverteilung. Monatsh. Math. **74,** 108–118 (1970).

[4] Hlawka, E.: Folgen auf kompakten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **20,** 223–241 (1956).

[5] Itô, K., H. P. McKean: Diffusion Processes and Their Sample Paths. Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1965.

[6] Rényi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1966.

Anschrift des Verfassers:
Dr. W. Fleischer
Mathematisches Institut der Universität Salzburg
Porschestraße 1
A-5020 Salzburg