Notiz zu einem Satz über Diophantische Approximationen.

Von

L. Schmetterer, Wien.

(Eingelangt am 28. April 1952.)

Kanagasabapathy[1] hat eben mit Hilfe eines Satzes von *Davenport* (1946)[2] gezeigt: Es gibt ein reelles irrationales ϑ und ein reelles α, so daß die Ungleichung

$$|\, y\,\vartheta - x - \alpha \,| < \frac{h}{4\,|\, y\,|}$$

für irgendein $h, 0 < h < 1$ in ganzen (x, y) mit $y \neq 0$ unlösbar ist. Damit ist also gezeigt, daß $c = 1/4$ die „beste Konstante" ist, wenn man auch nur die Existenz mindestens einer ganzzahligen Lösung $(x, y), y \neq 0$ der Ungleichung $|\, y\,\vartheta - x - \alpha\,| < \dfrac{c}{|\, y\,|}$ für alle irrationalen ϑ und alle reellen α verlangt. Das ist das inhomogene Analogon zu einem Satze von *Prasad*[3]. Bekanntlich hat kürzlich *Hofreiter*[4] das Gegenstück zum Satz von *Prasad* für die ganzen Zahlen aus $k\,(i)$ bewiesen.

Es darf nun in diesem Zusammenhang vielleicht darauf hingewiesen werden, daß sowohl das Ergebnis von *Kanagasabapathy* als auch der entsprechende Satz für die ganzen Zahlen aus $k\,(i)$ leicht aus einer früheren Arbeit (1938) von *Hlawka*[5] folgen. Wir zeigen genauer, indem wir uns zur Vereinfachung der Schreibweise auf den Körper $k\,(i)$ beschränken, folgenden

Satz: Es gibt ein komplexes irrationales ϑ und ein komplexes β, so daß

---

[1] *Kanagasabapathy:* Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, 365—366 (1952).
[2] *Davenport:* Proc. Acad. Sci. Amst. **49**, 815—821 (1946).
[3] *Prasad:* J. Lond. Math. Soc. **23**, 169—171 (1948).
[4] *Hofreiter:* Mh. f. Math. **56**, 61—74 (1952).
[5] *Hlawka:* Mh. f. Math. u. Physik **47**, 181—196 (1938).

$$|y\vartheta - x - \beta| < \frac{|h|}{2|y|} \tag{1}$$

für jedes h mit $0 < |h| < 1$ in ganzen (x, y) mit $y \neq 0$ aus $k(i)$ unlösbar ist. Die Konstante $1/2$ ist die „beste" ihrer Art.

Beweis: Wir betrachten nach *Hlawka* die komplexe Irrationalzahl

$$\vartheta = i\,\frac{(b-1) - \sqrt{b^2+1}}{2b},$$

welche der Gleichung

$$2bz^2 - 2i(b-1)z + 1 = 0,\ b \text{ ganz} > 0. \tag{2}$$

genügt. Es sei nun (1) für ganze x, y und $y \neq 0$ aus $k(i)$ und irgendein h mit $0 < |h| < 1$ lösbar. Dann kann man mit passendem h $0 < |h| < 1$ schreiben:

$$y\vartheta - x - \frac{1+i}{2} = \frac{h}{2y}$$

oder

$$2y\vartheta - 2x - 1 - i = \frac{h}{y}. \tag{3}$$

Sei nun

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} < |y| < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} \tag{4}$$

Es ist $\frac{1}{2b} < |\vartheta| < \frac{1}{b}$. Weiter hat man für $b \geqq b(|h|)$ offenbar $b^4(1 - |h|^2) - b^2(8 + |h|^2) + 16 > 0$. Nun wähle man

$$b \geqq \max\left(b(|h|), \frac{|h|}{\sqrt{1 - |h|^2}}\right). \tag{5}$$

Man beachte zunächst, daß für hinreichend großes b

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - 8|\vartheta||h|}}{4|\vartheta|} < 1.$$

Weiter gilt:

$$|2y\vartheta - 2x - 1 - i| \geqq \big||2x + 1 + i| - |2y\vartheta|\big| \geqq$$
$$\geqq \big|\sqrt{2} - |2y\vartheta|\big| = \sqrt{2} - |2y\vartheta|,$$

da aus (4) $|y| < \frac{\sqrt{2}}{2|\vartheta|}$ folgt. Es ist aber $\sqrt{2} - |2y\vartheta| > \frac{|h|}{|y|}$, weil das Polynom in $|y|$ $2\,|\vartheta|\,|y|^2 - \sqrt{2}\,|y| + |h|$ im Intervall (4) stets negativ ist. Nun sei

$$|y|^2 > \frac{|h|^2\, b}{2\,(b - |h|\sqrt{b^2+1})}. \tag{6}$$

Wegen (5) ist der Nenner positiv. Nach *Hlawka*[5] gilt der Satz: Für alle ganzen x, y aus $k\,(i)$ mit $x \equiv (1+i)$ mod 2 ist stets

$$|\,b\,x^2 - 2\,i\,(b-1)\,x\,y + 2\,y^2\,| \geqq 2\,b.$$

Aus (3) und (2) folgt aber

$$2\,[b\,\xi^2 - 2\,i\,(b-1)\,\xi\,y + 2\,y^2] + 2\,[2\,h\,i\sqrt{b^2+1} - \frac{b\,h^2}{y^2}] = 0,$$

mit $\xi = 2\,x + 1 + i$, also $\xi \equiv 1 + i$ (2). Wegen (6) ist aber

$$2\,|h|\sqrt{b^2+1} + \frac{b\,|h|^2}{|y|^2} < 2\,b,$$

also nach dem zitierten Satz von *Hlawka* auch unter der Voraussetzung (6) ein Widerspruch hergeleitet. Damit ist aber alles gezeigt, wenn noch

$$\frac{|h|^2\, b}{2\,(b - |h|\sqrt{b^2+1})} < \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - 8\,|\vartheta|\,|h|}}{4\,|\vartheta|}\right)^2$$

nachgewiesen wird.

Dies ist aber äquivalent mit

$$(1 - 2\,|\vartheta|\,|h| + \sqrt{1 - 4\,|\vartheta|\,|h|})\,(b - |h|\sqrt{b^2+1}) > 2\,|\vartheta|^2\,|h|^2 b.$$

Wegen $|\vartheta| < \frac{1}{b}$ ist dies um so mehr der Fall, wenn

$$(1 - \frac{2}{b})\,(b - |h|\sqrt{b^2+1}) > \frac{2}{b}$$

ist.

Für hinreichend großes b ist $(1 - \frac{2}{b}) > 1/2$ also

$$b - |h|\sqrt{b^2+1} > \frac{4}{b}$$

zu erfüllen und dies ist wegen (5) stets der Fall.

Daraus und aus dem Satze von *Hlawka*[6] über die inhomogene Approximation durch Zahlen aus $k\,(i)$ ergibt sich auch die Tatsache, daß 1/2 die „beste" Konstante ist.

[6] *Hlawka:* Mh. f. Math. u. Physik **46**, 324—334 (1937).