Eine Bemerkung zur gleichmäßigen Gleichverteilung mod 1

Von

Peter Gerl, Wien

(Eingegangen am 10. Juni 1965)

Wir betrachten im folgenden Folgen reeller Zahlen $f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit der Eigenschaft: $f(n+1) \, . \, (f(n))^{-1} \to \infty$ für $n \to \infty$. Es wird gezeigt, daß unter dieser Voraussetzung die Menge der Zahlen α, für welche $f(n) \, . \, \alpha$ gleichmäßig gleichverteilt (g. glv.) mod 1 ist, das (Lebesguesche) Maß Null besitzt, anderseits aber, daß die hier auftretende Nullmenge nie leer ist. Dadurch werden Ergebnisse von [3] und [4] verallgemeinert, wo nur Folgen $f(n)$ natürlicher Zahlen betrachtet wurden. Außerdem soll gezeigt werden, daß die Bedingung $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+1) \, . \, (f(n))^{-1} = \infty$ in gewisser Weise scharf ist, als nämlich lim nicht durch limsup ersetzt werden darf. Für die hier verwendeten Begriffe sei auf [1] oder [3] verwiesen.

Zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1: Es sei die Folge $x(n)$ g. glv. mod 1. Gilt für eine Folge $y(n)$

$$\lim_{n\to\infty} (x(n) - y(n)) = 0,$$

so ist auch die Folge $y(n)$ g. glv. mod 1.

Beweis: Siehe [1].

Es sei nun $r_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ (a_n, b_n natürliche Zahlen) eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n+1} \cdot r_n^{-1} = \infty$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ (und < 1) definieren wir $n_0(r_n, \varepsilon)$ als die kleinste natürliche Zahl mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_n} < 1 - \varepsilon.$$

Hilfssatz 2: Es sei r_n eine Folge rationaler Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} r_{n+1}\cdot r_n^{-1} = \infty.$$

Wir wählen für ein festes $n \geq n_0(r_n, \varepsilon)$ eine natürliche Zahl p_n mit

$$(k+1-\frac{\varepsilon}{2})\, r_n > p_n > (k+\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i})\, r_n \quad (k \text{ natürlich})$$

und definieren weiter rekursiv:

$$p_{m+1} = \left[\frac{p_m}{r_m}\, r_{m+1}\right] \text{ für } m \geq n.$$

($[\alpha]$ bedeutet jene ganze Zahl mit $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$).

Behauptung: Es existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{r_n} = \alpha$ und es gilt

$$\left|\,\alpha - \frac{p_n}{r_n}\right| < \frac{\varepsilon_n}{r_n} \text{ mit } \varepsilon_n \to 0 \text{ für } n\to\infty. \tag{1}$$

Beweis: Man zeigt wie in [3], daß

$$0 \leq \frac{p_n}{r_n} - \frac{p_{n+k}}{r_{n+k}} \leq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_{n+i}} \leq \frac{c}{r_{n+1}}$$

gilt, woraus die Existenz von α und die Abschätzung (1) folgt.

Es sei jetzt r_n eine beliebige Folge reeller Zahlen; wir verwenden folgende Bezeichnung:

$$E(r_n) = \{\alpha \mid r_n\cdot\alpha \text{ ist g. glv. mod. } 1\}.$$

Satz 1: *Ist* r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge reeller Zahlen mit*

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \to \infty \textit{ für } n\to\infty,$$

so gilt

$$\lambda(E(r_n)) = 0 \qquad (\lambda \ldots \text{Lebesguesches Maß}).$$

Beweis: Es gibt eine Folge natürlicher Zahlen a_n mit

$$\left|\, r_n - \frac{a_n}{10^n}\right| < 10^{-n};$$

es ist klar, daß $a_{n+1}\cdot a_n^{-1} \to \infty$ für $n\to\infty$.

Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Zahl $\alpha \neq 0$ und natürliche Zahlen b_n mit

$$| \alpha - \frac{10^n \cdot b_n}{a_n} | < c \cdot \frac{10^{n+1}}{a_{n+1}}$$

oder

$$| \frac{a^n}{10^n} - b_n | < c' \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

und die rechte Seite strebt für $n \to \infty$ gegen Null; außerdem gilt $b_{n+1} \cdot b_n^{-1} \to \infty$. Es folgt also:

$$| r_n \alpha - b_n | < 10^{-n} + c' \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \varepsilon_n$$

mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Nach Hilfssatz 1 liegt $x \in E(r_n)$ genau dann, wenn $\frac{x}{\alpha} \in E(b_n)$, woraus weiter

$$E(r_n) = \alpha \cdot E(b_n) \tag{2}$$

folgt. Nach [4] (Theorem D) gilt nun $\lambda(E(b_n)) = 0$, woraus sich $\lambda(E(r_n)) = 0$ ergibt.

w.z.b.w.

Aus der Beziehung (2) folgt: Ist $x \in E(b_n)$, so liegt $\alpha \, . \, x \in E(r_n)$. Zusammen mit Satz 2 von [3] erhalten wir also:

Satz 2: Ist r_n eine beliebige Folge reeller Zahlen mit

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \to \infty \text{ für } n \to \infty,$$

so gibt es stets (i. a. sogar nichtabzählbar viele) Zahlen α, für welche die Folge $r_n \cdot \alpha$ g. glv. mod 1 ist.

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Voraussetzung

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

in gewissem Sinn nicht abgeschwächt werden kann; setzt man nämlich von der Folge r_n nur voraus:

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} < \limsup_{n \to \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \infty, \tag{3}$$

so treten folgende zwei Fälle wirklich auf:

1. Es gibt Folgen r_n, die (3) erfüllen, so daß $E(r_n) \neq \phi$

2. Es gibt Folgen r_n, die (3) erfüllen, so daß $E(r_n) = \phi$.

ad 1) Es sei a_n eine Folge reeller Zahlen mit $\lim a_{n+1} \cdot a_n^{-1} = \infty$. Nach Satz 2 ist $E(a_n) \neq \phi$. Ist $\alpha \in E(a_n)$, so sind die beiden Folgen

$$a_n \alpha \text{ und } (a_n + 1)\,\alpha$$

g. glv. mod 1. Wir betrachten nun eine neue Folge p_n, definiert durch

$$p_{2n} = a_n,\; p_{2n+1} = a_n + 1.$$

Klarerweise gilt dann $\alpha \in E(p_n)$, womit ein Beispiel für Fall 1 gegeben ist, denn es ist ja $\liminf\limits_{n \to \infty} p_{n+1} \cdot p_n^{-1} = 1 < \limsup\limits_{n \to \infty} p_{n+1} \cdot p_n^{-1} = \infty$.

ad 2) Zunächst einige Bezeichnungen: Es sei $a \geq 2$ eine natürliche Zahl, $f(n)$ eine Folge natürlicher Zahlen mit
$f(n) < f(n+1)$ ($f(-n) = 0$ für $n \geq 0$). Wir setzen

$$g(n) = a^{f(2k+1)+i} \text{ für } \begin{cases} 0 \leq i \leq f(2\,k+2) - f(2\,k+1) \\ n = \sum\limits_{i=1}^{k} (f(2\,j) - f(2\,j-1)) + k + i + 1 \\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

das heißt, $g(n)$ bedeutet die Folge

$$a^{f(1)}, a^{f(1)+1}, \ldots, a^{f(2)}, a^{f(3)}, \ldots, a^{f(2n)}, a^{f(2n+1)}, a^{f(2n+1)+1}, \ldots$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun der

Satz 3: *Ist die Folge $f(n)$ so gewählt, daß für eine geeignete Konstante c gilt:*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leq N \\ f(n+1) - f(n) \geq c}} 1 = 0, \tag{4}$$

dann ist die Folge $g(n) . \alpha$ für kein α g. glv. mod 1.

Beweis: Ist die Folge $g(n)\,\alpha$ nicht glv. mod 1, dann auch sicher nicht g. glv. Wir betrachten daher den Fall, daß $g(n) . \alpha$ glv. mod 1 ist. Setzen wir zur Abkürzung noch $d = [c] + 1$. Aus der Glv. folgt nun: Es gibt zu jedem p (natürlich) eine Folge $n_k(p)$ ($k = 1, 2, \ldots$) mit

$$0 \leq g(n_k(p))\,\alpha \leq r^{-2dp} \pmod 1 \tag{5}$$

und weiter

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n_k(p) \leq N} 1 = r^{-2dp};$$

das heißt also, die Folge $n_k(p)$ besitzt positive asymptotische Dichte. Wegen (4) gibt es daher sicher ein k, so daß

$$0 \leq g(n_k(p) + i)\, \alpha \leq r^{-1} \pmod 1 \quad (\text{Für } i = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Es folgt also weiter

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=n_k(p)}^{n_k(p)+p-1} \chi_{(0,\, r^{-1})}(g(n)\, \alpha) = 1$$

(χ_A ... charakteristische Funktion von A) und die Folge $g(n)\,\alpha$ ist nicht g. glv. mod 1. w. z. b. w.

Wählt man nun insbesondere die Folge $f(n)$ so, daß einerseits (4) erfüllt ist, anderseits für eine (hinreichend dünne) Teilfolge n_k gilt:

$$\lim_{k \to \infty} (f(n_k + 1) - f(n_k)) = \infty,$$

so ergibt sich aus Satz 3 eine Folge $g(n)$ mit $E(g(n)) = \phi$ und

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = a < \limsup_{n \to \infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \infty.$$

(Man setze z. B. $f(1) = 1, \quad f(n+1) = f(n) + 1$ für $n \neq 2^k$
$f(n+1) = f(n) + n$ für $n = 2^k$).

Bemerkung: Satz 3 verallgemeinert ein Ergebnis von Dowidar-Petersen [2] (Th. 6'); der dort bewiesene Satz ergibt sich für $f(n) = n$.

Literatur

[1] *J. Cigler-G. Helmberg*: Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresber. DMV, Bd. **64** (1961), 1—50.

[2] *A. F. Dowidar-G. M. Petersen*: The Distribution of Sequences and Summability. Can. J. Math., Vol. **15** (1963), 1—10.

[3] *P. Gerl*: Konstruktion gleichverteilter Punktfolgen. Mh. Math. **69** (1965).

[4] *G. M. Petersen-M. T. McGregor*: On the Structure of Well Distributed Sequences (II). Ind. Math. **26** (1964), 477—487.