

Kurven konstanter ganzer Krümmung und fester Hauptnormalenneigung

Von

Walter Wunderlich, Wien

Herrn Prof. Dr. J. Krames zum 75. Geburtstag gewidmet

Mit 2 Abbildungen

(Eingegangen am 29. Februar 1972)

1. Raumkurven mit vorgeschriebenem sphärischen Hauptnormalenbild

Sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ die vektorielle, auf die Bogenlänge s bezogene Darstellung einer hinreichend oft differenzierbaren Kurve l des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Verlegt man ihr begleitendes orthonormiertes Dreibein, bestehend aus der Tangente $\mathbf{e}_1 = \mathfrak{x}' = d\mathfrak{x}/ds$, der Hauptnormale $\mathbf{e}_2 = \mathfrak{x}''/\kappa$ und der Binormale $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, durch Parallelverschiebung in den Ursprung O , so führt es dort eine Bündelbewegung aus, wenn der Punkt \mathfrak{x} die Kurve l durchläuft. Diese Bewegung kann in jedem Augenblick als infinitesimale Drehung um eine bestimmte, durch den Darboux'schen Vektor $\mathfrak{d} = \tau \mathbf{e}_1 + \kappa \mathbf{e}_3$ gekennzeichnete Momentanachse aufgefaßt werden, wobei κ die Krümmung und τ die Torsion von l bezeichnet. Im Verlauf der Bewegung überstreicht diese Achse im Gangsystem das *Strahlbüschel* in der von den Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_3 aufgespannten Ebene $\mathfrak{d} \perp \mathbf{e}_2$, während sie im Rastsystem einen gewissen *Kegel II* erzeugt, der den Richtkegel der Strecktorse Θ darstellt, auf der die Kurve l als geodätische Linie verläuft. Wie die Kinematik lehrt, berührt die Ebene \mathfrak{d} den Kegel *II* längs der Momentanachse \mathfrak{d} und rollt gleitungslos auf ihm ab.

Faßt man bloß die Elemente auf der Einheitskugel ins Auge (vgl. Abb. 1), so hat man dort den die Punkte \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_3 verbindenden *Großkreis* q in \mathfrak{d} , welcher auf der als Spur des Kegels *II* auf-

tretenden *Rastpolkurve* p abrollt. Da q die gemeinsame sphärische Bahnnormale der Punkte e_1 und e_3 darstellt und die Kurve p berührt, kann letztere als die gemeinsame *sphärische Evolute* des durch $e_1(s)$ erklärten sphärischen *Tangentenbildes* c_1 und des durch $e_3(s)$ beschriebenen sphärischen *Binormalenbildes* c_3 der Kurve l bezeichnet werden. Wegen $\vartheta \perp e_2$ ist p im Sinne der Kugelgeometrie „polar“ zum sphärischen *Hauptnormalenbild* c_2 , das durch $e_2(s)$ erklärt ist.

Ist nun für eine Raumkurve l das sphärische Hauptnormalenbild c_2 vorgeschrieben, so kennt man auch die dazu polare Kurve p , und das sphärische Tangentenbild c_1 ist unter den ∞^1 *sphärischen Evolventen* von p zu wählen. Ist dies geschehen und steht auch die Parameterbelegung $e_2(s)$ auf c_2 zur Verfügung, so ist die gesuchte Raumkurve l durch eine einfache Integration zu finden. Die Rechnung verläuft folgendermaßen: Aus e_2 und der Ableitung $e_2' = de_2/ds$ erhält man zunächst durch äußere Produktbildung den Darbouxschen Drehvektor $\mathfrak{d} = e_2 \times e_2'$. Sein Betrag

$$|\mathfrak{d}| = |e_2'| = \lambda = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} \tag{1}$$

ist die von M. A. LANCRET eingeführte „ganze“ *Krümmung* von l . Der Einheitsvektor \mathfrak{d}/λ beschreibt das sphärische Strecktorsenbild p . Bezeichnet v den durch

$$\varkappa = \lambda \cos v, \quad \tau = \lambda \sin v \tag{2}$$

bestimmten Winkel zwischen \mathfrak{d} und e_3 , so gilt:

$$\frac{\mathfrak{d}}{\lambda} = \frac{e_2 \times e_2'}{|e_2'|} = e_1 \sin v + e_3 \cos v. \tag{3}$$

Aus der mit Benützung der Frenetschen Gleichungen gebildeten Ableitung

$$\left(\frac{\mathfrak{d}}{\lambda}\right)' = -\frac{(e_2 e_2' e_2'')}{|e_2'|^3} e_2' = (e_1 \cos v - e_3 \sin v) v' \tag{4}$$

vom Betrag $|v'|$ erhält man nun die Bogenlänge von p mit

$$v = \int \frac{(e_2 e_2' e_2'')}{e_2'^2} ds. \tag{5}$$

Jetzt läßt sich der Tangentenvektor \mathfrak{r}' anschreiben mit

$$e_1 = (b/\lambda) \sin v - (e'_2/\lambda) \cos v, \quad \text{wobei } b = e_2 \times e'_2, \quad \lambda = |e'_2|. \quad (6)$$

Integration liefert schließlich die Darstellung $\mathfrak{r} = \int e_1 ds$ der Raumkurve l . Durch Bildung der Ableitung von (6) wird man sich noch vergewissern, daß das zunächst noch unsichere Vorzeichen in (5) richtig gewählt wurde; man findet tatsächlich $e'_1 = \lambda \cos v \cdot e_2 = \kappa e_2$. Wegen der willkürlichen Integrationskonstante in (5) erhält man ∞^1 Tangentenbilder $e_1(s)$ und damit, abgesehen von Parallelverschiebungen, ebenso viele Lösungskurven l .

Ist das Hauptnormalenbild c_2 nun nicht auf die Bogenlänge s von l , sondern durch eine Darstellung $e_2 = e_2(u)$ auf einen *beliebigen Parameter* u bezogen, so wird die Raumkurve l erst dann bestimmbar, wenn zusätzlich die Abhängigkeit $s(u)$ vorgeschrieben wird. Mit $\dot{e}_2 = de_2/du$ und $e_2 \times \dot{e}_2$ kennt man jedenfalls die Richtungen von e_2 und b , und man kann daher mit Hilfe der zugehörigen Einheitsvektoren den Tangentenvektor analog zu (6) ansetzen durch

$$e_1 = \frac{e_2 \times \dot{e}_2}{|\dot{e}_2|} \sin v - \frac{\dot{e}_2}{|\dot{e}_2|} \cos v. \quad (7)$$

Nach Bildung der Ableitung \dot{e}_1 liefert die Orthogonalitätsbedingung $(\dot{e}_1 e_2 \dot{e}_2) = 0$ eine Bestimmungsgleichung für \dot{v} , die dann anstelle von (5) auf

$$v = \int \frac{(e_2 \dot{e}_2 \ddot{e}_2)}{\dot{e}_2^2} du \quad (8)$$

führt. Mit Rücksicht auf $\dot{e}_2 = e'_2 \dot{s}$ und $|e'_2| = \lambda$ erhält man schließlich nach Festsetzung der Integrationskonstante in (8) als Darstellung der Raumkurve l :

$$\mathfrak{r} = \int [(e_2 \times \dot{e}_2) \sin v - \dot{e}_2 \cos v] (du/\lambda), \quad (9)$$

wobei die Bogenlänge s im Sinne wachsenden Parameters u gezählt wird ($\dot{s} > 0$). Statt der Abhängigkeit $s(u)$ kann also der Verlauf $\lambda(u)$ der Lancret'schen Krümmung λ vorgeschrieben werden. Dieses Ergebnis steht in Einklang mit den Entwicklungen bei K. STRUBECKER [10, 165—167], ist aber insoferne etwas allgemeiner, als dort als spezieller Parameter die Bogenlänge von c_2 verwendet wurde, was das Endresultat (9) trotz $|\dot{e}_2| = 1$ nicht vereinfacht; überdies erscheint nun der geometrische Hintergrund ausreichend aufgehellt.

Das sphärische *Tangentenbild* c_1 der Raumkurve l ist gemäß Abschnitt 1 eine *sphärische Kreisevolvente*, nämlich eine Evolvente des Kreises p (12); dieselbe entsteht als Bahn eines Randpunktes der Kreisscheibe q , die auf dem Drehkegel $\Pi = Op$ abrollt (Abb. 1). Es handelt sich — wie auch beim Binormalenbild c_3 — um eine unter dem Winkel γ ansteigende *sphärische Böschungslinie*.

Gemäß Formel (8), in der $(e_2 \dot{e}_2 \ddot{e}_2) = m^2 n$, ergibt sich die auch unmittelbar erkennbare Bogenlänge von p mit

$$v = nu, \quad (13)$$

wenn man die unwesentliche Integrationskonstante unterdrückt. Für das Tangentenbild c_1 findet man über (7) die Darstellung

$$e_1 \begin{cases} x' = n \cos u \sin nu - \sin u \cos nu, \\ y' = n \sin u \sin nu + \cos u \cos nu, \\ z' = m \sin nu, \end{cases} \quad (14)$$

die auch direkt aus Abb. 1 abgelesen werden könnte. Die komplexe Zusammenfassung

$$x' + iy' = (i/2) [(1+n)e^{(1-n)iu} + (1-n)e^{(1+n)iu}] \quad (15)$$

läßt die wohlbekannte, auf A. ENNEPER zurückgehende Tatsache erkennen, daß eine sphärische Böschungslinie im Grundriß als *Epizykloide* erscheint [10, 221]. Gleiches gilt für das zu c_1 kongruente Binormalenbild c_3 :

$$e_1 \times e_2 = e_3 \begin{cases} n \cos u \cos nu + \sin u \sin nu, \\ n \sin u \cos nu - \cos u \sin nu, \\ m \cos nu. \end{cases} \quad (16)$$

Durch Auswertung der Frenetschen Relationen $\dot{e}_1 = \dot{s}e_1' = \dot{s}\kappa e_2$, $\dot{e}_3 = \dot{s}e_3' = -\dot{s}\tau e_2$ und $\dot{e}_2 = \dot{s}e_2'$ erhält man für die Krümmung κ , die Torsion τ und die Lancret-Krümmung λ der Raumkurve l die grundlegenden Formeln

$$\dot{s}\kappa = m \cos nu, \quad \dot{s}\tau = m \sin nu, \quad \dot{s}\lambda = m. \quad (17)$$

Hinsichtlich des Vorzeichens wird man sich am besten über die üblichen Konventionen hinwegsetzen.

3. Kurven mit konstanter ganzer Krümmung

Nach Annahme des Bogenelements $ds = \dot{s}(u)du$ kann man durch Integration der mit (14) definierten Linienelemente $d\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 ds = \mathbf{e}_1 \dot{s} du$ die verschiedensten speziellen Raumkurven fester Hauptnormalenneigung finden. So ergeben sich beispielsweise für $s = \operatorname{tg} nu$ die geodätischen Linien auf dem Drehkegel mit der Öffnung $2\gamma = 2\operatorname{arcsin} n$, für $s = \operatorname{sec} nu$ jene ausgezeichneten Geodätischen auf Schraubtoren, welche die Bahnschraublinien orthogonal durchsetzen und daher Gewindekurven sind. E. SALKOWSKI [8] ermittelte auf Grund von (17) die hierher gehörigen Raumkurven konstanter Krümmung (etwa $\kappa = 1: \dot{s} = m \cos nu$); sie fallen für rationales $n \neq 1/2$ algebraisch aus. Ebenso bestimmte er die einschlägigen Kurven konstanter Torsion (etwa $\tau = 1: \dot{s} = m \sin nu$) sowie in [9] die Bertrand-Kurven fester Hauptnormalenneigung ($A\kappa + B\tau = 1: \dot{s} = Am \cos nu + Bm \sin nu$); beide sind stets transzendent.

Hier sollen nunmehr die noch ausständigen *Kurven konstanter ganzer Krümmung* untersucht werden. Mit der zulässigen Normierung $\lambda = 1$ hat man wegen (17) $\dot{s} = m$, und die Integration von (14) bzw. (15) liefert die Darstellung der gesuchten Kurve l in der Form:

$$\mathfrak{E} \begin{cases} x + iy = (1/2m) [(1+n)^2 e^{(1-n)iu} + (1-n)^2 e^{(1+n)iu}], \\ z = -(m^2/n) \cos nu. \end{cases} \quad (18)$$

Der Übergang zur reellen Parameterdarstellung wäre durch Trennung in Real- und Imaginärteil leicht zu vollziehen. Gerade die komplexe Form läßt aber sofort erkennen, daß sich die Raumkurve l im Grundriß auf eine *Epitrochoide* abbildet [10, 97]. Dieselbe ist im übrigen durch Flachpunkte in den inneren Scheiteln ausgezeichnet, die sich für $\cos nu = 0$ einstellen; in diesen der xy -Ebene angehörenden Punkten von l verschwindet nämlich zufolge (17) die Krümmung $\kappa = \cos nu$ (Wendepunkte), während die Torsion die Extremwerte $\tau = \pm 1$ annimmt. Umgekehrt verschwindet die Torsion $\tau = \sin nu$ in den Henkelpunkten $\sin nu = 0$, wo die Krümmung den Höchstbetrag $|\kappa| = 1$ erreicht.

Bildet man unter Heranziehung der konjugierten Größe in (18) das Produkt $(x + iy)(x - iy)$, so erhält man

$$x^2 + y^2 = m^2 \cos^2 nu + (4n^2/m^2) = (n^2/m^2)(z^2 + 4), \quad (19)$$

was besagt, daß die Kurve l auf einem *einschaligen Drehhyperboloid* verläuft.

Für die *Streckebene* findet man mit Benützung ihres Normalenvektors e_2 (11) nach kurzer Rechnung die Gleichung

$$m x \cos u + m y \sin u - n z = 2 \cos n u. \quad (20)$$

In Abhängigkeit von dem als Zeit deutbaren Parameter u erfährt diese Ebene eine Lagenänderung, welche sich aus einer gleichförmigen Drehung um die z -Achse und einer harmonischen Schwingung $z = -(2/n) \cos n u$ längs dieser Achse zusammensetzt. Die bei einem solchen „harmonischen Umschwung“ (Frequenz n , Amplitude $2/n$) von der Ebene (20) eingehüllte „Umschwungtorse“ ist die *Strecktorse* Θ , auf der die Kurve l als geodätische Linie verläuft.

Wie W. KAUTNY [2] in seiner Untersuchung des harmonischen Umschwungs gezeigt hat, ist die Gratlinie einer Umschwungtorse (für $n \neq 1$) Böschungslinie auf einer Drehfläche 2. Ordnung. Im vorliegenden Fall tritt als *Gratlinie* k der Strecktorse Θ eine zum Tangentenbild c_1 (14) affine, unter dem Winkel $(\pi/2) - \gamma$ ansteigende Böschungslinie auf, deren Darstellung sich aus (20) und der ersten und zweiten Ableitung nach u mit

$$\begin{aligned} x &= (2n/m)(n \cos u \cos n u + \sin u \sin n u), \\ y &= (2n/m)(n \sin u \cos n u - \cos u \sin n u), \\ z &= -(2m^2/n) \cos n u \end{aligned} \quad (21)$$

ergibt. Diese Gratlinie k verläuft, wie man leicht nachprüft, auf dem *Drehellipsoid*

$$m^4(x^2 + y^2) + n^4 z^2 = 4m^2 n^2. \quad (22)$$

Die in der Grundebene $z=0$ vorhandene *Spurkurve* h der Böschungstorse Θ ist eine zum Grundriß der Gratlinie k (21) und damit auch zum Grundriß (15) von c_1 ähnliche *Epizykloide*, deren Stützfunktion $f(u) = (2/m) \cos n u$ unmittelbar aus (20) abzulesen ist. Hieraus ergibt sich dann der Krümmungsradius von h mit $\varrho = f + \ddot{f} = 2m \cos n u$. Bei der *Verebnung* der Torse Θ geht der Kontingenzwinkel du eines Bogenelements von h in $ndu = dv$ über — man vergleiche die entsprechende Verebnung des Richtkegels Π gemäß (13) —, und der Krümmungsradius ϱ vergrößert sich mithin auf

$$\bar{\varrho} = \varrho/n = (2m/n) \cos v. \quad (23)$$

Aus dieser Abhängigkeit zwischen Richtungswinkel v und Krümmungsradius $\bar{\rho}$ folgt dann die Darstellung der *verebneten Spurkurve* \bar{h} :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int \bar{\rho} \cos v \, dv = (m/2n)(2v + \sin 2v), \\ \bar{y} &= \int \bar{\rho} \sin v \, dv = (m/2n)(1 - \cos 2v).\end{aligned}\tag{24}$$

Sie lehrt, daß die Grundspur h der Strecktorse Θ bei deren Verebnung in eine *gemeine Zyklode* \bar{h} verwandelt wird. Den Erzeugenden von Θ entsprechen dabei wegen der Erhaltung der rechten Winkel mit h die Normalen von \bar{h} . Die Gratlinie k von Θ geht demnach in die Evolute von \bar{h} über, das ist eine dazu kongruente Zyklode \bar{k} . Die Kurve l schließlich wird als geodätische Linie auf Θ zu einer Geraden \bar{l} , und zwar zur Scheiteltangente $n\bar{y} = m$ von \bar{k} (vgl. Abb. 2). — Aus der bekannten Eigenschaft, daß die Krümmungsradien der Zyklode \bar{h} durch die Grundlinie \bar{l} halbiert werden, folgt, daß die Kurve l die zwischen Grundspur und Gratlinie k befindlichen Erzeugendenabschnitte der Strecktorse Θ hälftet, was ein Blick auf die z -Koordinaten in (18) und (21) bestätigt.

Die Hauptergebnisse seien noch zusammengefaßt im

Satz I. *Die Raumkurven konstanter ganzer Krümmung $\lambda = 1$ und fester Hauptnormalenneigung $\gamma = \arcsin n$ gegen eine waagrechte Grundebene $z = 0$ verlaufen auf einschaligen Drehhyperboloiden (19) mit der Öffnung 2γ und erscheinen im Grundriß als Epitrochoiden (18) der Familie $(1-n) : (1+n)$ mit Flachscheiteln. Die zugehörige Strecktorse (20) ist eine unter dem Winkel $(\pi/2) - \gamma$ geböschte Umschwungtorse der Frequenz n , die als Grundspur eine Epizykloide der gleichen Familie besitzt. Dieselbe geht bei der Verebnung der Torse ebenso wie deren Gratlinie (21) in eine gemeine Zyklode (24) über.*

Nach dem Gesagten läßt sich ein einfaches *Modell* folgendermaßen herstellen: Man schneidet aus Karton gemäß dem aus Abb. 2 ersichtlichen Muster ein Stück aus, das von einem Bogen einer gemeinen Zyklode \bar{h} und den zugehörigen Teilen der Evolutenzyklode \bar{k} begrenzt ist. Nach Eintragen der Scheiteltangente \bar{l} von \bar{k} wird der Karton längs vieler Tangenten von \bar{k} vorgeritzt. Verbiegt man nun das Modell derart, daß der Rand \bar{h} eben bleibt — etwa unter Aufsetzen auf eine Tischplatte —, dann wird es zu einem Teil einer Umschwungtorse, wobei \bar{h} in einen Epizykloidenbogen, k in die Gratlinie und l in eine Kurve konstanter ganzer Krümmung mit fester Hauptnormalenneigung übergeht. Je nach

dem Ausmaß der Verbiegung kann man alle Neigungen von $\gamma_1 = 19,5^\circ$ ($n_1 = 1/3$, $h = \text{Kardioide}$) bis $\gamma_2 = 90^\circ$ ($n_2 = 1$) erreichen.

Für rationale Werte der Kennzahl n ergeben sich durchwegs *algebraische Gebilde* (vom Geschlecht Null). Wird $n = \mu/\nu$ als gekürzter Bruch mit $0 < \mu < \nu$ angeschrieben und $w = \exp(iu/\nu)$ als neuer (komplexer) Parameter eingeführt, dann ist über die Darstellungen (18) und (21), die rational in w ausfallen, festzustellen, daß die Raumkurve l und die Gratlinie k ihrer Strecktorse die gemeinsame Ordnung $2(\mu + \nu)$ haben. Aus (20) hingegen findet man für die Strecktorse die Klasse 2ν .

Abb. 2 illustriert die einfachste Annahme $n = 1/2$. Hier beträgt die Hauptnormalenneigung $\gamma = 30^\circ$; die zugehörige Kurve konstanter ganzer Krümmung ist von 6. Ordnung und verläuft als geodätische Linie auf einer Umschwungtorse 4. Klasse, die als Grundspur eine zweispitzige Epizykloide („Nephroide“) aufweist.

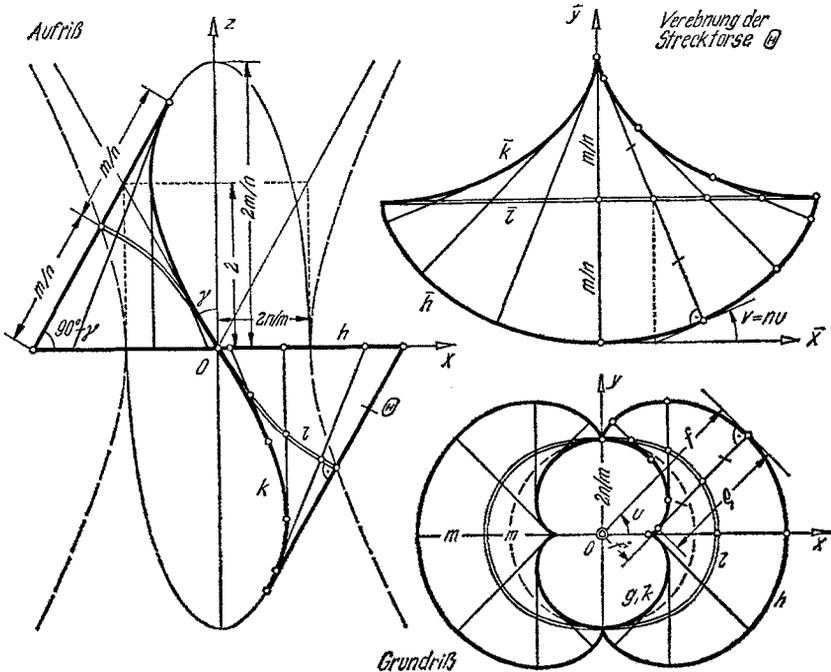


Abb. 2. Kurve konstanter ganzer Krümmung $\lambda = 1$ mit fester Hauptnormalenneigung ($\gamma = 30^\circ$; $n = 1/2$, $m = \sqrt{3}/2$)

4. Bewegung des begleitenden Dreibeins

Die Bewegung des begleitenden Dreibeins e_1, e_2, e_3 längs der Raumkurve l gegenüber dem ruhenden System x, y, z wird in Abhängigkeit vom Zeitparameter u durch die Wanderung des Kurvenpunktes \mathfrak{r} (18) und die Veränderung der Vektoren e_1 (14), e_2 (11) und e_3 (16) erfaßt. Ein im Achsenkreuz e_1, e_2, e_3 mittels der Koordinaten ξ, η, ζ festgelegter reeller Punkt nimmt zur Zeit u die Lage

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{r} + \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 \quad (25)$$

ein. Ausgeführt ergibt dies in komplexer Zusammenfassung:

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{1+n}{2m} [1+n+m(\zeta+i\xi)] e^{(1-n)iu} - m\eta e^{iu} \\ &+ \frac{1-n}{2m} [1-n-m(\zeta-i\xi)] e^{(1+n)iu}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$z = m\xi \sin nu + n\eta + (m/n)(n\zeta - m) \cos nu.$$

Mit $\xi, \eta, \zeta = \text{const}$ hat man in (26) bereits eine Parameterdarstellung der *Punktbahnen*. Diese erscheinen im Grundriß im allgemeinen als Radlinien 3. Stufe der Familie $(1-n) : 1 : (1+n)$ [11], die sich für Punkte der rektifizierenden Ebene $\eta = 0$ auf Epitrochoiden reduzieren, ebenso wie für die Punkte der zur Hauptnormale parallelen Geraden $\xi = 0$, $m\zeta = \pm 1 - n$. Die beiden der Binormale $\xi = \eta = 0$ angehörenden Punkte $\zeta = (\pm 1 - n)/m$ beschreiben Umschwingkurven [2] auf coaxialen Drehzylindern und bilden sich im Grundriß sogar auf Kreise ab. — Wie ohne Wiedergabe der etwas weitläufigen Rechnungen vermerkt sei, verlaufen die Punktbahnen (26) auf Drehflächen, die durch Rotation einer Ellipse um die z -Achse entstehen¹. Diese Drehflächen sind im allgemeinen von 4. Ordnung, reduzieren sich aber für Punkte in der Normalebene $\xi = 0$ (und nur für solche) auf Drehflächen 2. Ordnung. Die Punkte der zur Hauptnormale parallelen Gerade $\xi = 0$, $\zeta = m/n$

¹ Zum Nachweis braucht man bloß in der ersten Zeile von (26) den Drehfaktor $\exp iu$ abzuspalten und anschließend $nu = v$ zu setzen. Die Koordinaten x, y, z werden dann durchwegs linear in $\sin v$ und $\cos v$, was eine Ellipse definiert.

durchlaufen durchwegs ebene Bahnen ($z = \text{const}$) in Gestalt von Radlinien 3. Stufe

$$x + iy = \frac{(1+n)^2}{2mn} e^{(1-n)iu} - m\eta e^{iu} - \frac{(1-n)^2}{2mn} e^{(1+n)iu}, \quad (27)$$

$$z = n\eta.$$

Unter ihnen findet sich eine zu $\eta = 0$ gehörige, von einem Punkt der Binormale erzeugte Epitrochoide, die in der Grundebene $z = 0$ verläuft und zum Grundriß der Kurve l (18) ähnlich ist.

Die von der Hauptnormale $\xi = \zeta = 0$ überstrichene *Hauptnormalenfläche* Φ der Leitkurve l wird gemäß (26) durch

$$x + iy = \frac{(1+n)^2}{2m} e^{(1-n)iu} - m\eta e^{iu} + \frac{(1-n)^2}{2m} e^{(1+n)iu}, \quad (28)$$

$$z = n\eta - (m^2/n) \cos nu$$

mit veränderlichem u und η beschrieben. Ihre Spurkurve in der Grundebene $z = 0$, gekennzeichnet durch $\eta = (m/n)^2 \cos nu$ und demgemäß dargestellt durch

$$x + iy =$$

$$= \frac{1}{2mn^2} [(1+n)^2(2n-1)e^{(1-n)iu} - (1-n)^2(1+2n)e^{(1+n)iu}], \quad (29)$$

ist eine Epitrochoide für $n \neq 1/2$, die sich für $n = 1/2$ auf einen Kreis reduziert. Die übrigen Schichtenlinien $z = \text{const}$ sind Radlinien 3. Stufe bzw. Epitrochoiden der Familie 1 : 3.

Wegen der festen Neigung γ ihrer Erzeugenden besitzt die Fläche Φ als Richtkegel einen Drehkegel mit z -paralleler Achse und der Öffnung $\pi - 2\gamma$. Wie bekannt [5, 7], ist ihre *Striktionslinie* g dann mit dem Umriß für die Grundrißprojektion identisch, wird also von der Berührungslinie des umschriebenen z -parallelen Zylinders Γ gebildet. Jede Tangentialebene desselben enthält neben der Hauptnormale e von l auch den im gleichen Punkt angebrachten Darboux-Vektor \mathfrak{d} (vgl. Abb. 1), also die Erzeugende der Strecktorse Θ . Der Grundriß von g deckt sich daher mit jenem der Gratlinie k von Θ und ist demnach eine Epizykloide, die gemäß (21) durch

$$x + iy = (n/m) [(1+n)e^{(1-n)iu} - (1-n)e^{(1+n)iu}] \quad (30a)$$

dargestellt wird (Abb. 2). Der Vergleich mit (28) liefert dann für

die Striktionslinie g die Relation $\eta = \cos nu$ und damit die noch fehlende Koordinate

$$z = \frac{n^2 - m^2}{n} \cos nu. \quad (30b)$$

Die Striktionslinie g ist mithin für $\gamma \neq \pi/4$ ($n \neq m$) eine zur Gratlinie k affine Böschungslinie auf einem gewissen Drehellipsoid. Als Steigwinkel findet man $(\pi/2) - 2\gamma$. Da g also alle Erzeugenden des Zylinders Γ unter dem festen Winkel 2γ schneidet, handelt es sich um eine *geodätische Linie* desselben und gleichzeitig auch um eine solche der Hauptnormalenfläche Φ .² — Im Sonderfall $\gamma = \pi/4$ ($m = n = 1/\sqrt{2}$) wird die Striktionslinie eben und fällt mit der Basiszykloide des Zylinders Γ zusammen.

Im Zentralpunkt $\xi = 0$, $\eta = \cos nu$, $\zeta = 0$ der Erzeugenden e der Hauptnormalenfläche Φ liegen nun folgende Flächentangenten vor: die Tangente t der Striktionslinie g und die dazu konjugierte Erzeugende $\bar{t} \parallel z$ des längs g berührenden Zylinders Γ , ferner die zu e normale „Zentraltangente“ $d \parallel \mathfrak{d}$ (Neigung $(\pi/2) - \gamma$). Der Vergleich der Neigungen lehrt, daß d und e die Winkel zwischen t und \bar{t} halbieren, also zu t und \bar{t} harmonisch liegen. Hieraus folgt, daß die Zentraltangente d *Schmiegtangente* der Hauptnormalenfläche von l ist, eine Eigenschaft, die nach A. MANNHEIM charakteristisch für alle Raumkurven konstanter ganzer Krümmung ist [6].

Die Bewegung des begleitenden Dreibeins längs der Kurve l läßt sich bekanntlich in jedem Augenblick als infinitesimale Schraubung um eine bestimmte *Momentanachse* auffassen, deren Richtung durch den Darbouxschen Drehvektor \mathfrak{d} (3) gegeben ist. Um sie zu finden, könnte man nach jenen Punkten (ξ, η, ζ) fragen, deren Bahntangente die Richtung \mathfrak{d} hat. Die Auswertung dieser Bedingung führt über (26) und

$$(\dot{x} + i\dot{y}) : \dot{z} = n e^{iu} : m \quad (31)$$

auf

$$\xi = t \sin nu, \quad \eta = \cos nu, \quad \zeta = t \cos nu. \quad (32)$$

Damit bestätigt sich die bekannte Tatsache, daß die momentane Schraubachse mit der vorhin betrachteten *Zentraltangente* d der Hauptnormalfläche Φ von l identisch ist; sie kann als Grenzlage des Gemeinlots zusammenrückender Hauptnormalen gedeutet werden.

² Derartige Strahlflächen mit gleich geneigten Erzeugenden, die eine geodätische Striktionslinie mit Zykloidengrundriß besitzen, sind wiederholt auch in einer Arbeit von W. JANĀK [1] aufgetreten.

Die Ortsfläche der zeitlich veränderlichen Momentanachse d im Gangsystem, das bereits durch (32) dargestellte *Gangaxoid*, ist ein *Konoïd 4. Grades*, und zwar ein spezielles, als Umschwungwendelfläche [3] erzeugbares Kugelkonoïd mit der Gleichung $\xi^2 \eta^2 + \eta^2 \zeta^2 = \zeta^2$. Es besteht aus jenen Normalen des Drehzylinders $\xi^2 + \zeta^2 = 1$, deren Fußpunkte die Ellipse in der Ebene $\eta = \zeta$ erfüllen, und ist bei waagrechter Erzeugendenlage die einzige nicht-triviale Regelfläche mit durchwegs ebenen Fallinien, nämlich Ellipsen [4, 12].

Das zugehörige, im ruhenden System auftretende *Rastaxoid* ist das von den Zentraltangenten d erfüllte *Striktionsband* Ψ von Φ . Es wird gemäß (26) und (32) dargestellt durch

$$\begin{aligned} x + iy &= (n/m) [(1+n)e^{(1-n)iu} - (1-n)e^{(1+n)iu}] + nte^{iu}, \\ z &= (n - m^2/n) \cos nu + mt. \end{aligned} \quad (33)$$

Die Spurkurve in der Grundebene $z=0$, gekennzeichnet durch $mnt = (m^2 - n^2) \cos nu$, ist im allgemeinen eine Epitrochoide

$$x + iy = (1/2m) [(1+2n)e^{(1-n)iu} + (1-2n)e^{(1+n)iu}], \quad (34)$$

die sich im Sonderfall $n=1/2$ auf einen Kreis reduziert (und zwar auf denselben wie bei der Hauptnormalenfläche Φ). Die übrigen Schichtenlinien $z = \text{const}$ sind Radlinien 3. Stufe für $n \neq 1/2$ bzw. Epitrochoiden für $n = 1/2$.

Die Hauptnormalenfläche Φ (28) und ihr Striktionsband Ψ (33) haben nach allem eine weitgehend ähnliche Bauart. Während jedoch eine Regelfläche und ihr Striktionsband, die nach M. CHASLES in einer austauschbaren Beziehung zueinander stehen [5, 7], einander längs ihrer gemeinsamen Striktionslinie im allgemeinen bloß berühren, findet im vorliegenden Fall zwischen Φ und Ψ längs der Striktionslinie g (30) sogar *Oskulation* statt.

Abschließend seien die Hauptresultate wieder zusammengefaßt:

Satz 2. *Während der Bewegung des begleitenden Dreibeins längs einer Raumkurve konstanter ganzer Krümmung und fester Hauptnormalenneigung $\gamma = \arcsin n$ schrotet ein spezielles Kugelkonoïd (32) auf dem Striktionsband (33) der Hauptnormalenfläche (28). Die letztgenannten beiden Flächen oskulieren einander entlang ihrer gemeinsamen geodätischen Striktionslinie (30), welche für $n \neq 1/2$ Böschungslinie auf einem Drehellipsoid ist und sich für $n = 1/2$ auf eine Nephroide reduziert.*

Literatur

- [1] JANK, W.: Flächen mit kongruenten Fallparabeln. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. (im Druck).
- [2] KAUTNY, W.: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. **60**, 66—82 (1956).
- [3] KAUTNY, W.: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63**, 169—188 (1959).
- [4] KRAMES, J.: Die windschiefen Flächen mit ebenen Falllinien. Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss. **172**, 159—172 (1963).
- [5] KRUPPA, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien, 1957; 67 ff.
- [6] LORIA, G.: Curve sghembe speciali, II. Bologna, 1925; 122 ff.
- [7] MÜLLER, E., J. KRAMES: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III). Leipzig u. Wien, 1931; 135 ff.
- [8] SALKOWSKI, E.: Zur Transformation von Raumkurven. Math. Ann. **66**, 517—557 (1909).
- [9] SALKOWSKI, E.: Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. **69**, 560—579 (1910).
- [10] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie, I (Sammlung Göschen, Bd. 1113/1113 a). Berlin, 2. Aufl. 1964.
- [11] WUNDERLICH, W.: Höhere Radlinien. Österr. Ing.-Archiv **1**, 277—296 (1947).
- [12] WUNDERLICH, W.: Flächen mit Kegelschnitten als Falllinien. J. reine angew. Math. **208**, 204—220 (1961).

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. W. WUNDERLICH
Technische Hochschule
Karlsplatz 13
A-1040 Wien, Österreich