Zeitschrift für Nationalökonomie 35 (1975), 63—76

Optimale Preispolitik bei dynamischen deterministischen Absatzmodellen

Von

Klaus Spremann, Karlsruhe

(Eingegangen am 7. Oktober 1974)

1. Zeitlicher Absatz eines Produktes bei Marketingaktivitäten

Gewinnmaximierende Marketingstrategien mit den *Aktionsparametern Preis* $p(t)$ und *Werbeaufwand* $a(t)$ bei dynamischen Absatz- bzw. Nachfragerelationen haben bereits 1954 R. Dorfman und P. O. Steiner [4] charakterisiert. Das nachgefragte Gut wird als *neuartig* betrachtet, es verschaffe dem Hersteller eine Monopolstellung, wenigstens sei es heterogen in einem Polypol: exogene Aktivitäten sowie Reaktionen anderer Produzenten können so vernachlässigt werden, [6, S. 55]. Allerdings nehmen Dorfman und Steiner an, gegenwärtige Marketingaktivitäten seien ohne Einfluß auf die Absatzraten in der Zukunft. Dieser Mangel[1] wird für das ‚advertising' 1957 von M. L. Vidale und H. B. Wolfe [15] ausgemerzt. Gestützt auf Beobachtungen des amerikanischen Marktes während der Jahre 1948—1955 formulieren sie ihre Absatzrelation, in die allerdings Preise nicht eingehen:

$$\dot{S}(t) = r \cdot a(t) \cdot (\bar{S} - S(t))/\bar{S} - \lambda \cdot S(t), \tag{1}$$

wobei $S(t)$ ‚rate of sales', Absatzgeschwindigkeit,

$a(t)$ ‚advertising', Ausgaben für Werbung zur Zeit t,

---

[1] Man vgl. den Aufsatz über „Bandwagon Effects" von L. R. Eeckhoudt [The "Dorfman Steiner" Rule, the Intertemporal Case. Zeitschrift für Nationalökonomie *32* (1972) S. 487—491], den Folgeartikel von N. J. Ireland [The "Dorfman-Steiner" Rule and Bandwagon Effects. Zeitschrift für Nationalökonomie *33* (1973), S. 427—430] und die Antwort Eeckhoudts [The "Dorfman-Steiner" Rule: The Intertemporal Case, a reply. Zeitschrift für Nationalökonomie *33* (1973), S. 431—434].

r	‚response constant‘,
$\bar{S}$	‚saturation level‘ für die Absatzgeschwindigkeit,
λ	‚sales decay constant‘;
$r, \bar{S}, \lambda$	sind produktspezifische, durch Tests meßbare Konstanten.

Die Struktur von (1) findet sich in allen späteren dynamischen Absatzrelationen wieder; vor allem ist klar: ‚*Advertising is a form of investment*‘ [15, p. 379]. So bauen M. Nerlove und K. J. Arrow [8] durch Werbung einen ‚stock‘ A auf, den sie ‚goodwill‘ nennen und der als ‚Faktor einer Produktionsfunktion‘ f neben Preis p und Umgebung z (Konsumenteneinkommen, Bevölkerungsentwicklung, Preise der Substitute und Preise komplementärer Produkte) die Nachfrage bestimmt,

$$S(t) = f(p(t), A(t), z(t)). \tag{2}$$

Vidale-Wolfes ‚sales decay constant λ‘ erscheint bei Nerlove und Arrow als ‚fade away‘ des Goodwillstocks (da $\delta > 0$):

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= a(t) - \delta \cdot A(t), \\ A(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Da die Preise der Vergangenheit in (2) keinen Einfluß auf die gegenwärtige Absatzgeschwindigkeit $S(t)$ haben, bestimmt sich der gewinnmaximierende Preis wie im statischen Fall aus der *Formel von Robinson-Amoroso*[2] für alle t aus

$$p(t) = \frac{c_g(t) \cdot \eta(t)}{\eta(t) - 1}; \; c_g \text{ Grenzkosten} \tag{4}$$

wobei $\eta(t)$ die Elastizität der gegenwärtigen Nachfrage $S(t)$ bezüglich des Preises ist,

$$\eta(t) := -\frac{\partial S(t)/S(t)}{\partial p(t)/p(t)}. \tag{5}$$

---

[2] Benannt nach dem italienischen Nationalökonomen und Mathematiker Luigi Amoroso (1886—1965) [Lezioni di economia matematica, 1921, und: La curva statica di offerta, Giornale degli Economisti, 1930] und der englischen Nationalökonomin Joan Violet Robinson (* 1903) [The Economics of Imperfect Competition, 1933, pp. 52 ff.]. Zur Entwicklung des „technical apparatus“ der geometrischen Analyse mit Durchschnitts- und Grenzkosten bzw. Grenzgewinnkurven zitiert J. Robinson aber auch Pigou, Harrod [The Law of Decreasing Costs, Economic Journal, 1931], v. Stackelberg [Grundlagen einer reinen Kostentheorie, Zeitschrift für Nationalökonomie, 1932], E. Schneider, T. O. Yntema [The Influence of Dumping on Monopoly Price, J. of Pol. Econ., 1928].

Als eigentliches dynamisches Problem bleibt der *optimale Aufbau des Goodwillstocks.* Dazu wählt man den Werbeaufwand $a(t)$ als Steuervariable, den Goodwillstock $A(t)$ als Zustandsvariable eines *Kontrollproblems* mit den Nebenbedingungen (2), (3), (4), (5) und der zu maximierenden Zielfunktion

$$\int_0^T [e^{-\varepsilon t} (p(t) - c_s) \cdot f(p(t), A(t), z(t)) - a(t)]\, dt = \max! \qquad (6)$$

ε Diskontfaktor,

c_s Stückkosten. In [8] $T = \infty$ und von der Auflage abhängige Kosten.

Deutet man a (t) als Investition, $A(t)$ als Kapitalstock, die exogenen Einflüße $z(t)$ als Arbeitskräftepotential und f als Produktionsfunktion [$p(t)$ ist implizit durch (4) und (5) gegeben], dann werden die Ähnlichkeiten zur optimalen Kapitalakkumulation in der Wachstumstheorie nach F. Ramsey, R. M. Solow und anderen offensichtlich.

Die in [8] vorausgesetzte Unabhängigkeit des gegenwärtigen Absatzes vom bisherigen Gesamtabsatz und damit von den Preisen der Vergangenheit bewirkte, *daß die Bestimmung eines optimalen Preises kein dynamisches, sondern ein statisches Problem* war. Diese Unabhängigkeit ist jedoch nicht immer gegeben; dies zeigte (1) mit dem ‚saturation level' $\bar{S}$. Besonders aber bei *langlebigen Konsumgütern,* deren physische Lebensdauer die ökonomische übersteigt, weshalb Wiederholungskäufe selten vorkommen, *sind die gegenwärtigen Verkaufsgeschwindigkeiten abhängig vom Sättigungsniveau, vom Bekanntheitsgrad* (= bisheriger Gesamtabsatz), also abhängig von den Absatzgeschwindigkeiten und den *Preisen der Vergangenheit.* Dies zeigen somit die *betriebswirtschaftlichen Prognosemodelle* [7], [10] wie der logistische Ansatz, das Gompertz-Modell und die Lebenszyklen [3], [9] mit der Verhaltensgleichung von Bass [1]: Beim *logistischen Modellansatz* geht man davon aus, daß die Absatzgeschwindigkeit $S(t)$ proportional ist zu dem zur Zeit t noch nicht ausgenutzten Marktpotential [= potentielle Käuferzahl $\bar{X}$ — bisheriger Gesamtabsatz $X(t)$] und dem Bekanntheitsgrad,

$$S(t) = \dot{X}(t) = \gamma \cdot (\bar{X} - X(t)) \cdot X(t), \qquad (7)$$

wobei man γ als vom Preis (und evt. dem Haushaltsbudget, dem Image bzw. Goodwill des Herstellers) abhängig sehen muß. Das *Gompertz-Modell* verwendet eine Zeitfunktion, die das ‚fade away' beschreibt und implizit das Sättigungsniveau enthält,

$$S(t) = \dot{X}(t) = \gamma \cdot c^t \, X(t) \tag{8}$$

mit $c \in (0, 1)$.

Bass [1] unterscheidet zwei Gruppen von Nachfragern mit verschiedenem Kaufverhalten. Während die Nachfrage der *Innovatoren* als proportional zum noch nicht ausgenutzten Marktpotential $[\bar{X} - X(t)]$ angenommen wird, ist die der *Imitatoren* zusätzlich proportional zum Bekanntheitsgrad, d. h. bisheriger Absatz, wie (7),

$$S(t) = \dot{X}(t) = \alpha \cdot (\bar{X} - X(t)) + \beta \cdot (\bar{X} - X(t)) \cdot \frac{X(t)}{\bar{X}} \tag{9}$$

Dabei ist $\alpha \in [0, 1]$ die produktspezifische Innovationsrate, $\beta \in [0, 1]$ die Imitationsrate und wie in (7) und (8) $X(t)$ der Gesamtabsatz bis zur Zeit t, $\bar{X}$ Sättigungsgrenze, $S(t) = \dot{X}(t)$ Absatzgeschwindigkeit.

Bei Einbeziehung preispolitischer Aktionen wird man die Parameter α, β und $\bar{X}$ als Funktionen des Preises p annehmen, [10, S. 127]; die ‚Prozeßgeschwindigkeiten' $\alpha(p)$ und $\beta(p)$ werden monoton mit p fallen, oft empfiehlt sich $\alpha = \text{constant}$ und $\beta(p)$ als linear in p anzunehmen. Bezieht man alle Größen auf die Sättigungsgrenze,

$$x(t) := X(t)/\bar{X}, \tag{10}$$

so transformiert sich (9) folglich in

$$\dot{x}(t) = \alpha \cdot (1 - x(t)) + \beta(p(t)) \cdot (1 - x(t)) \cdot x(t) \tag{11}$$

mit z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} \beta : & p \to \beta^0 - (\beta^0/p_m) \cdot p, \\ \beta^0 & \text{Konstante,} \\ p_m & \text{Prohibitivpreis} \end{array}\right\} \tag{12}$$

Zentral bleibt folglich ein echtes dynamisches Optimierungsproblem für die Preispolitik; Werbemaßnahmen sind eher begleitend und in ihrer Ausrichtung von der Preispolitik abhängig (Beispiel: ‚Qualität kostet ihren Preis' oder ‚Sonderangebot'). Unser Ziel ist es, die optimalen dynamischen Preise für diese Absatzmodelle zu bestimmen. Hierbei werden wir die betriebswirtschaftlichen Preisstrategien der Penetration- und Skimmingpolitik [10], [12] mathematisch begründen.

2. Optimale Preispolitik und die dynamische Version der Formel von Robinson-Amoroso

Bei den letzten nach ökonometrischen Messungen [3] aufgestellten Nachfragerelationen ist die relative Absatzgeschwindigkeit $\dot{x}(t) = \dot{X}(t)/\overline{X}$ eine Funktion N,

$$\dot{x}(t) = N(x(t), p(t)); \; N : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+; \; N \in \mathscr{C}_1, \tag{13}$$

des bis zur Zeit t getätigten (relativen) Gesamtabsatzes $x(t)$ und des gegenwärtigen Preises $p(t)$. Mit der Anfangsbedingung

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \text{ bzw. } x(0) = x_a > 0 \text{ falls } N(0, p) = 0, \text{ was} \\ \text{z. B. beim Fehlen von Innovatoren in (11) der Fall} \\ \text{ist,} \end{array}\right\} \tag{14}$$

für den Zeitpunkt $t = 0$ der Markteinführung des Produktes ist der *Lebenszyklus* [1], [3], [9], [10], [12] für eine vorgegebene Preispolitik festgelegt. Gegeben ist nun ein Planungshorizont $t_e > 0$, für den eine Preispolitik

$$\left.\begin{array}{ll} p : [0, t_e] \to \mathbf{R}_+ & \text{stückweis-stetig,} \\ p(t) \in [0, p_m]; & p_m \text{ Prohibitivpreis,} \end{array}\right\} \tag{15}$$

gesucht ist, die den diskontierten Gesamtkalkulationsgewinn

$$\left.\begin{array}{ll} \int_0^{t_e} d(t) \cdot (p(t)\, \dot{x}(t) - c(\dot{x}(t)))\, dt, & \\ d : [0, t_e] \to \mathbf{R}_+ & \text{Diskontierfunktion} \in \mathscr{C}_0 \\ c : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, & \text{Kostenfunktion} \in \mathscr{C}_1 \end{array}\right\} \tag{16}$$

unter Erfüllung von (13) und (14) maximiert[3].

Das Optimierungsproblem, (16) unter den Nebenbedingungen (13), (14), (15) zu maximieren, ist ein kontinuierliches Kontrollproblem mit fester Endzeit, wobei der Absatz $x(t)$ Zustandsvariable und der Preis $p(t)$ die Steuervariable bildet. Eine Lösungsmöglichkeit bietet

---

[3] In K. Spremann [Eine dynamische Version der Formel von Amoroso-Robinson, in: R. Henn, H. P. Künzi, H. Schubert (eds.), Operations-Research-Verfahren, 1975] ist dieses Optimierungsproblem auch für freien Zeithorizont und verschiedene Zielfunktionen (z. B. Problem der schnellsten Amortisation der Fixkosten, Rentabilität des zeitlichen Aufwandes usw.) behandelt. Außerdem wird dort der optimale Aufwand für Werbung und die Relevanz der Dorfman-Steiner-Regel im dynamischen Fall untersucht.

das Maximumprinzip von Pontrjagin [11], das eine notwendige Bedingung für die Optimalität einer Steuerung angibt. In der hier benötigten Form (für stückweis-stetige Steuerungen) ist es in [14] bewiesen; eine allgemeinere Bedingung, die auch Beschränkungen für die Zustandsvariablen einschließt, ist z. B. in [2] formuliert und bewiesen.

Satz: (Maximumprinzip). *Für das dynamische Optimierungsproblem* „maximiere das Zielfunktional

$$\int_0^{t_e} G(x(t), u(t))\, dt$$

unter den Nebenbedingungen

$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t))$	(Differentialgleichung),
$x(0) = x_a$	(Anfangsbedingung),
$u(t) \in SB(t)$	(Steuerbereich),
u	stückweis-stetig,

wobei

$$u : [0, t_e] \to \mathbf{R}^m,$$
$$x : [0, t_e] \to \mathbf{R}^n,$$
$$G : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R},$$
$$F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n,$$
$$SB(t) \subset \mathbf{R}^m,$$

zu jeder stückweis-stetigen ‚Steuerung' u gebe es eine (verallgemeinerte, fast überall differenzierbare) Lösung x der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung, die ‚zugehörige' Zustandsvariable; G, F partiell nach dem ersten Argument einmal stetig differenzierbar"

sei $\bar{u}$ optimal, $\bar{x}$ die zugehörige Zustandsvariable. Dann gibt es eine ‚Kovariable' $\bar{\lambda} : [0, t_e] \to \mathbf{R}^n$ so, daß mit der durch

$$H(\lambda, x, u)(t) := G(x(t), u(t)) + \lambda(t)^T F(x(t), u(t))$$

definierten ‚Hamilton-Funktion'

$$H(\bar{\lambda}, \bar{x}, u)(t) \leqq H(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{u})(t)$$

für alle u mit $u(t) \in SB(t)$ und für fast alle $t \in [0, t_e]$ gilt.

Als Kovariable bezeichnet man dabei jede Lösung im verallgemeinerten Sinn von

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))^T \lambda(t),$$

$\lambda(t_e) = 0$ (Die Zustandsvariable ist zum Endzeitpunkt frei).

Mit diesem Maximumprinzip hat man also ein Tripel von Bedingungen (Prozeßdifferentialgleichung, Kovariablengleichung und Maximalität der Hamiltonfunktion), das (Existenz einer optimalen Steuerung $\bar{u}$ vorausgesetzt) lösbar ist und dessen Lösungsmenge das optimale Tripel $(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{u})$ enthält.

Die Anwendung des Maximumprinzips auf unser Optimierungsproblem für die Preispolitik liefert die (bezüglich $p(t) \in [0, p_m]$ zu maximierende) Hamiltonfunktion

$$\left.\begin{aligned} H(\bar{\lambda}, \bar{x}, p)(t) = {} & d(t)\, p(t)\, N(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) \\ & - d(t)\, c(N(\bar{x}(t), \bar{p}(t))) + \\ & + \bar{\lambda}(t)\, N(\bar{x}(t), p(t)) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und die Kovariablengleichung

$$\left.\begin{aligned} & \dot{\lambda}(t) = -(d(t)\,\bar{p}(t) - d(t)\, c_g(t) + \lambda(t)) \frac{\partial N}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)), \\ & \lambda(t_e) = 0, \\ & \text{wobei } c_g(t) := c'(N(\bar{x}(t), \bar{p}(t))) = \text{Grenzkosten}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Notwendig dafür, daß die Hamiltonfuktion bezüglich p für (fast) alle $t \in [0, t_e]$ ein Maximum annimmt, ist wegen der Differenzierbarkeitsbedingung $N \in \mathscr{C}_1$ und weil der Rand des Steuerbereiches $p(t) \notin \{0, p_m\}$ ausgeschlossen werden kann,

$$\left.\begin{aligned} & \bar{p} : t \to \bar{p}(t) \text{ ist optimal} \succ \frac{\partial H}{\partial p}(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{p})(t) = 0 \\ & \text{für fast alle } t \in [0, t_e]; \\ & \text{also} \\ & (d(t)\,\bar{p}(t) - d(t)\, c_g(t) + \bar{\lambda}(t)) \frac{\partial N}{\partial p}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)) = \\ & = -d(t)\, N(\bar{x}(t), \bar{p}(t)). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Bezeichnen wir mit $\eta(t)$ die Elastizität der augenblicklichen Nachfrage bezüglich des Preises,

$$\eta(t) := \frac{\partial N(\bar{x}(t), \bar{p}(t))}{\partial \bar{p}(t)} \Big/ \frac{N(\bar{x}(t), \bar{p}(t))}{\bar{p}(t)} \qquad (20)$$

und kürzen wir

$$\sigma(t) := -\bar{\lambda}(t)/d(t) \qquad (21)$$

ab, können wir die notwendige Bedingung (21) für die Optimalität einer Preispolitik $\bar{p}$ in der Form (22) oder (23) schreiben. Bewiesen ist also:

Satz: (über optimale Preispolitik): p *maximiert* (16) *unter* den Nebenbedingungen (13), (14), (15) $\Rightarrow$

$$\frac{\bar{p}(t) - c_g(t) - \sigma(t)}{\bar{p}(t)} = \frac{1}{\eta(t)} \qquad (22)$$

für f. a. t;

(in Analogie zur Formel für den statischen Fall $(\bar{p} - c_g)/\bar{p} = 1/\eta$);
bzw. in der zu (22) äquivalenten Form

$$\bar{p}(t) = (c_g(t) + \sigma(t)) \cdot \frac{\eta(t)}{\eta(t) - 1} \qquad (23)$$

für f. a. t

in Analogie zur Formel $\bar{p} = c_g \cdot \eta/(\eta - 1)$ von Robinson-Amoroso für den statischen Fall!

Während also im statischen Fall der gewinnmaximierende Preis $\bar{p}$ Produkt des Elastizitätenausdrucks $\eta/(\eta - 1)$ und der Grenzkosten c_g ist, kalkuliert sich der jeweilige Preis $\bar{p}(t)$ einer gewinnmaximierenden Preispolitik als Produkt des jeweiligen Elastizitätenausdrucks $\eta(t)/(\eta(t) - 1)$ und der *Summe aus jeweiligen Grenzkosten und dem Wert* σ *(t) einer sich aus* (18) *und* (21) *berechnenden,* also die ‚relevanten Informationen über die Dynamik von Gewinn- und Nachfragefunktion tragenden' *Dualvariablen* σ.

3. Zur ökonomischen Bedeutung der Dualvariablen[4]

Eine Deutung von $\sigma(t) = -\bar{\lambda}(t)/d(t)$ ergibt sich aus der folgenden Betrachtungsweise. In der Robinson-Amoroso-Formel ergibt sich der ‚ökonomische Wert des Produktes', d. h. der Preis $\bar{p}$ aus dem

[4] Herrn Prof. Dr. H. Göppl, Karlsruhe, danke ich für seine konstruktiven Hinweise.

‚physischen Wert' (Herstellungskosten, c_g bzw. c_s) multipliziert mit einem Faktor $\eta/(\eta-1)$, der sich aus der Nachfragesituation ergibt. Wir interpretieren nun σ als *Goodwill, der sich aufgrund von Kenntnis der Dynamik der Nachfrageentwicklung, dem Plan, die Preise optimal festzusetzen und in Abhängigkeit vom Planungshorizont bildet.* Mit dieser Interpretation von $\sigma(t)$ als Goodwill zur Zeit t (und $\lambda(t)$ als diskontierter Goodwill, vom Vorzeichen abgesehen) ergibt sich aus der dynamischen Version (23) der Formel von Robinson-Amoroso der ‚ökonomische Wert' $\bar{p}(t)$ des Produktes zur Zeit t aus der Summe von ‚physischem Wert' $c_g(t)$ und Goodwill $\sigma(t)$, multipliziert mit dem Faktor $\eta(t)/(\eta(t)-1)$, der sich aus der *gegenwärtigen* Nachfragesituation ergibt. Wie aber baut sich der Goodwill $\sigma(t) = -\bar{\lambda}(t)/d(t)$ auf, wie verändert er sich? Dies wird aus (18) klar. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den undiskontierten Fall $d(t) \equiv 1$; dann lautet (18):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= (\bar{p}(t) - c_g(t) - \sigma(t)) \cdot \frac{\partial N}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{p}(t)), \\ \sigma(t_e) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Wegen (22) gilt $(\bar{p}(t) - c_g(t) - \sigma(t)) = \bar{p}(t)/\eta(t) \geqq 0$, da $\eta(t) \in (0,\infty)$ und $\bar{p}(t) \in [0, p_m]$, folglich $\operatorname{sign}(\dot{\sigma}(t)) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$.

Wenn also zusätzlicher Absatz die weitere Nachfrage

(i) *fördert,* $\partial N/\partial x > 0$, nimmt der Goodwill zu; und zwar um so stärker, je höher der Preis festgesetzt ist; diese Situation läßt auf ‚Qualität' des Produktes schließen;

(ii) *verringert,* $\partial N/\partial x < 0$, nimmt der Goodwill ab; und zwar um so stärker, je höher der Preis festgesetzt ist; diese Situation wird als ‚Ausnutzen' und ‚Gewinnschöpfung' gesehen.

Beim *logistischen Ansatz* (7) liegt solange die Situation (i) vor, bis der Absatz die Hälfte der Sättigungsgrenze erreicht hat, $X(t) = \bar{X}/2$ bzw. $x(t) = 1/2$, $\partial N/\partial X = \gamma \cdot (\bar{X} - 2X(t))$; danach liegt die Situation (ii) vor. Der Goodwill wird (sofern der Planungshorizont t_e etwa der Dauer des Lebenszyklus entspricht) folglich zuerst aufgebaut, nach der ‚Tendenzwende' bis $\sigma(t_e) = 0$ abgebaut. Beim *Gompertzmodell* (8) liegt immer die Situation (i) vor, wobei $\lim \partial N/\partial X = 0$ für $t \to \infty$. Ein anfangs positiver Goodwill $\sigma(0) > 0$ wird ständig abgebaut. Bei einer Nachfragerelation, die auf die *Verhaltensgleichung von Bass* (11) auf-baut, kommt es auf die Prozeßgeschwindigkeiten α und β an, $\partial N/\partial x = -\alpha+\beta\,(\bar{p}\,(t))\,(1-2x\,(t))$. Spätestens nach Erreichen des halben potentiellen Absatzes liegt die Situation (ii) des Abbaues des Goodwills vor; davor kann der Fall (i) gegeben sein (wenn z. B. $\beta\,(p\,(t)) > \alpha$ bei an Imitatoren orientierten Produkten); andernfalls liegt immer (ii) vor (wenn z. B. $\alpha > \beta\,(p\,(t))$ bei an Innovatoren orientierten Produkten). Bei den in der Betriebswirtschaft bewährten dynamischen Nachfragerelationen ergeben sich somit vier qualitativ zu unterscheidende Entwicklungen von Goodwill und damit von den optimalen Preisen, je nachdem sich das Produkt ausschließlich oder überwiegend an Innovatoren oder Imitatoren wendet:

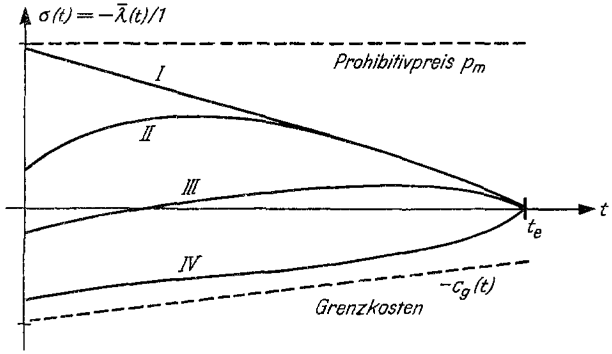

Abb. 1

Das Produkt wendet sich im Planungszeitraum $[0, t_e]$

I. *an Innovatoren;*

während des ganzen Planungszeitraumes liegt (ii) $\partial N/\partial x < 0$ vor; der anfangs positive Goodwill $\sigma\,(0) > 0$ wird stetig abgebaut bis $\sigma\,(t_e) = 0$; die optimalen Preise $\bar{p}\,(t)$ liegen wegen $\sigma\,(t) > 0$ für $t \in [0, t_e)$ immer über dem Niveau $\bar{p} = c_g \cdot \eta/(\eta-1)$ bei statischer Kalkulation und fallen ständig;

II. *hauptsächlich an Innovatoren;*

während des Planungszeitraumes liegt für ‚kurze' Zeit anfangs (i) $\partial N/\partial x > 0$ vor (z. B. in (11), wenn $\beta\,(p\,(t))$ ‚etwas' größer als α ist), danach immer (ii) $\partial N/\partial x < 0$; der Goodwill ist auch noch anfangs positiv, $\sigma\,(0) > 0$, wird etwas vergrößert und dann stetig bis $\sigma\,(t_e) = 0$ abgebaut; die optimalen Preise steigen etwas und fallen dann, liegen aber immer über dem statischen Niveau;

III. *hauptsächlich an Imitatoren;*

während des Planungszeitraumes liegt für ‚längere' Zeit anfangs (i) vor (z. B. in (11), wenn $\beta\,(\bar{p}\,(t))$ ‚erheblich' größer als α ist), danach der Abbau des Goodwills (ii); der Goodwill ist anfangs negativ, $\sigma\,(0) < 0$, wird aufgebaut und dann bis $\sigma\,(t_e) = 0$ abgebaut; die optimalen Preise liegen anfangs unter dem statischen Niveau bei steigender Tendenz, dann darüber bei fallender Tendenz;

IV. *an Imitatoren;*

während des ganzen Planungszeitraumes liegt (i) vor, (z. B. in (11), wenn $\beta\,(p\,(t))$ ‚erheblich' größer als α und t_e klein gegenüber der Dauer des Lebenszyklus ist); der Goodwill ist negativ und wird bis $\sigma\,(t_e) = 0$ aufgebaut; die optimalen Preise liegen immer unter dem statischen Niveau bei steigender Tendenz.

Damit ist auch geklärt, unter welchen Bedingungen die Hochpreis-(Skimming-)Politik bzw. die Niedrigpreis-(Penetration-)Strategie zu verfolgen ist[5].

Zur Wahl des Planungshorizontes ist aber noch einiges zu bemerken: wenn er nicht durch Rechenschaftsberichtstermine vorgegeben, sondern frei wählbar ist, ergeben sich Hinweise auf ein Turnpike-Theorem: eine Nachfragerelation kann, falls t_e groß genug ist, auf einen Goodwillverlauf II (also auf die Skimmingpolitik) führen; bei zu kleinem Planungshorizont t_e jedoch kann sich IV und die Penetrationpolitik ergeben. Liegt die Nachfragefunktion N fest, kann man für verschiedene t_e die optimale Preispolitik und so den maximalen Gewinn $G\,(t_e)$ berechnen. Nun kann man zusätzlich Kosten $K\,(t_e)$ in Abhängigkeit von der Verkaufsdauer t_e annehmen und $\bar{t}_e$ so bestimmen, daß $G\,(t_e) - K\,(t_e)$ maximiert wird. So erhält man außerdem Hinweise für den optimalen Ablösezeitpunkt eines Produktes durch ein neues.

Um *exakte quantitative Aussagen* zu erhalten, muß man immer das *Randwertproblem* (13), (14), (18) für die Variable $(x, \lambda) : [0, t_e] \to \mathbf{R}^2$ deren erste Komponente den Lebenszyklus und deren zweite den dis-

[5] Es ist auch noch eine zweite Interpretation von $\sigma(t)$ möglich. Nehmen wir an, der „decision-maker" entscheide sich zum Zeitpunkt t für die Preissetzung, die sich aus der Formel für den statischen Fall ergibt. Durch den Verzicht auf die optimale (Lösung des dynamischen Optimierungsproblems) Festsetzung des Preises erwachsen ihm Opportunitätskosten. Diese haben gerade die Höhe $\sigma(t)$ multipliziert mit dem Elastizitätenausdruck.

kontierten Goodwill bildet, lösen. Der Preis wird mit (23) eliminiert. Zusammengefaßt:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Gegeben sind } \begin{array}{ll} N & \text{Nachfragefunktion,} \\ c & \text{Kostenfunktion,} \\ d & \text{Diskontierfunktion,} \\ t_e & \text{Planungsdauer} \\ x_a & \text{relativer Startabsatz} \end{array} \\
\text{und damit das Randwertproblem für} \\
(x, \lambda) : [0, t_e] \rightarrow \mathbf{R}^2, \text{ mit} \\
x(0) = x_a, \qquad\qquad x(t_e) \text{ beliebig,} \\
\lambda(0) \text{ beliebig,} \qquad\qquad \lambda(t_e) = 0, \\
\dot{x}(t) = N(x(t), \bar{p}(t)) \\
\dot{\lambda}(t) = -(d(t)\,\bar{p}(t) - d(t)\,c_g(t) + \lambda(t)) \frac{\partial N}{\partial x}(x(t), \bar{p}(t)), \\
\text{wobei } c_g(t) := c'(N(x(t), p(t)) = \text{Grenzkosten und} \\
\bar{p}(t) \text{ sich aus (23) bestimmt.}
\end{array}\right\} \quad (25)$$

Mit der Lösung $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ erhält man die optimale Preispolitik $\bar{p}$. Wohl das leistungsfähigste Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die *Mehrzielmethode* (Mehrfachschießverfahren, multiple shooting method); vgl. J. Stoer und R. Bulirsch, Einführung in die Numerische Mathematik II, Heidelberger TB *114*, Springer 1973, S. 151 ff. Da unser Problem sehr klein ist (dim = 2) und die verlangte Genauigkeit nicht zu groß ist, führen jedoch auch die anderen Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben schnell zu einer brauchbaren Lösung. Wir nennen das *Einfachschießverfahren* (Lösung eines Anfangswertproblems und iterative Verbesserung der Erfüllung der anderen Randbedingung mit z. B. einem Bisektionsverfahren), *Differenzverfahren* (Ersetzung der Differentialquotienten in der Differentialgleichung durch geeignete Differenzenquotienten und Lösung der resultierenden diskretisierten Gleichungen) und *Variationsmethoden* (Galerkins Prozedur und Iteration mit Newton-Raphson oder Iteration aus den beiden Schritten Quasilinearisierung und Galerkins Prozedur). Über *numerische Ergebnisse* sowie *Stabilitäts-* und *Sensitivitätsuntersuchungen* soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

4. Ökonomische Anwendung der Ergebnisse

Als erstes Ergebnis dieser Arbeit muß die Aufstellung und Herleitung der dynamischen Version (22) der Formel von Robinson-

Amoroso gesehen werden, die formal durch Indizierung aller Größen mit der Zeit t und Hinzufügen des Goodwills $\sigma(t)$ aus der statischen Formel entsteht. Der diskontierte Goodwill $d(t)\,\sigma(t)$ ist die Dualvariable des dynamischen Optimierungsproblems der Maximierung des diskontierten Gewinnes unter der dynamischen Nachfragerelation als Nebenbedingung. Der Goodwill resultiert aus der Kenntnis der Dynamik der Nachfrageentwicklung und der Wahl des Planungshorizontes t_e.

Das zweite Ergebnis bringt eine *Verbesserung in der Prognose als Entscheidungshilfe für Planung und Preisstrategie, Produktdifferenzierung und Ausrichtung von Werbemaßnahmen.* Während es bisher üblich war, aufgrund von Markttests die Koeffizienten der dynamischen Nachfragerelationen zu bestimmen und unter Vernachlässigung von genauen Preisstrategien den Verlauf des Lebenszyklus zu berechnen und evt. die Preise mit der statischen Formel aufgrund der jeweiligen Nachfragesituation zu ermitteln, ist es nun möglich, für den gewählten Planungshorizont die optimale Preispolitik zu bestimmen und damit den *gewinnmaximierenden Lebenszyklus* zu erhalten. Da diese Berechnungen auf dem anfänglichen Informationsstand ($t=0$) beruhen, später aber i. a. Störungen und Abweichungen auftreten, haben die gewonnenen quantitativen Aussagen wenigstens qualitative Aussagekraft bzw. der Größenordnung nach Gültigkeit. Auch ergeben sich Hinweise auf den *zweckmäßigsten Planungshorizont.* Wenn im Laufe der Zeit, z. B. bei $t=t_c$, mehr Information über die Absatzentwicklung, über die Herstellungskosten usw. vorliegt, kann die Planung der Preise korrigiert werden. Dazu werden N, c, d der Realität besser angepaßt und das Randwertproblem (25) für $t \in [t_c, t_e]$ mit $x(t_c)$ als Anfangsbedingung für x erneut gelöst. Zur Illustration seien abschließend *zwei Beispiele* geschildert:

Der Vorstand einer Unternehmung beabsichtigt, mit Taschenfeuerzeugen, die nach einem neuartigen elektronischen Prinzip zünden, auf den Markt zu kommen. Die Heterogenität dieser innovativen Produktart ermöglicht eine von den Aktionen anderer Feuerzeugherssteller unabhängige Preispolitik. Die Verhaltensgleichung nach Bass beschreibt die erwartete Nachfrage. Als Planungshorizont wählt der Produzent $t_e=5$ Jahre. Aus Tests ermitteln sich die voraussichtlichen Prozeßgeschwindigkeiten α und β, die auf einen Verlauf I des Goodwills führen. Folglich eröffnet der Produzent sein Angebot mit einer teuren, silbernen Version, später, zum Zeitpunkt der optimalen Preisherabsetzung, stellt er dieser eine billige aus Kunststoff zu Seite.

Ein Verleger plant die Herausgabe eines Lexikons. Durch den Verlauf der Kostenfuktion c (hohe Fixkosten, geringe variable Stückkosten) ergibt sich ein Goodwillverlauf III. So bietet er zunächst ein preisgünstiges, kartoniertes Vorauslexikon an, später folgt die ledergebundene, erweiterte Ausgabe mit Subscriptionspreis.

Literatur

[1] F. M. Bass: A New Product Growth for Model Consumer Durables, Management Science, Vol. 15, No. 5 (1969), pp. 215—227.

[2] R. F. Baum und L. Cesari: On A Recent Proof of Pontryagin's Necessary Conditions, SIAM J. Control, Vol. 10, No. 1 (1972), pp. 56—75.

[3] K. Brockhoff: A Test for the Product Life Cycle, Econometrica, Vol. 35, No. 3-4 (1967), pp. 472—484.

[4] R. Dorfman und P. O. Steiner: Optimal Advertising and Optimal Quality, American Economic Review *44* (1954), pp. 826—836.

[5] G. H. Haines, Jr.: A Theory of Market Behavior after Innovation. Management Science, Vol. 10, No. 4 (1964), pp. 634—658.

[6] E. Heuss: Das Oligopol. WiSt (1972), Heft 2, S. 53—61.

[7] P. Mertens: Prognoserechnung, Würzburg 1973, S. 193 ff.

[8] M. Nerlove und K. J. Arrow: Optimal Advertising Policy Under Dynamic Conditions. Economica (May 1962), pp. 129—142.

[9] O. Opitz: On the Problem of Life Cycle. Karlsruher Seminar on Production Theory, Springer, Lecture Notes 1974.

[10] O. Opitz: Marketing II. Scriptum des Instituts für Entscheidungstheorie und Unternehmensforschung der Universität Karlsruhe 1973/74, S. 40—51, 115—129.

[11] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskii, R. V. Gamkrelidze und E. F. Mischenko: Mathematische Theorie optimaler Prozesse; Oldenbourg 1967.

[12] H. Sabel: Zur Preispolitik bei neuen Produkten; in H. Koch: Zur Theorie des Absatzes, Wiesbaden 1973.

[13] S. P. Sethi: Optimal Control of the Vidale-Wolfe Advertising Model, Operations Research *21* (1973), pp. 998—1013.

[14] K. Spremann: Optimierung verschiedener Steuerungsprobleme mit einem funktionalanalytischen Maximumprinzip, ZAMM *54* (1974) 6, S. 293—302.

[15] M. L. Vidale und H. B. Wolfe: An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising, Operations Research 5 (1957), pp. 370—381.

Anschrift des Verfassers: Ass. Dr. Klaus Spremann, Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research der Universität Karlsruhe, Kollegium am Schloß, Bau IV, D-7500 Karlsruhe 1, Bundesrepublik Deutschland.