Zur Theorie der linearen Integralgleichungen.

Von

T. Carleman in Upsala.

Wenn der Kern einer Fredholmschen Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

auf der Diagonale $y = x$ streckenweise unendlich wird, so verlieren die in den Koeffizienten der Reihen $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)$ auftretenden Integrale ihren Sinn. In seiner grundlegenden Arbeit hat Fredholm gezeigt, daß für eine sehr umfassende Klasse (L) derartiger Integralgleichungen (nämlich solcher, für welche ein iterierter Kern $K^{(\nu)}(x, y)$ existiert, der eine beschränkte Funktion von x und y ist) dieselben Gesetze gelten wie für Integralgleichungen mit stetigen Kernen[1]. Hilbert betrachtete (Gött. Nachrichten 1904) statt der Reihen $D(\lambda)$ und $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right)$ die folgenden

$$(1) \qquad D^*(\lambda) = \sum \delta_n \lambda^n = \sum \frac{(-\lambda)^n}{|n} \int\int\dots\int \begin{vmatrix} 0 & K(s_1, s_2) \dots & K(s_1 s_n) \\ K(s_2, s_1) & 0 \quad \dots & K(s_2 s_n) \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ K(s_n, s_1) & \dots & 0 \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n.$$

$$D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \sum \delta_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda^n = \sum \frac{(-\lambda)^n}{|n} \int\int\dots\int \begin{vmatrix} K(x, y), & K(x, s_1) & \dots K(x, s_n) \\ K(s_1, y), & 0 & \dots K(s_1, s_n) \\ \dots\dots & & \dots\dots \\ K(s_n, y), & K(s_n, s_1) \dots & 0 \end{vmatrix} ds_1 \dots$$

---

[1]) Hiermit ist aber die Gesamtheit derjenigen Kerne, für welche diese Gesetze gelten, nicht erschöpft, wie das Beispiel

$$K(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{\log^2 n} \qquad \left(0 < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \leq \pi\right)$$

lehrt. Man sieht sofort, daß $K(x, y)$ der Klasse L nicht angehört, weil ja der Konvergenzexponent der zu einem solchen Kerne gehörigen Eigenwerte endlich sein muß.

Er hat durch direkte Abschätzung der Koeffizienten bewiesen, daß diese Reihen beständig konvergieren, wenn $K(x, y)$ auf der Diagonale $x = y$ von niederer als der der $\frac{1}{2}$ten Ordnung unendlich wird, d. h. wenn es einen gewissen unterhalb $\frac{1}{2}$ liegenden Exponenten α gibt, so daß das Produkt

$$|x-y|^{\alpha} K(x, y)$$

endlich bleibt. Für δ_n z. B. ergab sich die Ungleichung

$$(3) \qquad |\delta_n| < \frac{c^n}{n^{n(\frac{1}{2}-\alpha)}} \qquad (c \text{ konstant}).$$

Im folgenden wird gezeigt, daß diese Reihen auch dann beständig konvergieren, wenn man nur voraussetzt, daß

$$(4) \qquad \int\int |K(x, y)|^2 \, dx \, dy$$

(im Sinne von Lesbesgue) konvergiert[2]). Ferner ergibt sich, daß die Ungleichung (3) durch die schärfere

$$|\delta_n| < \frac{c^n}{n^{\frac{n}{2}}}$$

ersetzt werden kann. Die Ordnung der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ ist somit $\leqq 2$.

Mit Hilfe dieser Funktionen wird ferner gezeigt, daß die Fredholmschen Sätze auch ferner für solche Integralgleichungen

$$(5) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

gelten, wo $|K(s, t)|^2$ und $|f(s)|^2$ summierbare Funktionen sind[3]). Schließlich wird eine Formel betreffend den Fredholmschen Nenner einer Summe von zwei Kernen bewiesen. Aus dieser Formel ergibt sich die Folgerung, daß das Geschlecht (Höhe) von $D^*(\lambda)$ höchstens gleich Eins sein kann.

§ 1.

In diesem Paragraphen suchen wir obere Grenzen der absoluten Beträge von $D^*(\lambda)$ und $D^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ unter der Annahme, daß $K(x, y)$ stetig ist und der Nebenbedingung

[2]) Vgl. hierzu H. von Koch, Sur la convergence de determinants infinis, Rend. del circ. mat. di Palermo, 28 (1909), S. 255–266 insb. S. 264.

[3]) Es ist klar, daß dieses Resultat durch viele andere Methoden abgeleitet werden kann. Das hier angewandte Verfahren beweist die Existenz einer quadratisch integrierbaren Resolventen, die als Quotient der Funktionen (2) und (1) dargestellt werden kann. Vgl. auch Lesbesgue, Bull. de la Soc. mathematique de France 36 (1908), S. 3–19.

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \, dx \, dy \leqq \Omega \qquad (\Omega \text{ konstant}) \tag{7}$$

genügt. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir hier annehmen, daß $K(x, y)$ in bezug auf x oder y eine stetige Ableitung besitzt oder sogar ein Polynom ist, weil es immer eine Polynomfolge $P_1(x, y)$, $P_2(x, y), \ldots, P_n(x, y) \ldots$ gibt, so daß gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} P_n(x, y) = K(x, y) \tag{8}$$

und weil ferner

$$\lim_{n=\infty} D^*_{P_n}(\lambda) = D^*_K(\lambda)\,^{4)}.$$

Es sei nun $K_1(x, y)$ der durch die Festsetzungen

$$K_1(x, y) = K(x, y) \qquad (x \neq y)$$

$$K_1(x, x) = 0$$

definierte Kern. Dann gilt

$$D^*_K(\lambda) = D_{K_1}(\lambda).$$

Weil ferner

$$K_1^{(m)}(x, y) = K^{(m)}(x, y) \qquad (m \geqq 2), \tag{9}$$

so folgt aus der Formel

$$\log D^*_K(\lambda) = \log D_{K_1}(\lambda) = -\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu} \int_a^b K_1^{(\nu)}(s, s) \, ds$$

$$= -\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu} \int_a^b K^{(\nu)}(s, s) \, ds = \lambda \int_a^b K(s, s) \, ds + \log D_K(\lambda)$$

$$D^*_K(\lambda) = e^{\lambda \int_a^b K(s, s)\, ds} D_K(\lambda). \tag{10}$$

Wenn $K(x, y)$ eine stetige Ableitung in bezug auf x oder y besitzt, so ist $D_K(\lambda)$ vom Geschlecht Null und folglich gilt

$$D_K(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right); \qquad \int_a^b K(s, s) \, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ die Nullstellen von $D(\lambda)$ sind. Somit

$$D^*_K(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}.$$

---

4) Wenn es nötig ist hervorzuheben, daß $D(\lambda)$ und $D^*(\lambda)$ mit dem Kern $K(x, y)$ gebildet sind, schreiben wir $D_K(\lambda)$ bzw. $D^*_K(\lambda)$.

Hieraus ergibt sich, indem wir den reellen Teil von $\frac{\lambda}{\lambda_\nu}$ mit $\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]$ bezeichnen,

$$|D_K^*(\lambda)|^2 = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - 2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right] + \left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right|^2\right) e^{2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]}$$

$$\leqq \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{-2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right] + \left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right|^2 + 2\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right]} = e^{|\lambda|^2 \sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}}.$$

Weil nach einem Resultate von I. Schur[5])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leqq \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt \leqq \Omega,$$

so ergibt sich hieraus schließlich

$$|D^*(\lambda)| \leqq e^{\frac{\Omega}{2}|\lambda|^2} \tag{11}$$

Dies ist, wie das folgende Beispiel lehrt, die genaue obere Grenze von $|D^*(\lambda)|$ bei der Nebenbedingung (7). Schreibt man

$$G_m(x,y) = e^{i\Theta}\sqrt{\frac{\Omega}{2m}}\left\{\sum_{\nu=1}^{m} \varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y) - \sum_{\nu=m+1}^{2m} \varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)\right\},$$

wo $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ein unendliches normiertes Orthogonalsystem in bezug auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ ist, so wird, wenn wir zur Abkürzung $H = e^{i\Theta}\sqrt{\frac{\Omega}{2m}}$ setzen,

$$D_{G_m}^*(\lambda) = (1 - \lambda H)^m e^{m\lambda H}(1 + \lambda H)^m e^{-m\lambda H}$$

$$= (1 - \lambda^2 H^2)^m = \left(1 - \lambda^2 e^{2i\Theta}\frac{\Omega}{2m}\right)^m.$$

Hieraus ergibt sich, indem wir

$$\lambda = e^{i\varphi}|\lambda|, \qquad \theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

setzen,

$$D_{G_m}^*(\lambda) = \left(1 + |\lambda|^2\frac{\Omega}{2m}\right)^m.$$

Folglich ist

$$\lim_{m=\infty} |D_{G_m}^*(\lambda)| = e^{\frac{\Omega}{2}|\lambda|^2},$$

woraus die Behauptung folgt.

[5]) Vgl. I. Schur, Über die charakteristischen Wurzeln einer inneren Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Ann., **66** (1909), S. 488, insb. S. 508.

Für die Koeffizienten

$$\delta_n = \frac{1}{\underline{|n}} \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & K(s_1, s_2), & \ldots, & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1), & 0 & , \ldots, & K(s_2, s_n) \\ \cdots\cdots & & & \cdots\cdots \\ K(s_n, s_1), & K(s_n, s_2), & \ldots, & 0 \end{vmatrix} ds_1\, ds_2\, ds_n$$

ergibt sich aus (11)

$$(12) \qquad |\delta_n| \leqq \frac{(\sqrt{e}\,\Omega)^n}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

Dies ist aber nicht die genaue obere Grenze von $|\delta_n|$, wie man leicht im Falle $n = 2$ und $n = 3$ findet.

Das Problem, das Maximum von $|D^*(\lambda)|$ und δ_n zu finden, läßt sich mit den gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung behandeln. Ich hoffe, auf diese Frage in einer anderen Arbeit zurückzukommen.

Wir gehen nun dazu über, $D^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)$ abzuschätzen und betrachten dabei zunächst reelle symmetrische Kerne $K(x, y)$. Es ist, indem wir unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ die Eigenwerte und unter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen verstehen,

$$D^*\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right) = D^*(\lambda)\left(K(x, y) + \lambda \sum_n{}' \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}\right)$$

$$= D^*(\lambda) K(x, y) + \lambda \sum_n{}' \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

Ferner gilt

$$\frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} = e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}} \prod_{\nu \neq n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}},$$

$$\left|\frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}}\right| < e^{\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_n}\right]} e^{\sum\limits_{\nu \neq n} \left(-\Re\left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right| + \frac{|\lambda|^2}{2} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} + \Re\left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right|\right)}$$

$$= e^{\Re\left[\frac{\lambda}{\lambda_n}\right]} e^{\frac{|\lambda|^2}{2} \sum\limits_{\nu \neq n} \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}} < e^{|\lambda|\sqrt{\Omega} + \frac{|\lambda|^2}{2}\Omega}$$

Somit

$$\left|\sum_n{}' \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n} \frac{D^*(\lambda)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}}\right| < e^{|\lambda|\sqrt{\Omega} + \frac{|\lambda|^2}{2}\Omega} \sum{}' \left|\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n}\right| \cdot \left|\frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n}\right|$$

$$\leqq e^{\frac{|\lambda|^2}{2}\Omega + |\lambda|\sqrt{\Omega}} \sqrt{\int_a^b K(x, s)^2 ds \cdot \int_a^b K(y, s)^2 ds}.$$

Wir bekommen also schließlich die folgende Ungleichung

$$(13)\quad \left|D^*\binom{x}{y}\Big|\,\lambda\right| \leqq e^{\frac{|\lambda|^2}{2}\cdot\Omega}\left(|K(x,y)|+|\lambda|\,e^{|\lambda|\sqrt{\Omega}}\sqrt{\int_a^b K(x,s)^2\,ds\int_a^b K(y,s)^2\,ds}\right).$$

Um im allgemeinen Falle, wo $K(x,y)$ eine komplexe unsymmetrische Funktion ist, eine Relation von der Form (13) zu erhalten, beweisen wir zunächst die folgende Determinantenungleichung. Es sei

$$(14)\qquad D\;\;\begin{vmatrix} 0, & \ldots, & 0, & a_{1,p+1}, & \ldots, & a_{1,p+q} \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{2,p+1}, & \ldots, & a_{2,p+q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{p,p+1}, & \ldots, & a_{p,p+q} \\ a_{p+1,1}, & \ldots, & a_{p+1,p}, & a_{p+1,p+1}, & \ldots, & a_{p+1,p+q} \\ a_{p+2,1}, & \ldots, & a_{p+2,p}, & a_{p+2,p+1}, & \ldots, & a_{p+2,p+q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p+q,1}, & \ldots, & a_{p+q,p}, & a_{p+q,p+1}, & \ldots, & a_{p+q,p+q} \end{vmatrix}$$

eine Determinante, wo $q \geqq p$, und ferner

$$(15)\qquad \sum_{\nu=1}^{q}|a_{n,p+\nu}|^2 = L_n \qquad (n=1,2,\ldots,p),$$

$$(16)\qquad \sum_{\nu=1}^{q}|a_{p+\nu,n}|^2 = M_n \qquad (n=1,2,\ldots,p),$$

$$(17)\qquad \sum_{s=1}^{q}\sum_{t=1}^{q}|a_{p+s,p+t}|^2 = N.$$

Dann gilt

$$(18)\qquad |D| \leqq (L_1L_2\ldots L_p)^{\frac{1}{2}}\cdot(M_1M_2\ldots M_p)^{\frac{1}{2}}\,\frac{N^{\frac{q-p}{2}}}{(q-p)^{\frac{q-p}{2}}}.$$

Das Gleichheitszeichen kann nicht ausgeschlossen werden.

Der von mir ursprünglich gefundene Beweis für diesen Determinantensatz macht von den Hilfsmitteln der Differentialrechnung Gebrauch. Herrn M. Riesz, dem ich den Satz mitgeteilt habe, verdanke ich einen etwas kürzeren Beweis, der ebenfalls eine der Infinitesimalrechnung angehörende Betrachtung benutzt. Ich lasse hier einen rein algebraischen Beweis folgen, auf den mich Herr I. Schur aufmerksam gemacht hat:

Durch eine unitär orthogonale lineare Transformation der q letzten Zeilen und eine ebensolche Transformation der q letzten Kolonnen kann, wie in bekannter Weise leicht geschlossen wird, erreicht werden, daß D in eine Determinante $D' = |a'_{\varkappa\lambda}|$ übergeht, in der nicht nur für $\varkappa \leqq p$,

$\lambda \leqq p$, sondern auch für $\varkappa \leqq p$, $\lambda > p + \varkappa$ oder $\lambda \leqq p$, $\varkappa > p + \lambda$ die Elemente $a'_{\varkappa\lambda}$ den Wert Null erhalten. Hierbei bleiben die Zahlen $|D|$, L_n, M_n und N ungeändert. Es wird aber

$$D' = (-1)^p a'_{1,p+1} a'_{2,p+2} \ldots a'_{p,2p} a'_{p+1,1} a'_{p+2,2} \ldots a'_{2p,p} \begin{vmatrix} a'_{2p+1,2p+1}, & \ldots, & a'_{2p+1,p+q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{p+q,2p+1}, & \ldots, & a'_{p+q,p+q} \end{vmatrix}.$$

Nach dem Hadamardschen Determinantensatz wird daher

$$|D|^2 = |D'|^2 \leqq \prod_{\varkappa=1}^{p} |a'_{\varkappa,p+\varkappa} a'_{p+\varkappa,\varkappa}|^2 \cdot \prod_{\alpha=1}^{q-p} \sum_{\beta=1}^{q-p} |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2.$$

Hieraus folgt die zu beweisende Ungleichung (18), indem man beachtet, daß

$$|a'_{\varkappa,p+\varkappa}|^2 \leqq \sum_{\lambda=1}^{q} |a'_{\varkappa,p+\lambda}|^2 = L_\varkappa, \qquad |a'_{p+\varkappa,\varkappa}|^2 \leqq \sum_{\lambda=1}^{q} |a'_{p+\lambda,\varkappa}|^2 = M_\varkappa$$

und nach dem Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\prod_{\alpha=1}^{q-p} \left(\sum_{\beta=1}^{q-p} |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2 \right) \leqq \left(\frac{\sum_{\alpha,\beta}^{q-p}{}_1 |a'_{2p+\alpha,2p+\beta}|^2}{q-p} \right)^{q-p}$$

$$\leqq \left(\frac{\sum_{\varkappa,\lambda}^{q}{}_1 |a'_{p+\varkappa,p+\lambda}|^2}{q-p} \right)^{q-p} = \left(\frac{N}{q-p} \right)^{q-p}$$

wird.

Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück, eine obere Grenze von $\left| D^* \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda \right) \right|$ zu finden. Dabei werden die folgenden Formeln benutzt, die aus den Resultaten von Hilbert (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Kap. I) leicht gefolgert werden können. Es sei

$$k_{p,q}^{(n)} = K\left(a + \frac{lp}{n},\ a + \frac{lq}{n}\right) \qquad (l = b - a),$$

$$k_{x,p}^{(n)} = K\left(x,\ a + \frac{lp}{n}\right), \qquad k_{p,y}^{(n)} = K\left(a + \frac{lp}{n},\ y\right).$$

Dann gelten die Beziehungen:

$$(19) \qquad D_K^*(\lambda) = \lim_{n=\infty} \begin{vmatrix} 1, & -\frac{\lambda l k_{12}^{(n)}}{n}, & \ldots, & -\frac{\lambda l k_{1,n}^{(n)}}{n} \\ -\lambda l k_{21}^{(n)}, & 1 & & -\frac{\lambda l k_{2n}^{(n)}}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\lambda l k_{n,1}^{(n)}}{n}, & \ldots, & & 1 \end{vmatrix},$$

$$(20)\quad D_K^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda\Big) = D_K^*(\lambda)\,K(x,y)$$

$$+\lambda \lim_{n=\infty}\begin{vmatrix} 0, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,1}^{(n)}, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,2}^{(n)}, & \ldots, & -\sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{x,n}^{(n)} \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{1,y}^{(n)}, & 1, & -\frac{\lambda l}{n}k_{12}^{(n)}, & \ldots, & -\frac{\lambda l}{n}k_{1,n}^{(n)} \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{2,y}^{(n)}, & -\frac{\lambda l}{n}k_{21}^{(n)}, & 1, & \ldots, & -\frac{\lambda l}{n}k_{2,n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{\frac{l}{n}}\,k_{n,y}^{(n)}, & -\frac{\lambda l}{n}k_{n,1}^{(n)}, & \cdot & \ldots, & 1, \end{vmatrix}.$$

Infolge der Hadamardschen Ungleichung ergibt sich

$$|d_n^*(\lambda)|^2 \leqq \prod_{p=1}^{n}\Big(1+|\lambda|^2\sum_q{}' l^2\frac{|k_{pq}^{(n)}|^2}{n^2}\Big) \leqq e^{|\lambda|^2\sum\sum' \frac{|k_{pq}^{(n)}|^2}{n^2}l^2},$$

woraus durch einen Grenzübergang die Relation (11) folgt. Wenden wir auf die in (20) auftretende Determinante den oben erwähnten Determinantensatz ($p=1$, $q=n$) an, so finden wir

$$\Big|D^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda\Big)\Big| \leqq e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}}\cdot|K(x,y)| + |\lambda|\lim_{n=\infty}\sqrt{\sum_{p=1}^{n}\frac{|k_{xp}^{(n)}|^2}{n}l\cdot\sum_{p=1}^{n}\frac{|k_{p,y}^{(n)}|^2}{n}l}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n=\infty}\left\{\Big(n+\sum_{p,q}{}'\frac{|\lambda|^2 l^2}{n^2}|k_{pq}^{(n)}|^2\Big)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}\right\} =$$

$$= e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}}|K(x,y)| + |\lambda|\,\alpha(x)\,\beta(y)\cdot\lim_{n=\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\sum_{p,q}{}'\frac{|\lambda|^2 l^2}{n^2}|k_{pq}^{(n)}|^2\Big)^{\frac{n-1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\lim\frac{1}{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n-1}{2}}} = e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}}\{|K(x,y)|+|\lambda|\,e^{\frac{1}{2}}\,\alpha(x)\beta(y)\},$$

wo

$$\alpha(x)^2 = \int_a^b|K(x,s)|^2\,ds, \qquad \beta(y)^2 = \int_a^b|K(s,y)|^2\,ds$$

gesetzt ist. Es hat sich somit ergeben

$$(21)\qquad \Big|D^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda\Big)\Big| \leqq e^{|\lambda|^2\frac{\Omega}{2}}\{|K(x,y)|+|\lambda|\sqrt{e}\,\alpha(x)\,\beta(y)\}.$$

§ 2.

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Reihen $D^*(\lambda)$ und $D^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\lambda\Big)$ unter der Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine solche meßbare Funktion ist, für welche

$$\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\,ds\,dt$$

existiert. Wir müssen einerseits die Existenz der in den Koeffizienten von $D^*(\lambda)$ und $D^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ auftretenden mehrfachen Integrale beweisen, andererseits zeigen, daß diese Reihen ganze Funktionen von λ darstellen. Dies gelingt durch einen Grenzübergang unter Verwendung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate.

Es sei $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$, ..., $\Phi_n(x,y)$, ... eine Folge stetiger Funktionen, die (in bezug auf das Gebiet $a \leqq {x \atop y} \leqq b$) ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem bilden. Schreiben wir

$$C_p = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, \Phi_p(s,t)\, ds\, dt,$$

so läßt sich[6]) eine Indexfolge $m_1, m_2, \ldots, m_\nu \ldots$ so auswählen, daß

$$G_\nu(x,y) = \sum_{p=1}^{m_\nu} C_p \Phi_p(x,y)$$

für $\nu \to \infty$ fast überall gegen $K(x,y)$ konvergiert. Diese Funktionenfolge besitzt noch die Eigenschaften:

$$\int_a^b \int_a^b |G_\nu(x,y)|^2 dy \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx\, dy, \tag{22}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_a^b \int_a^b |K(x,y) - G_\nu(x,y)|^2 dx\, dy = 0. \tag{23}$$

Die $G_\nu(x,y)$ können ferner, was für das Folgende wichtig ist, so gewählt werden, daß die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{\nu=\infty} \int_a^b |K(x,s) - G_\nu(x,s)|^2 ds = 0, \\ &\lim_{\nu=\infty} \int_a^b |K(s,y) - G_\nu(s,y)|^2 ds = 0 \end{aligned}\right. \tag{24}$$

für fast alle x- und y-Werte im Intervalle (a,b) erfüllt sind. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satze: Es seien

$$\Omega_1(x,y),\ \Omega_2(x,y), \ldots, \Omega_n(x,y), \ldots$$

für fast alle Werte im Gebiete $a \leqq {x \atop y} \leqq b$ definierte Funktionen, die positiv und summierbar sind und ferner noch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \int_a^b \Omega_n(x,y)\, dx\, dy = 0$$

erfüllen.

---

[6]) Vgl. H. Weyl, Math. Ann. 67 (1909), S. 225–245 insb. S. 243.

Dann kann man eine Indexfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ so auswählen, daß für fast alle x-Werte $(a \leqq x \leqq b)$

$$\lim_{\nu = \infty} \int_a^b \Omega_{n_\nu}(x, y)\, dy = 0 \text{ [7]}$$

ist. Zum Beweise schreiben wir

$$\int_a^b \int_a^b \Omega_n(x, y)\, dx\, dy = \alpha_n, \qquad f_n(x) = \int_a^b \Omega_n(x, y)\, dy$$

und wählen die Indexfolge $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ so, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{n_\nu}$ konvergiert. Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ positive gegen Null abnehmende Zahlen. Wir bezeichnen mit E_p diejenige Punktmenge im Intervalle $a \leqq x \leqq b$, für welche

$$\overline{\lim_{\nu = \infty}}\, f_{n_\nu}(x) \geqq \varepsilon_p.$$

Alle x-Werte, die so beschaffen sind, daß $\lim_{\nu = \infty} f_{n_\nu}(x)$ nicht existiert oder nicht gleich Null ist, sind in der Menge

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_p + \ldots$$

enthalten. Hieraus folgt unser Satz, falls wir noch beweisen, daß jede Punktmenge E_p vom Maße Null ist. Dies folgt aber leicht so: Das Maß derjenigen Punktmenge $H(p, \nu)$, für welche

$$f_{n_\nu}(x) \geqq \frac{\varepsilon_p}{2},$$

ist wegen

$$\int_a^b f_{n_\nu}(x)\, dx = \alpha_{n_\nu}$$

kleiner als

$$\frac{2\,\alpha_{n_\nu}}{\varepsilon_p}.$$

Weil nun E_p sicher der Menge

$$\sum_{\nu = m}^{\infty} H(p, \nu),$$

wo m beliebig groß sein kann, angehört, so ist das Maß von E_p kleiner als

$$\frac{2}{\varepsilon_p} \sum_{\nu = m}^{\infty} \alpha_{n_\nu},$$

welche Größe wegen der Konvergenz von $\sum \alpha_{n_\nu}$ für genügend große m kleiner als jede vorgegebene positive Zahl wird. Jede Menge E_p ist also vom Maße Null und folglich auch $\sum E_p$, w. z. b. w.

---

[7]) Nach einem Satz der Lesbesgueschen Integration von Doppelintegralen existiert dies Integral für fast alle x im Intervalle $a \leqq x \leqq b$.

Die Meßbarkeit von $K(s,t)$ hat zur Folge, daß auch

$$(25)\qquad K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \ldots\ldots K(s_{n-1}, s_n) K(s_n, s_1)$$

im zugehörigen n-dimensionalen Gebiete (D_n), meßbar ist. Um einzusehen, daß (25) in D_n auch summierbar ist, brauchen wir den folgenden Satz[8]): „Wenn eine Folge von nicht negativen summierbaren Funktionen

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\quad f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\quad f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

fast überall gegen eine Grenzfunktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvergiert und wenn es ferner eine solche von n unabhängige Konstante K gibt, daß

$$\int\int \ldots \int f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n < K$$

so ist $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ summierbar und

$$\int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \leqq K\text{“}.$$

Man findet, wie folgt, eine obere Grenze von

$$\int_a^b\int_a^b \ldots \int_a^b |G_m(s_1, s_2)| \cdot |G_m(s_2, s_3)| \ldots |G_m(s_n, s_1)|\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich, indem wir die Bezeichnungen

$$h(x)^2 = \int_a^b |G_m(x, y)|^2\, dy,$$

$$k(x)^2 = \int_a^b |G_m(y, x)|^2\, dy$$

einführen,

$$\int_a^b |G_m(s_1, s_2)| \cdot |G_m(s_2, s_3)|\, ds_2 \leqq h(s_1)\, k(s_3).$$

Ferner

$$\int_a^b\int_a^b |G_m(s_1, s_2)| \cdot |G_m(s_2, s_3)| \cdot |G_m(s_3, s_4)|\, ds_2\, ds_3$$

$$\leqq \int_a^b h(s_1)\, k(s_3) |G_m(s_3, s_4)|\, ds_3$$

$$\leqq h(s_1) \sqrt{\int_a^b k(s_3)^2 ds} \cdot k(s_4) = h(s_1) \sqrt{\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|\, ds\, dt}\; k(s_4).$$

Setzen wir hier $s_1 = s_4$, so ergibt sich nach Integration und nochmaliger Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_a^b\int_a^b\int_a^b |G_m(s_1, s_2)\, G_m(s_2, s_3)\, G_m(s_3, s_1)|\, ds_1\, ds_2\, ds_3 \leqq \left(\sqrt{\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|^2\, ds\, dt}\right)^3.$$

---

[8]) Vgl. Fatou, Séries trigonometriques et séries de Taylor (Acta matematica 30 (1906), S. 375).

Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir für ein beliebiges n

$$(26)\qquad \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b |G_m(s_1,s_2)\,G_m(s_2,s_3)\dots G_m(s_n,s_1)|\,ds_1\,ds_2\dots ds_n$$
$$\leqq \left[\int_a^b\int_a^b |G_m(s,t)|^2\,ds\,dt\right]^{\frac{n}{2}} \leqq \Omega^{\frac{n}{2}}.$$

Berücksichtigt man noch, daß fast überall im Gebiete D_n

$$\lim_{m=\infty} |G_m(s_1,s_2)\dots G_m(s_n,s_1)| = |K(s_1,s_2)\dots K(s_n,s_1)|,$$

so ergibt sich aus dem oben erwähnten Satz, daß

$$|K(s_1,s_2)\,K(s_2,s_3)\dots K(s_n,s_1)|$$

und a fortiori

$$K(s_1,s_2)\,K(s_2,s_3)\dots K(s_n,s_1)$$

in D_n summierbar ist. Weil nun jedes Glied in der Determinante

$$K^*\begin{pmatrix}s_1\,s_2\dots s_n\\ s_1\,s_2\dots s_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n)\\ K(s_2,s_1) & 0 & \dots & K(s_2,s_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(s_n,s_1) & K(s_n,s_2) & \dots & 0\end{vmatrix}$$

ein Produkt von Faktoren ist, die alle die Form (25) haben und von denen nie zwei gemeinsame Veränderlichen enthalten, so folgt hieraus die Existenz der Integrale

$$\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K^*\begin{pmatrix}s_1\,s_2\dots s_n\\ s_1\,s_2\dots s_n\end{pmatrix} ds_1\,ds_2\dots ds_n.$$

Aus der Identität

$$\begin{aligned}
&K(s_1,s_2)\,K(s_2,s_3)\dots K(s_n,s_1) - G_m(s_1,s_2)\,G_m(s_2,s_3)\dots G_m(s_n,s_1)\\
&= (K(s_1,s_2) - G_m(s_1,s_2))\,K(s_2,s_3)\dots K(s_n,s_1)\\
&+ G_m(s_1,s_2)[K(s_2,s_3) - G_m(s_2,s_3)]\,K(s_3,s_4)\dots K(s_n,s_1)\\
&+ G_m(s_1,s_2)\,G_m(s_2,s_3)[K(s_3,s_4) - G_m(s_3,s_4)]\,K(s_4,s_5)\dots K(s_n,s_1)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+ G_m(s_1,s_2)\,G_m(s_2,s_3)\dots[K(s_n,s_1) - G_m(s_n,s_1)]
\end{aligned}$$

erhält man durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung unter Berücksichtigung der Gleichung (23), daß

$$\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(s_1,s_2)\,K(s_2,s_3)\dots K(s_n,s_1)\,ds_1\,ds_2\dots ds_n$$
$$= \lim_{m=\infty}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b G_m(s_1,s_2)\,G_m(s_2,s_3)\dots G_m(s_n,s_1)\,ds_1\,ds_2\dots ds_n$$

und somit

$$\lim \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b G_m^* \binom{s_1\, s_2 \ldots s_n}{s_1\, s_2 \ldots s_n} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n$$
$$= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K^* \binom{s_1\, s_2 \ldots s_n}{s_1\, s_2 \ldots s_n} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n.$$

Weil die Ungleichung (12) für jede der Größen

$$\left| \frac{1}{\underline{|n}} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b G_m^* \binom{s_1\, s_2 \ldots s_n}{s_1\, s_2 \ldots s_n} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n \right|$$

gilt, so folgt ihre Gültigkeit auch für

$$\left| \frac{1}{\underline{|n}} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K^* \binom{s_1\, s_2 \ldots s_n}{s_1\, s_2 \ldots s_n} ds_1\, ds_2 \ldots ds_n \right|.$$

Also ist $D_K^*(\lambda)$ eine ganze Funktion von λ. Ferner ergibt sich leicht

$$\lim_{m=\infty} D_{G_m}^*(\lambda) = D_K^*(\lambda).$$

Mithin

$$\left| D_K^*(\lambda) \right| \leqq e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2 \Omega}.$$

Man kann nun $D^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ in ganz analoger Weise untersuchen. Zunächst wird mit Hilfe von (22), (23) und (24) bewiesen, daß

$$\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, s_1)\, K(s_1, s_2) \ldots K(s_n, y)\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n = K^{(n+1)}(x, y)$$

für fast alle x, y-Werte $\left(a \leqq {x \atop y} \leqq b\right)$ existiert und ferner, daß

$$\lim_{m=\infty} G_m^{(p)}(x, y) = K^{(p)}(x, y).$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (26), daß (mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge) die Integrale in den Koeffizienten von $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ für $m \to \infty$ gegen die entsprechenden der Reihe $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ konvergieren. Wegen (21), angewendet auf $G_m(x, y)$, bleibt $D_{G_m}^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ kleiner als eine von m unabhängige nur von x, y, λ abhängige Konstante. Aus diesen beiden Tatsachen folgt nach einem bekannten Satze, daß $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ eine überall konvergente Potenzreihe von λ ist, die als Grenzwert von $D_{G_m}^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ für $m \to \infty$ dargestellt werden kann. Ferner genügt $D_K^*\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ mit Ausnahme von höchstens einer Nullmenge der Ungleichung (21), woraus folgt, daß $D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ und $D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)^2$ im Gebiete $a \leqq \begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix} \leqq b$ summierbare Funktionen sind.

Wir beweisen noch, daß für fast alle x und y die Relationen

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds = 0, \tag{27}$$

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}s\\y\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}s\\y\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds = 0 \tag{28}$$

gelten. Es möge für die Summe der ersten p Glieder einer Potenzreihe $P(\lambda)$ die Bezeichnung $\{P(\lambda)\}_p$ eingeführt werden. Die Summe der übrigbleibenden Glieder nennen wir $\{P(\lambda)\}^{(p)}$. Es ist

$$\int_a^b \left| D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right|^2 ds$$

$$\leqq 2\int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right\}_p\right|^2 ds + 2\int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)}\right|^2 ds.$$

Wegen der leicht zu beweisenden Relation

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b |K^{(p)}(x,s) - G_m^{(p)}(x,s)|^2 ds = 0 \qquad (\text{für fast alle } x) \tag{29}$$

haben wir fast überall

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b \left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right\}_p\right|^2 ds = 0. \tag{30}$$

Sei nun $|\lambda| < R$, wo R eine beliebige positive Zahl ist, ferner C_{2R} ein Kreis mit dem Radius $2R$ um den Nullpunkt.

Wir haben

$$\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)} = \frac{1}{2\pi i}\lambda^p \int_{C_{2R}} \frac{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|z\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|z\right)}{z^p(z-\lambda)} dz.$$

Folglich wegen (21)

$$\left|\left\{D_{G_m}^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D_K^*\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right\}^{(p)}\right| \leqq 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p e^{2R^2\Omega}\Big[|K(x,s)| + |G_m(x,s)|$$
$$+ 2R\sqrt{e}\sqrt{\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |K|t,s|^2 dt}$$
$$+ 2R\sqrt{e}\sqrt{\int_a^b |G_m(x,t)|^2 dt \cdot \int_a^b |G_m(t,s)|^2 dt}\,\Big].$$

Erheben wir beide Seiten dieser Ungleichung ins Quadrat und integrieren in bezug auf s, so erkennen wir auf Grund der Relationen (22) und (24), daß

$$(31)\qquad \int_a^b \left| \left\{ D^*_{G_m}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - D^*_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \right\}^{(p)} \right|^2 ds \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^p C(x, y),$$

wo $C(x, y)$ eine für fast alle x endliche Größe bedeutet, die von p und m unabhängig ist. Aus (29), (30) und (31) ergibt sich nun leicht (27). Auf analoge Weise erhält man (28).

Wir haben nun die nötigen Hilfsmittel gewonnen, um aus den Resolventengleichungen

$$D^*_{G_m}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b G_m(x, s)\, D^*_{G_m}\left(\begin{smallmatrix} s \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) ds = D^*_{G_m}(\lambda)\, G_m(x, y),$$

$$D^*_{G_m}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \int_a^b D^*_{G_m}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) G_m(s, y)\, ds = D^*_{G_m}(\lambda)\, G_m(x, y)$$

durch einen Grenzübergang ($m \to \infty$) die Relationen (fast überall)

$$(32)\qquad \begin{cases} D^*_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \displaystyle\int_a^b K(x, s)\, D^*_K\left(\begin{smallmatrix} s \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) ds = D^*(\lambda)\, K(x, y), \\ D^*_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) - \lambda \displaystyle\int_a^b D^*_K\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) K(s, y)\, ds = D^*(\lambda)\, K(x, y) \end{cases}$$

zu folgern.

Dieses gelingt in leicht ersichtlicher Weise durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung bei Berücksichtigung von (27) und (28).

Nennen wir dann $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Lösungen von

$$(33)\qquad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \\ \psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\, \psi(y)\, dy = g(x), \end{cases}$$

wenn diese Gleichungen für fast alle x erfüllt sind, und betrachten wir ferner zwei Funktionen, die nur in einer Nullmenge voneinander verschieden sind, als nicht verschieden, so können wir aus den Gleichungen (32) *und aus den entsprechenden höheren Determinanten* (*die in derselben Weise zu begründen sind*) *genau so, wie es in der Arbeit Fredholms geschehen ist*[9]), *die Fundamentalsätze betreffend die Lösbarkeit der Glei-*

[9]) Um zu beweisen, daß für eine Wurzel von $D^*(\lambda) = 0$ nicht alle Determinanten verschwinden können, kann man die Formel (42) benutzen.

chungen (33) *und ihrer zugehörigen homogenen Gleichungen für den Fall beweisen, daß* $|f(x)|^2$, $|g(x)|^2$ *und* $|K(x, y)|^2$ *in den Gebieten* $a \leqq x \leqq b$ *bzw.* $a \leqq \frac{x}{y} \leqq b$ *summierbare Funktionen sind.*

§ 3.

Um das Geschlecht der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ zu bestimmen, wird im nächsten Paragraphen eine Formel für den zu einer Summe von zwei Kernen $G(s, t) + H(s, t)$ gehörigen Fredholmschen Nenner benutzt, die in meiner Dissertation (Über das Neumann-Poincarésche Problem, Upsala 1916, S. 93) ohne Beweis angegeben wurde.

Diese Formel

$$(34)\qquad D_{G+H}(\lambda) = D_G(\lambda) \cdot D_H(\lambda) - \lambda^2 \int_a^b\int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\middle|\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t \\ s \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds\, dt$$

$$+ \frac{\lambda^4}{(\underline{|2})^2} \int_a^b\int_a^b\int_a^b\int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t_1, t_2 \\ s_1, s_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds_1\, ds_2\, dt_1\, dt_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(\underline{|n})^2} \int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b D_G\left(\begin{matrix} s_1\, s_2 \ldots s_n \\ t_1\, t_2 \ldots t_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix} t_1\, t_2 \ldots t_n \\ s_1\, s_2 \ldots s_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) ds_1 \ldots ds_n\, dt_1 \ldots dt_n$$

$$+ \cdots\cdots$$

kann man folgendermaßen beweisen. Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein. Die zu einem Kern G gehörige Resolvente

$$\frac{D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}$$

nennen wir Γ_G. Das Resultat der Komposition zweier Kerne G und H

$$\int_a^b G(x, s)\, H(s, y)\, ds$$

wird mit GH bezeichnet.

Nach einer Formel von Platrièr[10]) ist

$$(35)\qquad D\left(\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \\ y_1\, y_2 \ldots y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) = D(\lambda)^{1-n} \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ \vdots & & \\ D\left(\begin{matrix} x_n \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D\left(\begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix}\middle|\lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$= D(\lambda) \begin{vmatrix} \Gamma(x_1, y_1 | \lambda) & \ldots & \Gamma(x_1, y_n | \lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma(x_n, y_1 | \lambda) & \ldots & \Gamma(x_n, y_n | \lambda) \end{vmatrix}$$

[10]) Journ. de math. 1913, S. 233—304, insb. S. 249.

Wenden wir ferner die für beliebige Funktionen φ_i und ψ_k gültige Formel[11])

$$(36)\quad \int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} \varphi_1(s_1)\,\varphi_1(s_2)\ldots\varphi_1(s_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_n(s_1)\,\varphi_n(s_2)\ldots\varphi_n(s_n)\end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(s_1)\,\psi_1(s_2)\ldots\psi_1(s_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \psi_n(s_1)\,\psi_n(s_2)\ldots\psi_n(s_n)\end{vmatrix} ds_1\ldots ds_n$$

$$= |\underline{n} \begin{vmatrix} \int_a^b\varphi_1\psi_1\,ds,\ \int_a^b\varphi_1\psi_2\,ds,\ \ldots,\ \int_a^b\varphi_1\psi_n\,ds \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \int_a^b\varphi_n\psi_1\,ds,\ \int_a^b\varphi_n\psi_2\,ds,\ \ldots,\ \int_a^b\varphi_n\psi_n\,ds \end{vmatrix}$$

an, so ergibt sich

$$\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b D_G\left(\begin{matrix}s_1 s_2\ldots s_n\\ t_1 t_2\ldots t_n\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) D_H\left(\begin{matrix}t_1 t_2\ldots t_n\\ s_1 s_2\ldots s_n\end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) ds_1 ds_2\ldots ds_n dt_1\ldots dt_n$$

$$= D_G(\lambda)D_H(\lambda)\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix}\Gamma_G(s_1,t_1)\ldots\Gamma_G(s_1,t_n)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Gamma_G(s_n,t_1)\ldots\Gamma_G(s_n,t_n)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\Gamma_H(t_1,s_1)\ldots\Gamma_H(t_n,s_1)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Gamma_H(t_1,s_n)\ldots\Gamma_H(t_n,s_n)\end{vmatrix} \begin{matrix} ds_1\ldots ds_n \\ dt_1\ldots dt_n\end{matrix}$$

$$= |\underline{n}\, D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix}\Gamma_G\Gamma_H(s_1,s_1)\ldots\Gamma_G\Gamma_H(s_1,s_n)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Gamma_G\Gamma_H(s_n,s_1)\ldots\Gamma_G\Gamma_H(s_n,s_n)\end{vmatrix} ds_1\,ds_2\ldots ds_n.$$

Durch Anwendung dieser Formel finden wir für die rechte Seite von (34) den Ausdruck

$$D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\,D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda).$$

Das Problem ist also darauf reduziert, die Relation

$$(37)\qquad D_{G+H}(\lambda) = D_G(\lambda)\,D_H(\lambda)\,D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda)$$

zu beweisen.

Schreibt man

$$(38)\qquad K(x,y) = K'(x,y) + K''(x,y) - \lambda\int_a^b K'(x,s)K''(s,y)\,ds,$$

so gilt nach einem Resultate von Fredholm

$$D_K(\lambda) = D_{K'}(\lambda)\,D_{K''}(\lambda).$$

Setzen wir hier

$$K' = G,\quad K'' = \lambda\Gamma_G\Gamma_H$$

und berücksichtigen, daß

$$\Gamma_G - G - \lambda G\Gamma_G = 0,$$

---

[11]) Vgl. G. Landsberg. Math. Ann., **69**, S. 231.

so wird

$$K' + K'' - \lambda K'K'' = G + \lambda \Gamma_G \Gamma_H - \lambda^2 G\Gamma_G\Gamma_H = G + \lambda(\Gamma_G - \lambda G\Gamma_G)\Gamma_H$$
$$= G + \lambda G\Gamma_H,$$

somit

$$(39) \qquad D_G(\lambda)\, D_{\lambda\Gamma_G\Gamma_H}(\lambda) = D_{G+\lambda G\Gamma_H}.$$

Wenden wir die Formel (38) auf die beiden Kerne $G + \lambda G\Gamma_H$ und H an, so ergibt sich wegen

$$G + \lambda G\Gamma_H + H - \lambda(G + \lambda G\Gamma_H)H = G + H + \lambda G(\Gamma_H - H - \lambda\Gamma_H H)$$
$$= G + H,$$

$$(40) \qquad D_H(\lambda)\, D_{G+\lambda G\Gamma_H}(\lambda) = D_{G+H}(\lambda),$$

woraus schließlich bei Berücksichtigung von (39) die zu beweisende Relation (37) folgt.

Wir erwähnen noch die folgende Formel

$$D_{GH}(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{(\underline{|n})^2} \int\int\cdots\int G\begin{pmatrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{pmatrix} H\begin{pmatrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix} \frac{ds_1 \dots ds_n}{dt_1 \dots dt_n},$$

$$(41) \qquad GH = \int G(x,s)H(s,y)\,ds.$$

Hieraus folgt, daß für beschränkte Funktionen G und H $D_{GH}(\lambda)$ höchstens die Ordnung Eins besitzt. Noch allgemeiner gilt

$$D_{G_1 G_2 \dots G_m}(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{(\underline{|n})^m} \int\int\cdots\int G_1\begin{pmatrix} s_1^{(1)} \dots s_n^{(1)} \\ s_1^{(2)} \dots s_n^{(2)} \end{pmatrix} G_2\begin{pmatrix} s_1^{(2)} \dots s_n^{(2)} \\ s_1^{(3)} \dots s_n^{(3)} \end{pmatrix}$$
$$\dots G_m\begin{pmatrix} s_1^{(m)}\, s_2^{(m)} \dots s_n^{(m)} \\ s_1^{(1)}\, s_1^{(2)} \dots s_n^{(1)} \end{pmatrix} ds_1^{(1)}\, ds_2^{(1)} \dots ds_n^{(1)}\, ds_1^{(2)} \dots ds_n^{(2)} \dots ds_1^{(m)} \dots ds_n^{(m)},$$

$$G_1 G_2 \dots G_m = \int\int\cdots\int G_1(x, s_1) G_2(s_1, s_2) \dots G_m(s_{m-1}, y)\, ds_1 ds_2 \dots ds_{m-1},$$

woraus folgt, daß $D_{G_1 G_2 \dots G_m}(\lambda)$ höchstens die Ordnung $\frac{m}{2}$ hat, wenn $G_1 G_2 \dots G_m$ beschränkte Funktionen sind.

Man sieht leicht, wenn man in (34) G und H mit Kernen G_1 und H_1 ersetzt, die sich nur dadurch von G und H unterscheiden, daß sie auf der Diagonale $y = x$ verschwinden, daß auch die folgende Formel richtig ist:

$$(42) \qquad D^*_{G+H}(\lambda) = D^*_G(\lambda) D^*_H(\lambda) - \frac{\lambda^2}{1} \int_a^b\int_a^b D^*_G\left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix}\,\middle|\, \lambda\right) D^*_H\left(\begin{matrix} t \\ s \end{matrix}\,\middle|\, \lambda\right) ds\,dt$$
$$\cdots (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(\underline{|n})^2} \int_a^b\int_a^b \cdots \int_a^b D^*_G\left(\begin{matrix} s_1 s_2 \dots s_n \\ t_1 t_2 \dots t_n \end{matrix}\,\middle|\, \lambda\right) D^*_H\left(\begin{matrix} t_1 t_2 \dots t_n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{matrix}\,\middle|\, \lambda\right) \frac{ds_1 \dots ds_n}{dt_1 \dots dt_n} \cdots$$

§ 4.

Wir wollen nun das Geschlecht der ganzen Funktion $D^*(\lambda)$ unter der Annahme bestimmen, daß das Quadrat von $K(x,y)$ im Gebiete $a \leqq {x \atop y} \leqq b$ summierbar ist. Zu dem Zwecke schreiben wir

$$K(x,y) = G(x,y) + H(x,y), \tag{43}$$

wo $G(x,y)$ von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu(x) B_\nu(y) \tag{44}$$

ist und

$$\int_a^b \int_a^b |H(x,y)|^2 \, dx \, dy < \varepsilon \tag{45}$$

(ε = eine beliebig vorgegebene positive Zahl). Dieses kann man z. B. dadurch erreichen, daß man $G(x,y)$ einer geeigneten der früher eingeführten Funktionen $G_n(x,y)$ gleichsetzt, wenn das Orthogonalsystem

$$\Phi_1(x,y), \quad \Phi_2(x,y) \ldots \Phi_n(x,y) \ldots$$

von der speziellen Form

$$\varphi_p(x)\varphi_q(y) \qquad (p = 1, 2, \ldots, \; q = 1, 2, \ldots)$$

gewählt ist, wo $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \ldots$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem in bezug auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ bedeutet. Wir wenden nun die Formel (42) an und bemerken, daß diese im vorliegenden Falle nur eine endliche Anzahl Glieder enthält, weil

$$D_G^*\left(\begin{matrix} s_1 s_2 \ldots s_n \\ t_1 t_2 \ldots t_n \end{matrix} \middle| \lambda\right) = 0 \tag{46}$$

für $n > m$. Um eine für unsere Zwecke geeignete obere Grenze von

$$\left| D_H^*\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_r \\ y_1 y_2 \ldots y_r \end{matrix} \middle| \lambda\right) \right|$$

zu erhalten, schreiben wir, zunächst unter der Annahme, daß $H(x,y)$ stetig ist, indem wir uns der Bezeichnungsweise auf S. 7 u. 8 bedienen,

$$D_H^*\left(\begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_r \\ y_1 y_2 \ldots y_r \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \lim_{n=\infty} j_n, \tag{47}$$

$$
j_n = \left|\begin{array}{llllll}
H_{x_1 y_1}, & \ldots, H_{x_1 y_r} & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_1 1} & & \ldots, & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_1 n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
H_{x_r y_1}, & \ldots, H_{x_r y_r} & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_r n} & & \ldots, & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_r n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{1 y_1}, & \ldots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{1 y_r} & 1, & -\frac{\lambda l}{n} H_{12}, & \ldots, & -\frac{\lambda l}{n} H_{1n} \\
\cdot & \ldots & -\frac{\lambda l}{n} H_{21} & 1, & & -\frac{\lambda l}{n} H_{2n} \\
\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{n y_1}, & \ldots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{n y_r} & -\frac{\lambda l}{n} H_{n1} & & \ldots, & 1
\end{array}\right|.
$$

Wir bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ $(\varrho \leqq r)$ ϱ aus den Größen $1, 2, \ldots, r$ irgendwie herausgegriffenen verschiedenen Zahlen. Ferner mögen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r-\varrho}$ $(\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{r-\varrho})$ die übriggebliebenen von diesen Größen bezeichnen. Ebenso möge auch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$; $\delta_1, \ldots, \delta_{r-\varrho}$ ein derartiges System von Zahlen bedeuten. Dann gilt

$$
j_n = \sum \pm \frac{1}{\varrho!} H_{x_{\alpha_1} y_{\beta_1}} H_{x_{\alpha_2} y_{\beta_2}} \ldots H_{x_{\alpha_\varrho} y_{\beta_\varrho}}
$$

$$
\left|\begin{array}{llllll}
0 \;\ldots\ldots\; 0 & & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_{\gamma_1} 1} & & \ldots, & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_{\gamma_1} n} \\
\cdot \quad {r-\varrho \atop \text{Zeilen}} \quad \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 \;\ldots\ldots\; 0 & & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_{\gamma_{r-\varrho}}} & & \ldots, & -\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{x_{\gamma_{r-\varrho}}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{1 y_{\delta_1}}, & \ldots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{1 y_{\delta_{r-\varrho}}} & 1 & -\frac{\lambda l}{n} H_{12}, & \ldots, & -\frac{\lambda l}{n} H_{1n} \\
 & & -\frac{\lambda l}{n} H_{21} & 1 & \ldots, & \\
\sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{n y_{\delta_1}}, & \ldots, \sqrt{\frac{\lambda l}{n}}\, H_{n y_{\delta_{r-\varrho}}} & -\frac{\lambda l}{n} H_{n1} & & \ldots, & 1
\end{array}\right|.
$$

Die Summe ist über alle möglichen Zahlensysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varrho$ $(\varrho \leqq r)$ zu erstrecken. Hieraus folgt durch Anwendung des Satzes (18) mit der Bezeichnung

$$
\sum_{\nu=1}^{n} |H_{x\nu}|^2 \frac{l}{n} = u_n(x)^2, \quad \sum_{\nu=1}^{n} |H_{\nu y}|^2 \frac{l}{n} = v_n(y)^2,
$$

$$
|j_n| < \sum \frac{1}{\varrho!} \left| H(x_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) H(x_{\alpha_2}, y_{\beta_2}) \ldots H(x_{\alpha_\varrho}, y_{\beta_\varrho}) \right|
$$

$$
\cdot |\lambda|^{r-\varrho} u_n(x_{\gamma_1}) \ldots u_n(x_{\gamma_{r-\varrho}}) \cdot v_n(y_{\delta_1}) \ldots v_n(y_{\delta_{r-\varrho}})
$$

$$
\cdot \left(\frac{n + |\lambda|^2 \sum' |H_{pq}|^2 \frac{l^2}{n^2}}{n - r + \varrho} \right)^{\frac{n-r+\varrho}{2}}
$$

Für $n \longrightarrow \infty$ ergibt sich, falls wir schreiben

$$\int_a^b |H(x,t)|^2 dt = u(x)^2; \quad \int_a^b |H(t,y)|^2 dt = v(y)^2, \tag{49}$$

$$\left| D_H^*\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_r \\ y_1 y_2 \dots y_r \end{pmatrix} \lambda \right| < \sum \frac{1}{|\varrho} |H(x_{\alpha_1}, y_{\beta_1}) \dots H(x_{\alpha_\varrho}, y_{\beta_\varrho})| \cdot$$

$$\cdot |\lambda \sqrt{e}|^{r-\varrho} u(x_{\gamma_1}) \dots u(x_{\gamma_{r-\varrho}}) \cdot v(y_{\delta_1}) \dots v(y_{\delta_{r-\varrho}}) e^{\frac{|\lambda|^2}{2} \int_a^b \int_a^b |H(s,t)|^2 ds\, dt}$$

Durch dieselbe Art von Grenzübergängen, die in dieser Arbeit oft angewandt wurden, zeigt man, daß mit Ausnahme von einer Nullmenge im $2r$ dimensionalen Raum $a \leqq \frac{x_p}{y_q} \leqq b$ $(p = 1, 2, \dots, r, q = 1, 2, \dots, r)$; diese Ungleichung auch in dem Falle gültig bleibt, wo $|H(x,y)|^2$ für $a \leqq \frac{x}{y} \leqq b$ summierbar ist. Weil es eine Konstante C gibt, daß für $|\lambda| > 1$

$$\left| D_G^*\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_r \\ y_1, y_2, \dots, y_r \end{pmatrix} \lambda \right| < C |\lambda|^m,$$

finden wir schließlich aus (42), (49) und (45), daß zwei solche (von ε abhängige) Konstanten k und N existieren, daß für $|\lambda| > 1$

$$|D^*(\lambda)| < k |\lambda|^N e^{\frac{\varepsilon |\lambda|^2}{2}}. \tag{50}$$

Es seien $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots$ die Nullstellen von $D_{G_n}^*(\lambda)$ ($G_n(x,y)$ hat hier dieselbe Bedeutung wie auf S. 9). Nach dem schon zitierten Satze von I. Schur ist

$$\sum_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu^{(n)}|^2} \leqq \int_a^b \int_a^b |G_n(x,y)|^2 dx\, dy.$$

Durch einen Grenzübergang ergibt sich hieraus für die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ von $D^*(\lambda)$

$$\sum_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu|^2} \leqq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx\, dy.$$

Berücksichtigen wir noch, daß $D^*(\lambda)$ infolge (11) höchstens vom Geschlecht 2 ist, so folgt

$$D^*(\lambda) = e^{a\lambda^2 + b\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}. \tag{51}$$

Auf ganz dieselbe Weise, wie ich in einer früheren Arbeit (Arkiv för mat. astr. o fysik, Bd. 12, 1917) eine entsprechende Frage bezüglich $D_K(\lambda)$

(K = stetiger Kern) behandelt habe, kann man mit Hilfe von (50) schließen, daß

$$a = 0.$$

Weil ferner

$$D^*(0) = 1, \quad \left(\frac{dD^*(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = 0,$$

so ergibt sich aus

$$\frac{1}{D^*(\lambda)}\frac{dD^*(\lambda)}{d\lambda} = b + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\lambda_\nu} + \frac{1}{\lambda_\nu}\right) = b + \lambda\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu(\lambda-\lambda_\nu)},$$

daß b gleich Null ist. Wir haben somit das Resultat gewonnen:

$D^*(\lambda)$ *ist höchstens vom Geschlechte Eins und besitzt die Produktdarstellung*

$$D^*(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_\nu}}.$$

(Eingegangen am 19. Januar 1920.)