

# Ähnlichkeitsgesetze für Profilströmungen mit Wärmezufuhr

Von

J. Zierep, Karlsruhe

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 20. Juli 1964)

**Zusammenfassung.** Es wird ein neues Ähnlichkeitsgesetz für die Umströmung schlanker Profile bei Wärmezufuhr hergeleitet. Dieses Gesetz stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Beziehungen von PRANDTL-GLAUERT für den linearen Unter- und Überschall und der entsprechenden Gesetzmäßigkeiten für schallnahe Strömungen dar. Es tritt hierin ein neuer Ähnlichkeitsparameter auf, der die Wärmezufuhr mit der Profildicke und der Machzahl der Anströmung verknüpft. Die einschlägigen Gleichungen ergeben unter anderem Aussagen über die Widerstandsverringering eines Profils bei Wärmezufuhr im Unter- und Überschall, die früher OSWATITSCH [1] auf anderem Wege hergeleitet hat.

**Summary.** A new similarity law for the flow around slender profiles with heat addition is derived. This law represents a generalization of the well-known relations by PRANDTL-GLAUERT for linear sub- and supersonic flow, and of the corresponding relations for transonic flow. A new similarity parameter appears connecting the heat supply with thickness of profile and Mach number. Information about the reduction of resistance of a profile with heat addition in the sub- and supersonic range is obtained which has been derived before by OSWATITSCH [1] using a different method.

## I. Einleitung und Übersicht

Wir beschäftigen uns im folgenden mit Profilströmungen, bei denen im Feld eine Wärmezufuhr vorliegt. Solche Probleme treten in den Anwendungen in vielerlei Varianten auf, wobei einerseits die Art und Weise, wie die Wärme zugeführt wird, recht unterschiedlich ist und andererseits auch die absolute Größe der Wärmezufuhr sich innerhalb weiter Grenzen bewegt. Wollen wir zu einem durchsichtigen Modell gelangen, so sind daher gewisse Annahmen unerlässlich. Was die Wärmezufuhr angeht, so setzen wir hier voraus, daß sie durch eine bekannte Quellverteilung im ganzen Strömungsfeld gegeben sein soll. Dies stellt eine wesentliche Beschränkung dar insofern, als hierdurch zunächst die Fälle ausgeschlossen sind, bei denen die Intensität der Wärmezufuhr vom Strömungszustand selbst abhängt, was z. B. bei allen Kondensationserscheinungen der Fall ist. Diese Koppelung zwischen der Größe der Energiezufuhr und dem Strömungsgeschehen wird also hier unterdrückt. Es bleibt weiteren Untersuchungen vorbehalten zu prüfen, ob man nicht durch eine geeignete Wahl der Wärmequellverteilung wenigstens angenähert diese innere Bindung berücksichtigen kann.

Der Grund für die vorgenommene Idealisierung liegt in erster Linie darin, daß man unter dieser Annahme zu außerordentlich einfachen und durchsichtigen Gesetzmäßigkeiten gelangt, die die Strömungsfelder mit unterschiedlicher Wärmezufuhr miteinander verknüpfen. Diese *Ähnlichkeitsgesetze* stellen Verallgemeinerungen der klassischen Gesetzmäßigkeiten von PRANDTL-GLAUERT für den linearen Unter- und Überschall und derjenigen für schallnahe Strömungen dar. Es tritt ein neuer Ähnlichkeitsparameter auf, der die Wärmezufuhr mit der Profildicke und der Machzahl der Anströmung verknüpft. Von Interesse sind auch die Folgerungen, die sich auf die Widerstandsverringerung eines Profils bei Heizung in Unter- und Überschallströmung beziehen. Es werden hier die Ergebnisse, die früher OSWATITSCH [1] auf anderem Wege gewonnen hat, bestätigt. Die Frage nach Ähnlichkeitsgesetzen von Strömungen mit Wärmezufuhr wurde bereits von KRZYWOBLOCKI, HORIUCHI und VODA [2] behandelt. Die Ausführungen dieser Autoren decken sich jedoch nicht mit unseren Ergebnissen, die dort vorgenommenen Vernachlässigungen in den Bewegungsgleichungen treffen meines Erachtens nicht zu. Wir kommen hierauf unten noch zurück.

## II. Die Ableitungen der Grundgleichungen bei Wärmezufuhr

Wir legen unseren Betrachtungen die Gleichungen für die stationäre, zweidimensionale, reibungsfreie Strömung ohne Wärmeleitung zugrunde. Die Beschränkung auf ebene Strömungen ist an sich unnötig, sie geschieht nur, um den Formelaufwand in Grenzen zu halten. Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall bringt keinen grundsätzlichen Unterschied. Die Kontinuität lautet

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} = 0. \quad (\text{II. 1})$$

Die Bewegungsgleichungen von EULER schreiben sich in der Form

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right\} = -\frac{1}{\varrho} \left\{ c^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right\}, \quad (\text{II. 2 a})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right\} = -\frac{1}{\varrho} \left\{ c^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \right\}. \quad (\text{II. 2 b})$$

Hierin wurde bereits benutzt, daß in dem betrachteten Fall  $p = p(\varrho, s)$  ist ( $s =$  Entropie der Masseneinheit,  $c =$  Schallgeschwindigkeit). Den Zusammenhang zwischen der Entropie und der zugeführten Wärme liefert der zweite Hauptsatz in der Form

$$u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{1}{T} \left( u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \quad (\text{II. 3})$$

$Q = Q(x, y)$  ist dabei die der Masseneinheit längs der Stromlinie von einem Bezugspunkt bis zum Punkt  $(x, y)$  insgesamt zugeführte Wärme. Für Umströmungsprobleme ist es zweckmäßig, als Bezugswerte diejenigen der Anströmung (Index  $\infty$ ) zu nehmen.

Multiplizieren wir (II.2a) mit  $u$  und (II.2b) mit  $v$  und addieren, so kommt bei Beachtung von (II.1) und (II.3):

$$u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{c^2}{\rho} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \left( u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right) = c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho T} \frac{\partial p}{\partial s} \left( u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \quad (\text{II.4})$$

Für ein *ideales Gas* gilt

$$\frac{1}{\rho T c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_e = \frac{p}{c_v \rho T \kappa \frac{R}{m} T} = \frac{1}{c_p T}.$$

Benutzen wir dies in (II.4), so kommt die folgende Form der *gasdynamischen Grundgleichung*

$$\left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{c^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{c_p T} \left( u \frac{\partial Q}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \quad (\text{II.5})$$

Jetzt kommen wir zur Besprechung des *Energiesatzes* sowie der *Wirbelgleichungen*. Die EULERSchen Gleichungen (II.2a, b) können in der folgenden Form geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W^2}{2} \right) - v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial i}{\partial x} + T \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (\text{II.6a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{W^2}{2} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial i}{\partial y} + T \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (\text{II.6b})$$

Multiplikation von (II.6a) mit  $u$  und (II.6b) mit  $v$  und Addition liefert mit (II.3) die Aussage

$$\left( u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) \left( \frac{W^2}{2} + i - Q \right) = 0,$$

d. h.  $\frac{W^2}{2} + i - Q$  ist längs jeder Stromlinie konstant. Führen wir im Unendlichen keine Wärme zu ( $Q_\infty = 0$ ), so gilt der *Energiesatz* in der Form

$$\frac{W^2}{2} + i - Q = \frac{W_\infty^2}{2} + i_\infty. \quad (\text{II.7})$$

Wir betrachten im folgenden nur sogenannte *isoenergetische Strömungen*. Bei denen hat  $\frac{W_\infty^2}{2} + i_\infty$  für alle Stromlinien denselben Wert. In diesem Fall ergibt (II.6a, b) sofort die folgenden Beziehungen:

$$-v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{II.8a})$$

$$u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (\text{II.8b})$$

Diese Gleichungen stellen Verallgemeinerungen des CROCCOSchen Wirbelsatzes für Strömungen mit Wärmezufuhr dar. Man bestätigt übrigens leicht, daß allgemein der folgende Zusammenhang besteht ( $\mathfrak{w}$  = Geschwindigkeitsvektor)

$$\mathfrak{w} \times \text{rot } \mathfrak{w} = -T \text{grad } s + \text{grad } Q. \quad (\text{II.9})$$

<sup>1</sup> Diese Gleichung findet sich im wesentlichen schon bei VAZSONYI [3].

(II.5) sowie (II.8a, b) sind die Grundgleichungen unseres Problems. Wir gehen jetzt dazu über, Vereinfachungen für den Fall der Umströmung schlanker Profile vorzunehmen.

### III. Die linearen Grundgleichungen für das Umströmungsproblem

Bei der Umströmung schlanker Profile linearisiert man im Unterschall bzw. im Überschall in der Regel bezüglich der Daten der Anströmung, d. h. man berücksichtigt von den Störgrößen  $\frac{u-u_\infty}{u_\infty}$ ,  $\frac{v-v_\infty}{u_\infty}$  nur die ersten Potenzen. ( $\frac{v_\infty}{u_\infty} \ll 1$  beschreibt die geringe Anstellung der Strömung.) Wollen wir hier analog verfahren, so müssen wir zunächst eine Aussage über die Größe der zugeführten Wärme, d. h. über  $\frac{Q}{c_p T_\infty}$ , machen.

Es liegt sehr nahe, den Fall zu betrachten, daß die folgenden drei Störgrößen

$$\left| \frac{u-u_\infty}{u_\infty} \right|, \quad \left| \frac{v-v_\infty}{u_\infty} \right|, \quad \left| \frac{Q}{c_p T_\infty} \right|$$

sowie deren Ableitungen von derselben Ordnung klein sind. Dieser Fall ist nicht aus der Luft gegriffen, sondern entspricht durchaus praktisch realisierbaren Verhältnissen. Schätzt man z. B. die freiwerdende Wärme bei Kondensation des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes ab, so kommt man für  $\frac{Q}{c_p T_\infty}$  durchaus in die Größenordnung der  $u$ - und der  $v$ -Störung bei einem schlanken Profil. Damit wird aus (II.5) durch Linearisierung

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial \left( \frac{u-u_\infty}{u_\infty} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{v-v_\infty}{u_\infty} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right). \quad (\text{III.1})$$

In [2] wird dagegen die rechte Seite von (II.5) vollständig vernachlässigt mit der Begründung, daß diese Glieder nur dann auftreten, wenn die Wärmezufuhr „sehr groß“ ist. Andererseits wird dann aber die Wärmezufuhr in dem Faktor  $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$  von  $\frac{\partial u}{\partial x}$  mitgenommen, indem der Einfluß der zugeführten Wärme auf die Schallgeschwindigkeit berücksichtigt wird. Dies ist inkonsequent und widerspricht der früher vorgenommenen Vernachlässigung.

Führen wir die Linearisierung auch in den Wirbelgleichungen durch, so folgt

$$T_\infty \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (\text{III.2a})$$

$$u_\infty \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = T_\infty \frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (\text{III.2b})$$

Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Konsequenz. (III.2a) führt nach Integration zu

$$T_\infty s(x, y) = Q(x, y) + k(y). \quad (\text{III.3})$$

Für die Funktion  $k(y)$  liefert der Grenzübergang  $x \rightarrow -\infty$ , da im Unendlichen keine Wärme zugeführt wird, die Aussage

$$k(y) = T_\infty s(-\infty, y) = T_\infty s_\infty.$$

Ist im Unendlichen keine Entropieschichtung vorhanden, so wird  $k(y) = T_\infty s_\infty = \text{konst.}$  Berücksichtigen wir dies in (III.3), so liefert (III.2b) das Ergebnis

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (\text{III.4})$$

In erster Näherung gilt also in unserem Fall noch die Drehungsfreiheit. Das ist bei dieser Strömung mit Wärmezufuhr ein durchaus nichttriviales Ergebnis und offensichtlich mit eine Folge der anfangs eingeführten Größenordnungsbeziehungen. (III.4) wird durch ein Potential  $\varphi(x, y)$  erfüllt mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{u - u_\infty}{u_\infty}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{v - v_\infty}{u_\infty}.$$

(III.1) schreibt sich dann in der Form

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right). \quad (\text{III.5})$$

Die Interpretation dieser Gleichung ist sehr einfach! Es handelt sich im vorliegenden Fall um die wohlbekannt lineare Potentialgleichung, bei der auf der rechten Seite lediglich die Wärmezufuhr als Quellglied auftritt.

#### IV. Das Ähnlichkeitsgesetz für $M_\infty \leq 1$

Das abzuleitende Ähnlichkeitsgesetz verknüpft verschiedene Stromfelder miteinander. Betrachtet werden hierbei Profile, die ein und derselben Klasse angehören und sich nur durch den Wert des Dickenparameters  $\tau$  voneinander unterscheiden. Die Randbedingung am schlanken Profil lautet<sup>2</sup>

$$\varphi_y(x, 0) = \frac{dh}{dx} = \tau \frac{df}{dx}, \quad (\text{IV.1})$$

wobei  $h = h(x)$  die einzelne Profilkontur,  $f = f(x)$  dagegen die Profilklassse charakterisiert. Es ist für eine Ähnlichkeitsbetrachtung erforderlich, daß auch die verschiedenen Wärmequellenverteilungen durch affine Transformationen auseinander hervorgehen. Das heißt, wir setzen

$$\frac{Q(x, y)}{c_p T_\infty} = q g(x, y). \quad (\text{IV.2})$$

$q$  ist hierin der Wärmeparameter und  $g(x, y)$  die universelle Quellverteilungsfunktion. Damit gehen bei jeder Profilströmung mit Wärmezufuhr also drei Parameter ein, nämlich  $M_\infty$ ,  $\tau$  und  $q$ . Wir betrachten nun zwei Strömungen (Index 1, 2) und fragen, welcher Zusammenhang zwischen den Stromfeldern besteht. Die Gleichungen lauten

$$(1 - M_{\infty 1}^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = q_1 g_x, \quad \varphi_y(x, 0) = \tau_1 f'(x), \quad (\text{IV.3a})$$

$$(1 - M_{\infty 2}^2) \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = q_2 g_\xi, \quad \Phi_\eta(\xi, 0) = \tau_2 f'(\xi). \quad (\text{IV.3b})$$

Die lineare Transformation

$$\xi = x, \quad \eta = a y, \quad \varphi(x, y) = A \Phi(\xi, \eta) \quad (\text{IV.4})$$

<sup>2</sup> Im folgenden wird nur der Fall verschwindender Anstellung betrachtet.

führt die beiden Differentialgleichungen und die Randbedingungen ineinander über, wenn gilt

$$a = \sqrt{\frac{1 - M_{\infty 1}^2}{1 - M_{\infty 2}^2}}, \quad A = \frac{\tau_1}{\tau_2} \sqrt{\frac{1 - M_{\infty 2}^2}{1 - M_{\infty 1}^2}} \quad (\text{IV. 5})$$

und außerdem

$$\frac{q_1}{\tau_1 \sqrt{|1 - M_{\infty 1}^2|}} = \frac{q_2}{\tau_2 \sqrt{|1 - M_{\infty 2}^2|}}. \quad (\text{IV. 6})$$

(IV. 4) und (IV. 5) ergeben zusammen sofort die aus der linearen Unter- und Überschalltheorie geläufigen Transformationen der  $u$ - und  $v$ -Störungen

$$\left(\frac{u - u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)_1 \frac{\sqrt{|1 - M_{\infty 1}^2|}}{\tau_1} = \left(\frac{u - u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)_2 \frac{\sqrt{|1 - M_{\infty 2}^2|}}{\tau_2}, \quad (\text{IV. 7 a})$$

$$\left(\frac{v}{u_{\infty}}\right)_1 \frac{1}{\tau_1} = \left(\frac{v}{u_{\infty}}\right)_2 \frac{1}{\tau_2}. \quad (\text{IV. 7 b})$$

Allerdings können diesmal zum Unterschied gegenüber dem klassischen Fall ohne Wärmezufuhr nur solche Strömungen miteinander verglichen werden, bei denen nach (IV. 6) die folgende Kombination der Größen  $q$ ,  $\tau$ ,  $M_{\infty}$

$$A = \frac{q}{\tau \sqrt{|1 - M_{\infty}^2|}} \quad (\text{IV. 8})$$

in beiden Feldern übereinstimmt.  $A$  ist ein neuer Parameter, den man in der Sprache der Ähnlichkeitsgesetze auch als *reduzierten Wärmeparameter* auffassen kann. Der Sachverhalt ist hier analog dem Fall der schallnahen Strömungen, wo die auftretenden Größen  $\varkappa$ ,  $\tau$ ,  $M_{\infty}$  in beiden Feldern bekanntlich so gewählt werden müssen, daß der schallnahe Ähnlichkeitsparameter (hier in der SPREITERSCHEN Darstellung)

$$\varkappa = \frac{|1 - M_{\infty}^2|}{[(\varkappa + 1) \tau M_{\infty}^2]^{2/3}}$$

invariant ist.

Das erhaltene Ähnlichkeitsgesetz kann wie im Fall ohne Wärmezufuhr in verschiedener Form ausgesprochen werden. Ist z. B. die Profildicke in den beiden Stromfeldern gleich ( $\tau_1 = \tau_2$ ), so kommt die Regel von PRANDTL-GLAUERT. Bleibt die  $u$ -Störung bei der Transformation unverändert, so erhält man die Potentiallinienanalogie. Transformiert sich  $v$  wie  $y$ , so liegt die Stromlinienanalogie vor. Der Leser kann leicht in diesen drei Fällen unter Benutzung von (IV. 6) die zugehörigen Zusammenhänge der Wärmeparameter bestimmen.

### V. Lösung der Differentialgleichung (III. 5)

Zur Erläuterung des oben beschriebenen Sachverhaltes bestimmen wir jetzt die Lösung der Differentialgleichung (III. 5). Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall  $M_{\infty} < 1$ . Führen wir eine PRANDTL-GLAUERT-Transformation der Koordinaten  $x$  und  $y$  durch und bezeichnen der Einfachheit halber die neuen Koordinaten wieder mit denselben Symbolen, so gilt:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{1}{1 - M_{\infty}^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{c_p T_{\infty}} \right). \quad (\text{V. 1})$$

Diese inhomogene Potentialgleichung wird in bekannter Weise durch eine zweidimensionale Singularitätenbelegung gelöst, wobei für die Störgeschwindigkeiten folgendes Ergebnis kommt:

$$\varphi_x(x, y) = \varphi_{hx}(x, y) - \frac{1}{2\pi(1-M_\infty^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right)}{\partial \xi} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\xi d\eta, \quad (\text{V. 2a})$$

$$\varphi_y(x, y) = \varphi_{hy}(x, y) - \frac{1}{2\pi(1-M_\infty^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right)}{\partial \xi} \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} d\xi d\eta. \quad (\text{V. 2b})$$

Hierin bedeutet  $\varphi_h$  diejenige Lösung der homogenen Gleichung (V.1) die die vorgegebene Randbedingung am Körper erfüllt. Ist  $\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right)$  bezüglich  $\eta$  eine gerade Funktion — was wir annehmen wollen — so erfüllt dann auch  $\varphi_y$  die vorgeschriebene Randbedingung.

Von besonderem Interesse ist für uns der Widerstandskoeffizient. Für ein symmetrisches Profil der Länge 1 kommt

$$c_w = c_w(Q=0) + \frac{2}{\pi(1-M_\infty^2)} \int_{x=0}^1 \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right)}{\partial \xi} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + \eta^2} d\xi d\eta \right\} \frac{dh}{dx} dx. \quad (\text{V. 3})$$

$c_w(Q=0)$  ist hierin der Widerstandskoeffizient bei fehlender Wärmezufuhr. Auf Grund des D'ALEMBERTSchen Paradoxons ist dieser Wert gleich Null. Vertauscht man in (V.3) die Integrationsreihenfolge und beachtet, daß für die Lösung der homogenen Differentialgleichung die folgende Beziehung gilt ( $\beta = \sqrt{1-M_\infty^2}$ )

$$\frac{\partial \varphi_h(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\pi\beta} \int_0^1 \frac{dh}{dx} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + \eta^2} dx,$$

so wird

$$c_w = \frac{2}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left( \frac{Q(\xi, \eta)}{c_p T_\infty} \right)}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_h(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\xi d\eta. \quad (\text{V. 4})$$

Geht man hierin zu reduzierten Variablen über, so bestätigt man sofort, daß das oben hergeleitete Ähnlichkeitsgesetz enthalten ist. Es wird nämlich

$$c_w \frac{\beta}{\tau^2} = 2 A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(\xi, \eta)}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \varphi_h(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\beta}{\tau} \right) d\xi d\eta. \quad (\text{V. 5})$$

(V.4) zeigt überdies in einfacher Weise den Einfluß einer Wärmezufuhr durch Quellen. Unter dem Integral steht das Produkt der Quellstärke und der Geschwindigkeitsverteilung bei fehlender Wärmezufuhr. Eine Aufheizung in denjenigen Teilen des Stromfeldes, in denen Untergeschwindig-

keiten vorliegen, führt demnach zu einem Vortrieb, während eine Aufheizung bei Übergeschwindigkeit einen Widerstand liefert. Erfolgt die wesentliche Wärmezufuhr in unmittelbarer Körperrnähe, so besagt dies, daß für  $M_\infty < 1$  eine Wärmezufuhr in der Umgebung des vorderen und hinteren Staupunktes zu einem Vortrieb führt. Diese Aussagen stammen von OSWATITSCH [1], sie wurden dort auf anderem Wege gewonnen.

Wir kommen nun zum Fall  $M_\infty > 1$ . Führen wir auch hier eine PRANDTL-GLAUERT-Transformation der Koordinaten  $x$  und  $y$  durch und bezeichnen die neuen Größen wieder mit denselben Symbolen, so gilt

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = -\frac{1}{M_\infty^2 - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right). \quad (\text{V.6})$$

Die Transformation auf die Charakteristiken  $\xi = x - y$ ,  $\eta = x + y$  führt auf

$$4\varphi_{\xi\eta} = -\frac{1}{M_\infty^2 - 1} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right).$$

Durch Integration kommt

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_h(\xi, \eta) - \frac{1}{4(M_\infty^2 - 1)} \iint \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right) du dv, \quad (\text{V.7})$$

wobei im Doppelintegral über alle Wärmequellen zu integrieren ist, die sich im Abhängigkeitsgebiet des Aufpunktes befinden. Transformieren wir in (V.7) wieder auf die Variablen  $x, y$  zurück, so wird

$$\varphi(x, y) = \varphi_h(x, y) - \frac{1}{2(M_\infty^2 - 1)} \iint \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{Q(s, t)}{c_p T_\infty} \right) ds dt. \quad (\text{V.8})$$

$\varphi_h(x, y)$  bedeutet die Lösung der homogenen Gleichung (V.6), die der Randbedingung genügt. Denken wir uns der Einfachheit halber die Wärme in einem schmalen horizontalen Streifen der Breite  $\delta$  in der unmittelbaren Nachbarschaft des Körpers zugeführt, so gilt

$$\varphi(x, 0) - \varphi_h(x, 0) = -\frac{1}{2(M_\infty^2 - 1)} \int_0^\delta \left( \frac{Q(x, t)}{c_p T_\infty} - \frac{Q(0, t)}{c_p T_\infty} \right) dt.$$

Ist die Wärmequellstärke in  $y$  eine gerade Funktion, so kommt für ein symmetrisches Profil der Länge 1

$$c_w = c_w(Q=0) - \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_{x=0}^1 \int_{t=0}^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q(x, t)}{c_p T_\infty} \right) \frac{\partial \varphi_h(x, 0)}{\partial x} dt dx. \quad (\text{V.9})$$

Diese Beziehung entspricht im wesentlichen der Darstellung (V.4) im Unterschall. Diesmal tritt allerdings auch bei fehlender Wärmezufuhr ein Widerstand — der Wellenwiderstand — auf. An (V.9) liest man sofort ab, daß im Überschall eine Wärmezufuhr am Körperheck — wegen der dort vorhandenen Übergeschwindigkeiten — zu einer Widerstandsverringerung führt. Eine Aufheizung an der Körperspitze ergibt dagegen eine Widerstandserhöhung. Auch diese Aussagen finden sich bereits bei OSWATITSCH [1].



## VI. Das Ähnlichkeitsgesetz für die Schallnähe

Zur Herleitung der Differentialgleichungen in diesem Fall ist es zunächst wieder erforderlich, mit einer Aussage über die Größenordnung der zugeführten Wärme zu beginnen.

Im Linearisierungsbereich haben wir angenommen, daß die Wärmezufuhr die Größenordnung der  $u$ - und  $v$ -Störung besitzen soll. In Schallnähe wird man zwangsläufig dazu geführt, daß es vernünftig ist, nur eine geringere Wärmezufuhr zu betrachten. Das deckt sich auch mit den Erfahrungen aus der Stromfadentheorie. Bekanntlich gilt für den Stromfaden konstanten Querschnittes die folgende Beziehung für die kritische Wärmemenge (s. z. B. [4], S. 60):

$$\frac{Q_{\max}}{c_p T_\infty} = \frac{1}{2(\kappa + 1)} \frac{(M_\infty^2 - 1)^2}{M_\infty^2}. \quad (\text{VI.1})$$

$Q_{\max}$  geht also in diesem Fall für  $M_\infty \rightarrow 1$  sogar gegen Null. Eine solche Einschränkung wird bei uns im Fall der unendlich ausgedehnten Strömung nicht bestehen. Die Wärmezufuhr wirkt jedoch generell wie eine Querschnittsverengung. Da die schallnahen Strömungen sehr empfindlich gegenüber Querschnittsänderungen sind, ist es plausibel, daß die zugelassenen Wärmemengen in diesem Fall nur sehr klein sein dürfen.

Der Energiesatz (II.7) liefert für die Schallgeschwindigkeit die Darstellung

$$\frac{c^2}{c_\infty^2} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{W^2}{u_\infty^2}\right) + \frac{Q}{c_p T_\infty}.$$

Wir benutzen dies in der Entwicklung von  $1 - M^2$  und berücksichtigen dabei nur die linearen Glieder. Nach kurzer Zwischenrechnung kommt

$$1 - M^2 = 1 - M_\infty^2 - M_\infty^2 [2 + (\kappa - 1) M_\infty^2] \frac{u - u_\infty}{u_\infty} + M_\infty^2 \frac{Q}{c_p T_\infty} + \dots \quad (\text{VI.2})$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Wärmezufuhr von kleinerer Größe als die  $u$ -Störung ist. In diesem Fall können wir zwar in (VI.2) den additiven Wärmeterm vernachlässigen, müssen jedoch im allgemeinen das erste Glied der rechten Seite von (II.5) nach wie vor beibehalten. Es kommt damit, wenn wir die SPREITERSche Form des nichtlinearen Gliedes in der schallnahen Gleichung benutzen, die folgende Differentialgleichung

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (\kappa + 1) M_\infty^2 \varphi_x \varphi_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{c_p T_\infty} \right). \quad (\text{VI.3})$$

Machen wir auch in diesem Fall die Ähnlichkeitstransformation (IV.4) und beachten die Randbedingung (IV.1), so erhält man nach kurzer Zwischenrechnung wiederum die Beziehungen (IV.5). Weiterhin treten diesmal die folgenden beiden Ähnlichkeitsparameter auf:

$$\kappa = \frac{|1 - M_\infty^2|}{[(\kappa + 1) M_\infty^2 \tau]^{1/2}} = \text{schallnaher Parameter}, \quad (\text{VI.4})$$

$$A = \frac{q}{\tau |1 - M_\infty^2|} = \text{Wärmeparameter}. \quad (\text{VI.5})$$

Es kommt also — wie zu erwarten — das bekannte Ähnlichkeitsgesetz mit der aus Abschnitt IV geläufigen Zusatzforderung für die Wärme.

Wir wollen diese Zusammenhänge noch etwas diskutieren. (VI.4) liefert — wenn wir von  $\kappa$  absehen — eine Bindung zwischen  $M_\infty$  und  $\tau$ , die erfüllt sein muß, damit Ähnlichkeit der Stromfelder gegeben ist. Bekanntlich kann  $\chi$  auch als eine Potenz der sogenannten reduzierten Profildicke geschrieben werden. Die Aussage  $\chi = \text{konst.}$  ist dann gleichbedeutend mit der Forderung, daß nur Umströmungen von Profilen gleicher reduzierter Dicke miteinander verglichen werden können. Die folgende Kombination von (VI.4) und (VI.5)

$$\frac{A}{\chi^{2/3}} = \frac{q(\kappa + 1) M_\infty^2}{(M_\infty^2 - 1)^2} \quad (\text{VI.6})$$

ergibt — wieder abgesehen von  $\kappa$  — den entsprechenden Zusammenhang zwischen  $q$  und  $M_\infty$ , der in den beiden Stromfeldern erfüllt sein muß.

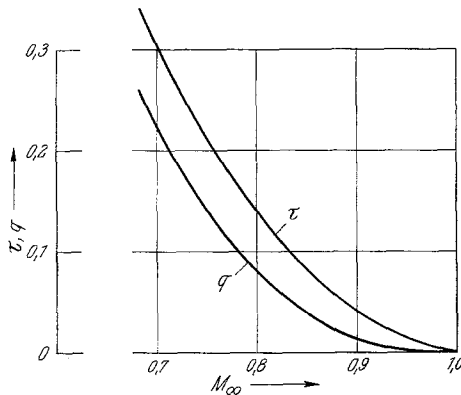


Abb. 1. Zugeführte Wärme  $q$  und Profildicke  $\tau$  als Funktion der Machzahl  $M_\infty$  für  $\chi = 1$  und  $A = 1$

In Abb. 1 sind diese Beziehungen für  $\chi = 1$  und  $A = 1$  dargestellt. Gibt man z. B.  $M_\infty$  vor, so kann man die zugehörigen Werte  $q$  und  $\tau$  sofort ablesen.

Vergleicht man (VI.6) mit (VI.1), so gelangt man zu der interessanten Feststellung, daß für die Stromfadentheorie bei konstantem Querschnitt offenbar die Beschränkung  $\frac{A}{\chi^{2/3}} \leq \frac{1}{2}$  gilt.

Wir betrachten nun noch die folgende Kombination

$$A\sqrt{\chi} = \frac{q}{\tau^{1/3}(\kappa + 1)^{1/3} M_\infty^{2/3}}$$

Für  $M_\infty \rightarrow 1$  kommt man damit zu dem Ähnlichkeitsparameter bei Schall

$$\bar{A} = \frac{q}{\tau^{1/3}(\kappa + 1)^{1/3}} \quad (\text{VI.7})$$

Dieser Ausdruck muß im Fall der Schallanströmung in den beiden betrachteten Feldern übereinstimmen. Den Parameter (VI.7) erhält man übrigens auch sofort, wenn man die Gl. (VI.3) im Falle  $M_\infty = 1$  der Transformation (IV.4) unterwirft. Für die Geschwindigkeiten und die Ortskoordinaten ergeben sich hierbei dieselben Zusammenhänge wie im Fall  $q = 0$ .

Damit sind auch in Schallnähe einschließlich des Grenzfalles  $M_\infty \rightarrow 1$  die Ähnlichkeitsgesetze für Strömungen mit Wärmezufuhr hergeleitet.

#### Literatur

- [1] OSWATTSCH, K.: Antriebe mit Heizung bei Überschallgeschwindigkeit. DVL-Bericht Nr. 90 (1959).
- [2] KRZYWOBLOCKI, M. Z. v., F. Y. HORIUCHI und J. J. VODA: On the similarity rules in diabatic flow. Proceedings of the 3. US National Congress of applied Mechanics. S. 771/775 (1958).
- [3] VAZSONYI, A.: Quart. Appl. Math. **3**, 29/37 (1945).
- [4] ZIEREP, J.: Vorlesungen über theoretische Gasdynamik. Karlsruhe 1963.

*Prof. Dr. Ing. Jürgen Zierep,  
Technische Hochschule Karlsruhe, Kaiserstraße 12*