Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen

Von Paul Finsler, Zürich

Einleitung

Eine quadratische Form Q in den $n+1$ Variabeln $\mathbf{x} \equiv (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ mit reellen Koeffizienten heißt *definit*, wenn sie für alle reellen Werte der Variabeln, die nicht sämtlich verschwinden, nur positive oder nur negative Werte annehmen kann; sie heißt *semidefinit*, wenn außerdem noch der Wert Null angenommen wird; sie heißt *indefinit* in den übrigen Fällen, wenn also sowohl positive als auch negative Werte und daher auch der Wert Null angenommen wird.

Es soll im folgenden untersucht werden, *unter welchen Umständen man schließen kann, daß in einer linearen Schar von quadratischen Formen* $\Sigma \lambda_i Q_i$ *wenigstens eine definite oder eine semidefinite Form enthalten ist.* Die $Q_i (i = 0, 1, \ldots, p)$ sind dabei gegebene quadratische Formen, während die Parameter λ_i alle reellen Werte durchlaufen, die nicht gleichzeitig verschwinden. In vielen Fällen kann aber speziell $\lambda_0 = 1$ vorausgesetzt werden.

Die Beantwortung der gestellten Frage hängt eng mit der Theorie der „Freigebilde" zusammen, die ich in der vorausgehenden Abhandlung[1]) betrachtet habe. Da sich diese Betrachtungen aber in der Hauptsache auf den dreidimensionalen Raum beschränken, so werden auch die folgenden Resultate, außer für zweigliedrige Scharen ($p = 1$), zunächst nur für höchstens quaternäre Formen abgeleitet ($n \leqq 3$); es ist aber leicht zu erkennen, daß sie sich ohne weiteres auch auf beliebig viele Variable ausdehnen lassen, sobald die entsprechenden Sätze über die Freigebilde im n-dimensionalen Raum zur Verfügung stehen.

§ 1. Zweigliedrige Scharen

Für das Auftreten von *definiten* Formen in zweigliedrigen Scharen gilt:

Satz 1. *In der linearen Schar von quadratischen Formen* $Q_a + \lambda Q_b$ *in* $n+1$ *Variabeln gibt es für* $n \neq 1$ *dann und nur dann eine definite Form, wenn die Formen* Q_a *und* Q_b *keine gemeinsame reelle Nullstelle* $\mathbf{x} \neq 0$ *besitzen; für beliebiges n dann und nur dann, wenn die eine der Formen für die reellen Nullstellen der andern stets positiv oder stets negativ ist.*

[1]) Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde), Comm. Math Helv., dieser Band, S. 172.

Eine gemeinsame Nullstelle von Q_a und Q_b ist für jedes λ auch Nullstelle von $Q_a + \lambda Q_b$, und wenn die eine der Formen Q_a und Q_b für die reellen Nullstellen der andern verschiedene Vorzeichen annimmt, so gilt dasselbe auch für $Q_a + \lambda Q_b$. Die angegebenen Bedingungen sind also notwendig.

Die Variabeln $\mathfrak{x}$, die nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, können als homogene Koordinaten in einem n-dimensionalen projektiven Raum L_n gedeutet werden; die Nullstellen einer quadratischen Form Q ergeben dann ein Gebilde zweiten Grades in diesem Raum, das kurz als „Fläche" bezeichnet werde.

Jede solche Fläche $Q = 0$ ist für $n > 1$ im Reellen zusammenhängend, d. h. irgend zwei reelle Punkte A und B derselben können durch einen auf der Fläche verlaufenden reellen Kurvenbogen verbunden werden; ebenso ist auch das Gebiet $Q > 0$ und das Gebiet $Q < 0$ im reellen L_n zusammenhängend. Man erkennt dies, wenn man durch A und B eine zweidimensionale Ebene legt und die Verbindung in dieser Ebene vornimmt.

Wenn sich also die beiden Flächen $Q_a = 0$ und $Q_b = 0$ im Reellen nicht treffen, so können sie sich für $n > 1$ auch nicht durchsetzen; d. h. jede der Formen Q_a und Q_b besitzt dann für die reellen Nullstellen der andern nur einerlei Vorzeichen.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß in der Schar $Q_a + \lambda Q_b$ eine definite Form enthalten ist, wenn Q_a für alle reellen Nullstellen von Q_b einerlei Vorzeichen besitzt, wenn also die Fläche $Q_b = 0$ im Reellen z. B. ganz im Gebiet $Q_a > 0$ enthalten ist.

Dabei kann Q_a als indefinit vorausgesetzt werden. Wäre nämlich weder Q_a noch Q_b indefinit (sondern z. B. semidefinit), so wäre $Q_a + Q_b$ oder $Q_a - Q_b$ definit; und wenn nur Q_b indefinit ist, so werde λ durch $\frac{1}{\lambda}$ ersetzt und die Rolle von Q_a und Q_b vertauscht.

Jeder reelle Punkt P des Raumes ist in einer Fläche $Q_a + \lambda Q_b = 0$ enthalten, wenn dem Wert $\lambda = \infty$ die Fläche $Q_b = 0$ zugeordnet wird. Es gibt also im Gebiet $Q_a > 0$ und im Gebiet $Q_a < 0$ Flächen der Schar, und ein stetiger Übergang vom einen ins andere Gebiet ist im Reellen nur mit Überschreiten der Fläche $Q_a = 0$, also für $\lambda = 0$ möglich. Läßt man aber den Parameter λ alle reellen Werte durchlaufen, so muß man ins ursprüngliche Gebiet zurückgelangen, und der zweite Übergang ist nur durch das Imaginäre möglich. Daraus folgt aber, daß in der linearen Schar definite Formen vorkommen müssen, wobei aus Stetigkeitsgründen der Wert $\lambda = \infty$ vermieden werden kann.

Wir brauchen noch den folgenden

Hilfssatz. *Wenn die quadratischen Formen Q_α und Q_β indefinit sind, und Q_α nimmt im Reellen für $Q_\beta = 0$ entgegengesetzte Vorzeichen an, so nimmt auch Q_β für $Q_\alpha = 0$ entgegengesetzte Vorzeichen an.*

Eine indefinite quadratische Form nimmt in jeder Umgebung einer reellen Nullstelle sowohl positive als auch negative Werte an. Da nun Q_β im Gebiet $Q_\alpha > 0$ und im Gebiet $Q_\alpha < 0$ Nullstellen besitzt, so gibt es Gebiete, die den Werten von Q_α und Q_β entsprechend mit $++$, $+-$, $-+$ und $--$ zu bezeichnen sind. Da aber die Gebiete $Q_\beta > 0$ und $Q_\beta < 0$ zusammenhängend sind, so kann man einen Punkt von $++$ mit einem Punkt von $-+$ durch einen Bogen verbinden, der im Gebiet $Q_\beta > 0$ verläuft und $Q_\alpha = 0$ trifft, und kann ebenso von $+-$ nach $--$ einen Bogen ziehen, der im Gebiet $Q_\beta < 0$ verläuft und $Q_\alpha = 0$ trifft. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn der Quotient $Q_a : Q_b$ nicht konstant ist, so gibt es in der Schar $\alpha Q_a + \beta Q_b$ immer *indefinite* Formen. Durch einen reellen Punkt A, der nicht gemeinsame Nullstelle von Q_a und Q_b ist, geht nämlich eine Fläche $Q_1 = 0$ der Schar, und durch einen reellen Punkt B, der nicht auf $Q_1 = 0$ liegt, geht eine Fläche $Q_2 = 0$ der Schar, die den Punkt A nicht enthält. Dann ist aber wenigstens eine der Formen $Q_1 + Q_2$ und $Q_1 - Q_2$ indefinit, da sie in A und B entgegengesetzte Vorzeichen annimmt.

Das Auftreten von *semidefiniten* Formen bestimmt sich weiter nach

Satz 2. *In der linearen Schar von quadratischen Formen $\alpha Q_a + \beta Q_b$ gibt es, wenn der Quotient $Q_a : Q_b$ nicht konstant ist, stets indefinite Formen und dann und nur dann wenigstens eine semidefinite Form, wenn die eine der Formen Q_a und Q_b für die reellen Nullstellen der andern nicht entgegengesetzte Vorzeichen annehmen kann.*

Es sei etwa die Fläche $Q_a = 0$ im Reellen ganz im Bereich $Q_b \geqq 0$ enthalten. Man setze dann $\beta : \alpha = \lambda$ und $Q_a + \lambda Q_b = Q_\lambda$. Wie schon gezeigt, gibt es in der Schar indefinite Formen, und wenn noch definite Formen auftreten, so gibt es als Übergang auch semidefinite.

Es werde nun angenommen, daß alle Formen Q_λ indefinit seien.

Würde Q_b für die reellen Nullstellen von Q_λ $(\lambda \neq 0, \infty)$ entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, so würde dasselbe auch für $Q_\lambda - \lambda Q_b = Q_a$ gelten, und da Q_a und Q_λ indefinit sind, so würde nach dem Hilfssatz auch umgekehrt Q_λ, und damit auch $\frac{1}{\lambda} Q_\lambda - \frac{1}{\lambda} Q_a = Q_b$, für die reellen Nullstellen von Q_a entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, in Widerspruch zu der früheren Annahme.

Jede Fläche $Q_\lambda = 0$ liegt also im Reellen ganz im Bereich $Q_b \geqq 0$ oder im Bereich $Q_b \leqq 0$; und da Q_λ indefinit ist, so gibt es für $\lambda \neq \infty$ Punkte der Fläche, die im Innern des Gebiets $Q_b > 0$ oder im Innern des Gebiets $Q_b < 0$ liegen. Daraus folgt aber, daß es zu jedem endlichen Wert von λ eine Umgebung von λ gibt, für welche dieses zugehörige Gebiet sich nicht ändert. Nun kann man die ganze λ-Achse mit solchen Umgebungen überdecken, und es würde folgen, daß alle Flächen $Q_\lambda = 0$ gleich wie $Q_a = 0$ im Bereich $Q_b \geqq 0$ liegen müßten. Dies ist aber unmöglich, wenn auch Q_b indefinit ist. Es muß also wenigstens eine der Formen semidefinit sein.

§ 2. Mehrgliedrige Scharen

Speziell für binäre Formen gilt:

Satz 3. *In einer linearen Schar von binären quadratischen Formen, die drei linear unabhängige Formen enthält, gibt es stets auch definite und semidefinite Formen.*

Dies folgt daraus, daß sich mit drei linear unabhängigen jede beliebige solche Form linear darstellen läßt.

Bei mehrgliedrigen linearen Scharen in mehr als zwei Variabeln betrachten wir nicht den allgemeinsten Fall, sondern setzen in Satz 4 voraus, daß die Schar $\Sigma \lambda_i Q_i$ sich in der Form $Q_a + \Sigma \lambda_j Q_j$ so darstellen läßt, daß die Gleichungen $\Sigma \lambda_j Q_j = 0$ geometrisch alle Gebilde zweiten Grades ergeben, die ein festes algebraisches Gebilde G enthalten. Die Punkte von G sind Nullstellen der Formen Q_j, und damit in der gesamten Schar eine definite Form enthalten ist, muß offenbar Q_a im Reellen für diese gemeinsamen Nullstellen dasselbe Vorzeichen besitzen. Es zeigt sich (zunächst für $n \leqq 3$, vgl. die Einleitung), daß diese Bedingung dann und im wesentlichen nur dann hinreichend ist, wenn das Gebilde G ein reelles Freigebilde darstellt.

Es gelten die Sätze:

Satz 4. *In der linearen Schar von quadratischen Formen* $Q_a + \Sigma \lambda_j Q_j$ (bezw. $\alpha Q_a + \Sigma \lambda_j Q_j$) *in* $n + 1$ *Variabeln* ($n \leqq 3$) *gibt es stets dann positiv oder negativ definite Formen* (*bezw. wenigstens eine semidefinite Form*), *wenn die Gleichungen* $\Sigma \lambda_j Q_j = 0$ *die sämtlichen Gebilde zweiten Grades darstellen, die ein festes reelles Freigebilde* G *enthalten, und* Q_a *für die reellen Punkte von* G *nur positive oder nur negative Werte* (*oder noch*[2]) *den Wert Null*) *annimmt.*

[2]) Q_a darf für die reellen Punkte von G nicht nur den Wert Null annehmen.

Satz 5. *Wenn die gemeinsamen Punkte der Gebilde zweiten Grades $Q_j = 0$ im projektiven $L_n (n \leqq 3)$ ein algebraisches Gebilde G ergeben, das im Reellen nicht Freigebilde ist, so kann man eine quadratische Form Q_a finden, welche für die reellen Punkte von G nur positive Werte annimmt, jedoch so, daß die lineare Schar $Q_a + \Sigma \lambda_j Q_j$ nur indefinite Formen enthält.*

Zum Beweis von Satz 4 bestimme man nach den Sätzen von § 4 der vorangehenden Arbeit ein Gebilde zweiten Grades $Q_b = 0$, welches G enthält und $Q_a = 0$ im Reellen nicht trifft (bezw. nicht durchsetzt). Man kann nun Satz 1 (bezw. Satz 2) anwenden, um eine definite (semidefinite) Form $Q_a + \lambda Q_b$ (bezw. $\alpha Q_a + \beta Q_b$) zu finden; diese gehört der Schar an, denn Q_b läßt sich nach der Voraussetzung von Satz 4 in der Form $\Sigma \lambda_j Q_j$ darstellen. ($Q_a : Q_b$ ist nicht konstant, da $Q_a = 0$ G nicht enthalten darf.)

Satz 5 ist eine direkte Folge von Satz VI in § 5 der vorangehenden Arbeit, denn wenn $Q_a = 0$ von dem Gebilde $\Sigma \lambda_j Q_j = 0$, das G enthält, durchsetzt wird, so ist die Form $Q_a + \Sigma \lambda_j Q_j$ indefinit.

(Eingegangen den 23. Februar 1937.)