Math. Z. 189, 81–110 (1985)

Mathematische Zeitschrift

Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II

Siegfried Böcherer

Mathematisches Institut der Universität, Hebelstr. 29, D-7800 Freiburg, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

In [4] hatte ich die Siegelsche Eisensteinreihe $(n+m)$-ten Grades

$$\Psi^k_{n+m}(Z) = \sum_{\{C,D\}} \det(CZ+D)^{-k} \tag{1}$$

vom geraden Gewicht $k > n+m+1$ hinsichtlich der Aufspaltung

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}, \qquad z_1 \in \mathfrak{H}_n,\ z_4 \in \mathfrak{H}_m \tag{2}$$

untersucht. Dabei bezeichnet $\mathfrak{H}_n$ die Siegelsche Halbebene n-ten Grades, die aus allen komplexen symmetrischen n-reihigen Matrizen mit positiv definitem Imaginärteil besteht; in (1) ist über alle nicht assoziierten teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare $\{C, D\}$ zu summieren.

In Verbindung mit einem schönen Resultat von Garrett [12] hatten sich in [4] unter anderem Aussagen über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen sowie Formeln für Fourierkoeffizienten von verallgemeinerten Eisensteinreihen im Sinne von Klingen [17] ergeben.

In der vorliegenden Arbeit, die als Fortsetzung von [4] anzusehen ist, greife ich die Aufspaltung (2) im Spezialfall $n = m$ (dies war schon in [4] der eigentlich interessante Fall) nochmals auf.

Es wird zunächst ein Differentialoperator $\mathscr{D}_k$ eingeführt, der bezüglich der Aufspaltung (2) ein übersichtliches Transformationsverhalten zeigt:

Man bettet die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ vermöge

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M^{\uparrow} := \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$M^{\downarrow}:=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&a&0&b\\0&0&1&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$$

auf zwei Weisen in die Gruppe $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ ein.

Der Operator $\mathscr{D}_k$ erfüllt dann für alle holomorphen $f\colon \mathfrak{H}_{2n}\to\mathbb{C}$ und alle $M\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ die Vertauschungsrelationen

$$\mathscr{D}_k(f|_k M^{\uparrow})=(\mathscr{D}_k f)|_{k+1} M^{\uparrow} \tag{3a}$$

$$\mathscr{D}_k(f|_k M^{\downarrow})=(\mathscr{D}_k f)|_{k+1} M^{\downarrow}. \tag{3b}$$

Dabei wird die übliche Peterssonsche Schreibweise

$$f|_k\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det(CZ+D)^{-k}f((AZ+B)(CZ+D)^{-1})$$

benutzt.

Dieser Differentialoperator kann auch in anderem Zusammenhang von Interesse sein (im Falle $n=1$ ist ein ähnlicher Operator von Eichler und Zagier im Rahmen ihrer Untersuchungen über Jacobische Modulformen [8] eingeführt worden; die Ausführungen in [8, I, § 3] haben mir in mancher Hinsicht als Vorbild gedient). Eine Verallgemeinerung auf eine beliebige Aufspaltung (2) mit $m\neq n$ ist möglich; dabei wird man aber zwangsläufig auf vektorwertige Funktionen geführt, worauf ich in dieser Arbeit nicht eingehen will.
Die Untersuchung des Differentialoperators $\mathscr{D}_k$ – insbesondere der Nachweis der Transformationseigenschaften (3a), (3b) – bilden den mathematischen Kern der vorliegenden Arbeit; die Anwendungen, um deretwillen ich diesen Operator einführe, ergeben sich durch vergleichsweise einfache Rechnungen.

Der iterierte Operator

$$\mathscr{D}_k^{\nu}:=\mathscr{D}_{k+\nu-1}\circ\ldots\circ\mathscr{D}_k$$

führt für $\nu>0$ in Verbindung mit der Restriktion $z_2=0$ zu einer Abbildung

$$\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}\colon \mathfrak{M}_{2n}^k\to\mathfrak{S}_n^{k+\nu}\otimes\mathfrak{S}_n^{k+\nu},$$

wobei mit $\mathfrak{M}_n^k$ (bzw. $\mathfrak{S}_n^k$) der Raum der Siegelschen Modulformen (bzw. Spitzenformen) n-ten Grades vom Gewicht k bezeichnet sei.

Es wird dann gezeigt, daß die Ergebnisse aus [4] und [12] auch noch für $\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}\Psi_{2n}^k$ sinngemäß weiterhin gültig bleiben. Daraus erhält man eine Reihe interessanter Anwendungen:

In Abschnitt 5 werden die von Cohen [6] und Zagier [29] für $n=1$ eingeführten Modulformen verallgemeinert. Man erhält Modulformen mit rationalen Fourierkoeffizienten, deren Peterssonsches Skalarprodukt mit einer Spitzenform f durch einen speziellen Wert einer f zugeordneten Dirichletreihe ausgedrückt werden kann. Abschnitt 6 bringt dann Rationalitätsaussagen für spezielle Werte der Andrianovschen (Standard-)Zetafunktion einer Hecke-Eigenform. Solche Aussagen findet man (unter schärferen Bedingungen an n und k) auch bei Harris [14] und Sturm [25]. Dabei wird – in Anlehnung an eine Idee von Garrett [12] – entscheidend davon Gebrauch gemacht, daß die Siegelsche Eisensteinreihe Ψ_{2n}^k selbst rationale Fourierkoeffizienten hat.

Der Rest der Arbeit ist dem Basisproblem gewidmet.

Es wird zunächst gezeigt, daß man vermöge der Abbildung $\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}$ aus gewöhnlichen Thetareihen $2n$-ten Grades Thetareihen n-ten Grades mit harmonischen Koeffizienten gewinnen kann. Es handelt sich dabei um Reihen des Typs

$$\vartheta_{S,P}^n(z) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P(S^{\frac{1}{2}} G)\, e^{\pi i \operatorname{Spur}(S[G]z)}.$$

Dabei ist S die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form in m Variablen, mit $S^{\frac{1}{2}}$ wird wie üblich die positiv definite Wurzel aus S bezeichnet und P ist eine harmonische Form vom Gewicht ν. Solche Thetareihen sind für $n=1$ von Hecke [15] und für beliebiges n von Maaß [20] eingeführt worden. Wir betrachten hier nur Thetareihen $\vartheta_{S,P}^n$ zu geraden unimodularen quadratischen Formen S (diese existieren nur für $m \equiv 0 \bmod 8$). Bei festem m, n und ν spannen alle solchen Thetareihen einen Teilraum $B_{n,\frac{m}{2}+\nu}(m)$ von $\mathfrak{M}^{\frac{m}{2}+\nu}$ auf, für $\nu > 0$ handelt es sich um Spitzenformen.

Wichtige Resultate über diese Räume stammen von Freitag: Er hat sie funktionentheoretisch charakterisiert [9] und gezeigt, daß sie invariant sind unter den Heckeoperatoren [10]. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit wird – auf ähnlichem Wege wie in [4], wo der Fall $\nu = 0$ behandelt wurde – das Hauptergebnis dieser Arbeit bewiesen: Es gilt

$$B_{n,l}(m) = \mathfrak{S}_n^l \qquad \text{für alle Gewichte } l > \frac{m}{2},$$

sofern nur $m \equiv 0 \bmod 8$ und $m > 4n$; darüber hinaus kann man unter den genannten Bedingungen jede Eigenform aller Heckeoperatoren in einfacher Weise explizit als endliche Linearkombination von Thetareihen aus $B_{n,l}(m)$ darstellen. Sätze dieses Typs gibt es bisher nur für $n=1$ [26, 8].

Herr Dr. R. Weissauer (Heidelberg) hat mir freundlicherweise in einem Brief mitgeteilt, daß er – auf völlig anderem Wege – ebenfalls zu einer Lösung des Basisproblems gelangt ist.

Ich danke Herrn Prof. Zagier für die Übersendung der Arbeit [8] sowie Herrn Dr. Weissauer, der mich auf einen Fehler in der Formel (63) aufmerksam gemacht hat.

Bezeichnungen. Einige Standardbezeichnungen werden aus [4] übernommen. Satz 7 und die Gleichung (21) aus [4] werden in der Form Satz I.7 und (I.21) zitiert.

Mit $\operatorname{Hol}(\mathfrak{H}_n)$ wird die Menge der holomorphen Funktionen auf $\mathfrak{H}_n$ bezeichnet.

2. Der Differentialoperator $\mathcal{D}_k$

2.1. Die $\sqcap$-Multiplikation

Es wird der benötigte formale Apparat der multilinearen Algebra eingeführt. Genaueres findet man in [11, III, §6].

Es sei k ein kommutativer Ring mit Eins. Man versehe den freien Modul $V=k^n$ mit der kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n$. Dann bilden die Elemente $e_a = e_{a_1} \wedge \dots \wedge e_{a_p}$ eine Basis von $\Lambda^p V$, der p-ten äußeren Potenz von V $(0 \leqq p \leqq n)$, wenn $a=\{a_1, \dots, a_p\}$ mit $a_1 < \dots < a_p$ alle p-elementigen Teilmengen von $N=\{1, \dots, n\}$ durchläuft $\left(\text{man schreibe dafür kurz: } a \in \binom{N}{p}\right)$.

Jeder linearen Abbildung $A\colon \Lambda^p V \to \Lambda^p V$ entspricht dann vermöge

$$A e_a = \sum_x A_x^a e_x$$

eine $\binom{n}{p}$-reihige Matrix $(A_b^a)_{a, b \in \binom{N}{p}}$. Zwischen der Abbildung A und der zugehörigen Matrix wollen wir nicht mehr unterscheiden. Jedem Paar linearer Abbildungen $A\colon \Lambda^p V \to \Lambda^p V$ und $B\colon \Lambda^q V \to \Lambda^q V$ wird eine lineare Abbildung $A \sqcap B\colon \Lambda^{p+q} V \to \Lambda^{p+q} V$ zugeordnet gemäß

$$(A \sqcap B)_b^a = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \sum_{\substack{a=a' \cup a'' \\ b=b' \cup b''}} \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, A_{b'}^{a'} B_{b''}^{a''}.$$

Für $a'=\{a'_1, \dots, a'_p\}$, $a''=\{a''_1, \dots, a''_q\}$ mit $a'_1 < \dots < a'_p$ und $a''_1 < \dots < a''_q$ sei dabei $\varepsilon(a', a'')$ das Vorzeichen derjenigen Permutation, die benötigt wird, um das $(p+q)$-Tupel $(a'_1, \dots, a'_p, a''_1, \dots, a''_q)$ in die natürliche Reihenfolge zu bringen. Die Verknüpfung

$$\sqcap\colon \operatorname{End}_k(\Lambda^p V) \times \operatorname{End}_k(\Lambda^q V) \to \operatorname{End}_k(\Lambda^{p+q} V)$$

ist bilinear, assoziativ und kommutativ.

Einer linearen Abbildung $A\colon V \to V$ ordnet man vermöge

$$(A^{[p]})_b^a = |A|_b^a$$
$$(\operatorname{Ad}^{[p]} A)_b^a = \varepsilon(a, N \setminus a)\, \varepsilon(b, N \setminus b)\, |A|_{N \setminus a}^{N \setminus b}$$

zwei Abbildungen $A^{[p]}$ und $\operatorname{Ad}^{[p]} A$ zu, die beide $\Lambda^p V$ in sich überführen. Mit $|A|_b^a$ wird dabei die p-reihige Unterdeterminante

$$|A|_b^a = \det\left((A_{ij})_{\substack{i \in a \\ j \in b}}\right)$$

bezeichnet.

Für $A\colon V \to V$, $B\colon V \to V$, $C\colon \Lambda^p V \to \Lambda^p V$ und $D\colon \Lambda^q V \to \Lambda^q V$ gelten die Gesetze

$$A^{[p]} = A \sqcap \dots \sqcap A \tag{4a}$$

$$(A+B)^{[p]}=\sum_{\alpha+\beta=p}\binom{p}{\alpha}A^{[\alpha]}\sqcap B^{[\beta]} \tag{4b}$$

$$A^{[p+q]}(C\sqcap D)=(A^{[p]}C)\sqcap(A^{[q]}D) \tag{4c}$$

$$(C\sqcap D)A^{[p+q]}=(CA^{[p]})\sqcap(DA^{[q]}) \tag{4d}$$

$$(\mathrm{Ad}^{[p]}A)A^{[p]}=\det(A)1_{\binom{n}{p}} \tag{4e}$$

2.2. *Differentialoperatoren auf* $\mathfrak{H}_{2n}$

Es werden Differentialoperatoren betrachtet, die auf holomorphe Funktionen $f\colon \mathfrak{H}_{2n}\to\mathbb{C}$ bzw. $g\colon \mathfrak{H}_{2n}\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^p\mathbb{C}^n)$ wirken. Der in [11] entwickelte Kalkül wird der Aufspaltung

$$Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2\\ z_3 & z_4\end{pmatrix},\qquad Z\in\mathfrak{H}_{2n},\ z_1,z_4\in\mathfrak{H}_n,\ z_2=z_3'\in\mathbb{C}^{(n,n)} \tag{5}$$

angepaßt. Die elementaren Bausteine sind die Operatoren

$$\partial_{ij}=\tfrac{1}{2}(1+\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\qquad (1\leqq i,j\leqq 2n),$$

(δ = Kroneckersymbol), die man in der Operatorenmatrix

$$\partial=\begin{pmatrix}\partial_1 & \partial_2\\ \partial_3 & \partial_4\end{pmatrix},\qquad \partial_3'=\partial_2$$

zusammenfaßt. Die Operatoren ∂_{ij} erzeugen über $\mathbb{C}$ einen kommutativen Ring von Operatoren. Die äußeren Pozenzen $\partial_i^{[p]}$ $(1\leqq i\leqq 4)$ werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen; diese werden auf Funktionen $f\colon\mathfrak{H}_{2n}\to\mathbb{C}$ und $g\colon\mathfrak{H}_{2n}\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Lambda^q\mathbb{C}^n)$ angewandt. Die Anwendung ist gemäß

$$(\partial_i^{[p]}f)_b^a=|\partial_i|_b^a f$$

$$(\partial_i^{[p]}\sqcap g)_b^a=\frac{1}{\binom{p+q}{p}}\sum_{\substack{a=a'\cup a''\\ b=b'\cup b''}}\varepsilon(a',a'')\,\varepsilon(b',b'')\,|\partial_i|_{b'}^{a'}g_{b''}^{a''}$$

komponentenweise zu verstehen.

Als Testfunktionen für Operatoridentitäten werden Funktionen vom Typ

$$f_{\mathfrak{T}}(Z)=e^{\mathrm{Spur}(\mathfrak{T}Z)}=e^{\mathrm{Spur}(t_1z_1+2t_2'z_2+t_4z_4)} \tag{6}$$

von Bedeutung sein. Dabei ist $\mathfrak{T}$ stets eine (i.allg. komplexe) $2n$-reihige symmetrische Matrix. die in der Form $\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}t_1 & t_2\\ t_3 & t_4\end{pmatrix}$, $t_3'=t_2$ in n-reihige Bestandteile aufgespalten wird.

Es gilt dann

$$\partial_i^{[p]}f_{\mathfrak{T}}=t_i^{[p]}f_{\mathfrak{T}}\qquad(1\leqq i\leqq 4) \tag{7}$$

und

$$\partial_2^{[p]} e^{\mathrm{Spur}(tz_2)} = 2^{-p}(t')^{[p]} e^{\mathrm{Spur}(tz_2)} \tag{8}$$

für $t \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.

Wichtig sind weiterhin die für $f, g \in \mathrm{Hol}(\mathfrak{H}_{2n})$ gültige Produktregel

$$\partial_i^{[p]}(fg) = \sum_{\alpha+\beta=p} \binom{p}{\alpha} (\partial_i^{[\alpha]} f) \sqcap (\partial_i^{[\beta]} g) \tag{9}$$

sowie die Formel

$$\partial_4^{[p]} \det(z_4)^s = C_p(s) \det(z_4)^s (z_4)^{-[p]} \tag{10}$$

mit

$$C_p(s) = s(s+\tfrac{1}{2}) \dots \left(s + \frac{p-1}{2}\right). \tag{11}$$

2.3. *Konstruktion des Operators* $\mathcal{D}_k$

In diesem Abschnitt wird in drei Schritten aus jeweils einfacheren Bestandteilen der in der Einleitung genannte Differentialoperator $\mathcal{D}_k$ aufgebaut.

1. Schritt: Es seien α, β, p nichtnegative ganze Zahlen mit $\alpha+\beta+p=n$ und $\delta(p,\alpha,\beta)$ der durch

$$\delta(p,\alpha,\beta) = z_2^{[\alpha]} \partial_4^{[\alpha]} \sqcap ((1_n^{[p]} \sqcap z_2^{[\beta]} \partial_3^{[\beta]})(\mathrm{Ad}^{[p+\beta]} \partial_1) \partial_2^{[p+\beta]}) \tag{12}$$

gegebene Operator.

Für Funktionen $f \in \mathrm{Hol}(\mathfrak{H}_{2n})$ der speziellen Gestalt

$$f(Z) = g(z_4, z_2) e^{\mathrm{Spur}(tz_1)}, \quad t = t', \ \det(t) \neq 0 \tag{13}$$

wird $\delta(p,\alpha,\beta)$ beschrieben durch

$$\delta(p,\alpha,\beta) f = t^{[\alpha+\beta]} z_2^{[\alpha+\beta]} (\partial_4^{[\alpha]} \sqcap \partial_3^{[\beta]} t^{-[\beta]} \partial_2^{[\beta]}) \sqcap \partial_2^{[p]} f. \tag{14}$$

Zur Begründung hat man die Identität

$$\begin{aligned} & z_2^{[\alpha]} \partial_4^{[\alpha]} \sqcap (1_n^{[p]} \sqcap z_2^{[\beta]} \partial_3^{[\beta]})(\mathrm{Ad}^{[p+\beta]} t) \partial_2^{[p+\beta]} \\ &= t^{[\alpha+\beta]} z_2^{[\alpha+\beta]} (\partial_4^{[\alpha]} \sqcap \partial_3^{[\beta]} t^{-[\beta]} \partial_2^{[\beta]}) \sqcap \partial_2^{[p]} \end{aligned}$$

nachzuweisen; diese erhält man leicht durch (mehrfache) Anwendung der Regeln (4c), (4d) sowie (4e).

2. Schritt: Für $p+q=n$ $(p, q \geqq 0)$ setze man

$$\Delta(p,q) = \sum_{\alpha+\beta=q} (-1)^\beta \delta(p,\alpha,\beta).$$

Für $f(Z) = g(z_4, z_2) e^{\mathrm{Spur}(tz_1)}$, $t=t'$, $\det(t) \neq 0$ folgt aus (14) und (4b):

$$\Delta(p,q) f = t^{[q]} z_2^{[q]} (\partial_4 - \partial_3 t^{-1} \partial_2)^{[q]} \sqcap \partial_2^{[p]} f. \tag{15}$$

Da die $\sqcap$-Multiplikation kommutativ ist, kann man (15) auch in der (häufig günstigeren) Form

$$\Delta(p,q)f = \partial_2^{[p]} \sqcap t^{[q]} \underline{z}_2^{[q]} (\partial_4 - \partial_3 t^{-1} \partial_2)^{[q]} f \tag{16}$$

schreiben, wobei das Unterstreichen von z_2 andeute, daß z_2 hinsichtlich der nachfolgenden durch $\partial_2^{[p]}$ gegebenen Differentiation als Konstante angesehen werden soll.

Der Operator $\Delta(p,q)$ besitzt eine zusätzliche Symmetrieeigenschaft bezüglich

$$Z \mapsto V\langle Z\rangle := Z\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} z_4 & z_3 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nämlich für alle $f \in \mathrm{Hol}(\mathfrak{H}_{2n})$

$$\Delta(p,q)(f|V) = (\Delta(p,q)f)|V. \tag{17}$$

Nach einer bekannten Schlußweise [11, III, §6] genügt es, (17) für Testfunktionen vom Typ $f_{\mathfrak{T}}$ nachzuweisen. Man darf auch zusätzlich annehmen, daß t_1, t_2, t_4 sämtlich von Maximalrang sind, insbesondere darf man $\Delta(p,q)$ in der Gestalt (15) benutzen. Die Behauptung (17) folgt dann aus der Identität

$$\begin{aligned} &t_4^{[q]} z_2^{[q]} (t_1 - t_2 t_4^{-1} t_3)^{[q]} \sqcap t_3^{[p]} \\ &\quad = t_1^{[q]} z_3^{[q]} (t_4 - t_3 t_1^{-1} t_2)^{[q]} \sqcap t_2^{[p]}. \end{aligned} \tag{18}$$

Zum Nachweis von (18) hat man zusätzlich zu den Regeln (4c), (4d) noch die Gleichung

$$A^{[p]} \sqcap B^{[q]} = A'^{[p]} \sqcap B'^{[q]}, \qquad A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)},\ p+q=n$$

zu berücksichtigen.

Wir benötigen Informationen über das Verhalten des Operators $\Delta(p,q)$ bezüglich der Abbildung

$$Z \mapsto I^{\downarrow}\langle Z\rangle = \begin{pmatrix} z_1 - z_2 z_4^{-1} z_3 & z_2 z_4^{-1} \\ z_4^{-1} z_3 & -z_4^{-1} \end{pmatrix},$$

wobei

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}).$$

Im nachfolgenden Abschnitt 2.4 wird gezeigt:

Proposition 1. *Es sei* $f = f_{\mathfrak{T}}$ *eine Testfunktion* (6) *mit* $\det(t_1) \neq 0$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \Delta(p,q)(f|_k I^{\downarrow}) = (-1)^n &\sum_{p+q=n} \sum_{\alpha+\beta=q} (-1)^{\alpha} \binom{q}{\alpha} C_{\alpha}\left(-k + \frac{n+\beta}{2}\right) \\ &\cdot (t_1 z_2 - t_2)^{[p]} \sqcap t_1^{[q]} z_2^{[q]} \\ &\cdot (1_n^{[\alpha]} \sqcap z_4^{-[\beta]} (t_1^{-1}[t_2] - t_4)^{[\beta]}) f|_{k+1} I^{\downarrow}. \end{aligned} \tag{19}$$

Für k kann hier nach Wahl eines Zweiges von $\log\det(z_4)$ jede beliebige komplexe Zahl zugelassen werden.

3. Schritt: Mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten $\lambda_k(q)$ bilde man den Operator

$$\mathscr{D}_k = \sum_{p+q=n} \lambda_k(q) \Delta(p,q). \tag{20}$$

Aus (19) erhält man nach der Aufspaltung

$$(t_1 z_2 - t_2)^{[p]} = \sum_{\gamma+\delta=p} (-1)^\delta \binom{p}{\gamma} (t_1 z_2)^{[\gamma]} \sqcap t_2^{[\delta]}$$

und einer einfachen Umformung für unsere Testfunktion $f_{\mathfrak{T}}$, $\det(t_1) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_k(f_{\mathfrak{T}}|_k I^\downarrow) = & \sum_{p+q=n} \sum_{\gamma+\delta=p} \sum_{\alpha+\beta=q} (-1)^{\alpha+\beta+\delta+n} \lambda_k(q) \binom{p}{\gamma} \binom{q}{\alpha} C_\alpha\left(-k+\frac{n+\beta}{2}\right) \\ & \cdot (t_1 z_2)^{[\gamma+q]} (1_n^{[\alpha+\gamma]} \sqcap z_4^{-[\beta]} (t_4 - t_1^{-1}[t_2])^{[\beta]}) \sqcap t_2^{[\delta]} f_{\mathfrak{T}}|_{k+1} I^\downarrow. \end{aligned} \tag{21}$$

Man setze $t = \alpha + \gamma$ und

$$a_k(t,\beta,\delta) = \sum_{\alpha+\gamma=t} (-1)^{\alpha+\beta+\delta+n} \lambda_k(\alpha+\beta) \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \binom{\gamma+\delta}{\gamma} C_\alpha\left(-k+\frac{n+\beta}{2}\right).$$

Dann geht (21) über in

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_k(f_{\mathfrak{T}}|_k I^\downarrow) = & \sum_{t+\beta+\delta=n} a_k(t,\beta,\delta) (t_1 z_2)^{[t+\beta]} \\ & \cdot (1_n^{[t]} \sqcap z_4^{-[\beta]} (t_4 - t_1^{-1}[t_2])^{[\beta]}) \sqcap t_2^{[\delta]} f_{\mathfrak{T}}|_{k+1} I^\downarrow. \end{aligned} \tag{22}$$

Andererseits gilt

$$(\mathscr{D}_k f_{\mathfrak{T}})|_{k+1} I^\downarrow = \sum_{p+q=n} \lambda_k(q) (t_1 z_2 z_4^{-1})^{[q]} (t_4 - t_1^{-1}[t_2])^{[q]} \sqcap t_2^{[p]} f_{\mathfrak{T}}|_{k+1} I^\downarrow. \tag{23}$$

Die angestrebte Gleichheit

$$\mathscr{D}_k(f_{\mathfrak{T}}|_k I^\downarrow) = (\mathscr{D}_k f_{\mathfrak{T}})|_{k+1} I^\downarrow \tag{24}$$

ist gewährleistet, falls die Koeffizienten $\lambda_k(q)$ für $t+\beta+\delta=n$ die Gleichungen

$$a_k(t,\beta,\delta) = 0 \qquad (1 \leqq t \leqq n) \tag{25}$$

$$a_k(0,\beta,\delta) = \lambda_k(\beta) \tag{26}$$

erfüllen; die letzteren sind nach Definition von $a_k(0,\beta,\delta)$ automatisch erfüllt.

Im Spezialfall $\beta=0$ besagen die Gleichungen (25), daß

$$\sum_{\alpha+\gamma=t} (-1)^\alpha \lambda_k(\alpha) \binom{\gamma+n-t}{\gamma} C_\alpha\left(-k+\frac{n}{2}\right) = 0 \qquad (1 \leqq t \leqq n). \tag{27}$$

Falls man voraussetzt, daß k von $\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, \ldots, \frac{2n-1}{2}$ verschieden ist, so gilt

$C_\alpha\left(-k+\frac{n}{2}\right)\neq 0$ für $0\leqq\alpha\leqq n$, und man erhält

$$\lambda_k(\alpha)=\binom{n}{\alpha}\frac{\lambda_k(0)}{C_\alpha\left(-k+\frac{n}{2}\right)}\qquad(0\leqq\alpha\leqq \mathrm{n}).\tag{28}$$

Die Gleichungen (25) sind dann auch bei beliebigem β erfüllt: Wegen

$$C_{\alpha+\beta}\left(-k+\frac{n}{2}\right)=C_\beta\left(-k+\frac{n}{2}\right)C_\alpha\left(-k+\frac{n+\beta}{2}\right)$$

und

$$\binom{n}{\alpha+\beta}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{\gamma+\delta}{\gamma}=\frac{n!}{t!\,\beta!\,\delta!}\binom{t}{\alpha}\qquad\text{mit } t=\alpha+\gamma$$

folgt nämlich für $t\geqq 1$:

$$a_k(t,\beta,\delta)=(-1)^{\beta+\delta+n}\frac{n!}{t!\,\beta!\,\delta!}\frac{1}{C_\beta\left(-k+\frac{n}{2}\right)}\sum_{\alpha+\gamma=t}(-1)^\alpha\binom{t}{\alpha}=0.$$

Setzt man noch

$$\tilde{C}_q(x)=\prod_{\substack{0\leqq p\leqq n\\ p\neq q}}C_p(x),$$

so erhält man mit der Normierung

$$\lambda_k(0)=\tilde{C}_0\left(-k+\frac{n}{2}\right):$$

Satz 2. *Der Operator*

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_k&=\sum_{p+q=n}\binom{n}{q}\tilde{C}_q\left(-k+\frac{n}{2}\right)\Delta(p,q)\\&=\sum_{\alpha+\beta+p=n}(-1)^\beta\binom{n}{\alpha+\beta}\tilde{C}_{\alpha+\beta}\left(-k+\frac{n}{2}\right)\\&\quad\cdot z_2^{[\alpha]}\,\partial_4^{[\alpha]}\sqcap\left(\left(1_n^{[p]}\sqcap z_2^{[\beta]}\partial_3^{[\beta]}\right)\left(\mathrm{Ad}^{[p+\beta]}\partial_1\right)\partial_2^{[p+\beta]}\right)\end{aligned}$$

genügt den Vertauschungsrelationen

$$\mathscr{D}_k(f\,|\,V)=(\mathscr{D}_k f)|V\tag{29a}$$

$$\mathscr{D}_k(f|_k M^\downarrow)=(\mathscr{D}_k f)|_{k+1}M^\downarrow\tag{29b}$$

$$\mathscr{D}_k(f|_k M^\uparrow)=(\mathscr{D}_k f)|_{k+1}M^\uparrow\tag{29c}$$

für alle $f\in\mathrm{Hol}(\mathfrak{H}_{2n})$, $M\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ *und* $V=\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}&0\\0&\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. *Für* k

ist dabei eine beliebige komplexe Zahl zugelassen, wenn man für jedes $M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ *aus* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ *einen festen Zweig von* $\log\det(cz_4+d)$ *zugrunde legt.*

Beweis. Die Formel (29a) gilt nach (17) bereits für $\Delta(p,q)$. Wegen (24) gilt (29b) jedenfalls für $M=I=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alle Testfunktionen $f_{\mathfrak{T}}$ mit $\det(t_1)\neq 0$ und alle $k\in\mathbb{C}$, die von $\frac{n}{2},\ldots,\frac{2n-1}{2}$ verschieden sind; daraus ergibt sich die Gültigkeit von (29b) im Falle $M=I$ für alle $k\in\mathbb{C}$ und alle $f\in\mathrm{Hol}(\mathfrak{H}_{2n})$. Für $j(M,z_4)^k = e^{k\log\det(cz_4+d)}$ gilt die übliche Kozykeleigenschaft i. allg. nicht mehr. Man hat nur

$$j(MN,z_4)^k = j(M,N\langle z_4\rangle)^k j(N,z_4)^k \mu_k(M,N) \tag{30}$$

zur Verfügung, wobei $\mu_k(M,N)\neq 0$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1 ist, welche nur von k modulo $\mathbb{Z}$ abhängt: $\mu_k(M,N)=\mu_{k+1}(M,N)$. Daher genügt es, (29b) für Erzeugende der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ nachzuweisen. Für die Translationen

$$\begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}, \qquad S=S' \text{ reell}$$

gilt (29b) trivialerweise. Da die Translationen zusammen mit I ganz $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ erzeugen, folgt (29b).

Vermöge V sind die Untergruppen $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})^{\uparrow}$ und $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})^{\downarrow}$ von $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ zueinander konjugiert, so daß (29c) aus (29a) und (29b) folgt.

Bemerkung. Für $n=1$ erhält man einen Operator, der in etwas anderer Form von Eichler und Zagier [8] eingeführt worden ist:

$$\mathscr{D}_k = (-k+\tfrac{1}{2})\partial_2 + z_2(\partial_1\partial_4 - \partial_2\partial_2).$$

Für $\nu\in\mathbb{N}$ führen wir den iterierten Operator

$$\mathscr{D}_k^{\nu} := \mathscr{D}_{k+\nu-1}\circ\ldots\circ\mathscr{D}_k$$

und dessen Komposition mit der Restriktion $z_2=0$ ein:

$$\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}\colon \mathrm{Hol}(H_{2n})\to\mathrm{Hol}(H_n\times H_n)$$

wobei $(\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}f)(z_1,z_4) = (\mathscr{D}_k^{\nu}f)\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix}$.

Diese Operatoren führen natürlich Modulformen in Modulformen über:

Satz 3. *Der Operator* $\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}$ *vermittelt für* $\nu>0$ *eine lineare Abbildung*

$$\mathscr{D}_{k,0}^{\nu}\colon \mathfrak{M}_{2n}^k \to (\mathfrak{S}_n^{k+\nu}\otimes\mathfrak{S}_n^{k+\nu})^{\mathrm{sym}}.$$

Die Symmetrieeigenschaft des Bildes folgt aus (29a). Nur die Aussage, daß man Spitzenformen erhält, bedarf einer Begründung. Dazu braucht man nur zu überlegen, daß

$$\Delta(p,q)\, e^{\operatorname{Spur}(\mathfrak{T}Z)} = 0, \tag{31}$$

falls die letzte Zeile der symmetrischen Matrix $\mathfrak{T}$ gleich Null ist.

Zum Beweis von (31) darf man o.B.d.A. annehmen, daß t_1 Maximalrang hat, also $\Delta(p,q)$ in der Gestalt (15) vorliegt. Die Behauptung folgt dann aus dem elementaren Sachverhalt, daß

$$A^{[p]} \sqcap B^{[q]} = 0 \qquad (p+q=n),$$

falls A und B n-reihige Matrizen sind, deren letzte Spalte jeweils die Nullspalte ist.

Bemerkungen:

1) Es sollte darauf hingewiesen werden, daß Satz 3 vielerlei Varianten zuläßt (für Jacobische Modulformen, für andere Untergruppen von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}), \ldots$).

2) Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln kann man auch Differentialoperatoren einführen, die einer allgemeineren Aufspaltung

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}, \qquad Z \in \mathfrak{H}_n,\ z_1 \in \mathfrak{H}_r,\ z_4 \in \mathfrak{H}_s,\ r+s=n$$

angepaßt sind. Solche Operatoren führen dann skalarwertige Funktionen (bzw. Modulformen) in vektorwertige Funktionen (bzw. Modulformen) über.

3) Den „Hauptterm" von $\mathscr{D}_k$ hat man in

$$\Delta(n,0) = \delta(n,0,0) = \partial_2^{[n]}$$

zu sehen, die übrigen $\Delta(p,q)$ haben den Charakter von Korrekturtermen. Daher ist es in den Anwendungen meist günstiger, den Operator $\mathscr{D}_k$ anders zu normieren:

$$\tilde{\mathscr{D}}_k := \sum_{p+q=n} \binom{n}{q} C_q \left(-k+\frac{n}{2}\right)^{-1} \Delta(p,q). \tag{32}$$

Analog bilde man $\tilde{\mathscr{D}}_k^{\nu}$, $\tilde{\mathscr{D}}_{k,0}^{\nu}$; dabei hat man aber die Gewichte

$$k = \frac{n-2\nu+2}{2}, \frac{n-2\nu+3}{2}, \ldots, \frac{2n-1}{2}$$

auszuschließen.

2.4. Beweis der Proposition 1

Lemma 4. *Es sei* $T=T'$ *n-reihig mit* $\det(T) \neq 0$. *Dann gilt für* $r \geqq 1$:

$$(\partial_4 + \partial_3 T^{-1} \partial_2)^{[r]} \det(z_4)^{-\frac{n}{2}} e^{\operatorname{Spur}(T[z_2] z_4^{-1})} = 0.$$

Beweis. Man darf o.B.d.A. annehmen, daß T reell und positiv ist (insbesondere existiert dann $T^{\frac{1}{2}}$), außerdem kann man die komplexe Variable Z durch eine reelle Variable

$$Y=Y'=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}>0, \qquad y_3'=y_2$$

ersetzen. Nach dem Vorbild [11, III, §6] benutze man die Integralformel

$$\det(y_4)^{-\frac{n}{2}}=\pi^{-\frac{n^2}{2}}\int e^{-\mathrm{Spur}(y_4[P])}\,dP,$$

wobei über den Raum der n-reihigen reellen Matrizen zu integrieren ist. Die Variablensubstitution

$$P\mapsto P+y_4^{-1}y_2'T^{\frac{1}{2}}$$

führt zu

$$\det(y_4)^{-\frac{n}{2}}e^{\mathrm{Spur}(T[y_2]y_4^{-1})}=\pi^{-\frac{n^2}{2}}\int e^{-\mathrm{Spur}(y_4[P]+2PT^{\frac{1}{2}}y_2)}\,dP. \tag{33}$$

Aus den Formeln

$$(\partial_4+\partial_3 T^{-1}\partial_2)^{[r]}=\sum_{\alpha+\beta=r}\binom{r}{\alpha}\partial_4^{[\alpha]}\sqcap(\partial_3 T^{-1}\partial_2)^{[\beta]}$$

$$\partial_4^{[\alpha]}e^{-\mathrm{Spur}(y_4[P])}=(-PP')^{[\alpha]}e^{-\mathrm{Spur}(y_4[P])}$$

$$(\partial_3 T^{-1}\partial_2)^{[\beta]}e^{-\mathrm{Spur}(2PT^{\frac{1}{2}}y_2)}=(PP')^{[\beta]}e^{-\mathrm{Spur}(2PT^{\frac{1}{2}}y_2)}$$

$$0=(PP'-PP')^{[r]}=\sum_{\alpha+\beta=r}\binom{r}{\alpha}(-PP')^{[\alpha]}\sqcap(PP')^{[\beta]}$$

und der Gleichung (33) folgt die Behauptung.

Lemma 5. *Es sei $T=T'$ eine n-reihige Matrix, $Z\in\mathfrak{H}_n$. Dann gilt*

$$\partial^{[q]}\det(Z)^{-k}e^{\mathrm{Spur}(TZ^{-1})}=(-1)^q\det(Z)^{-k}\sum_{\alpha+\beta=q}\binom{q}{\alpha}C_\alpha\left(k-\frac{q-1}{2}\right)$$
$$\cdot Z^{-[q]}(Z^{[\alpha]}\sqcap T^{[\beta]})Z^{-[q]}e^{\mathrm{Spur}(TZ^{-1})}.$$

Beweis. Das Verhalten der Operatoren $\partial^{[q]}$ unter der Substitution $Z\mapsto Z^{-1}$ ist bekannt [11, S. 214]. Speziell gilt

$$\partial^{[q]}\det(Z)^{-k}e^{\mathrm{Spur}(TZ^{-1})}$$
$$=(-1)^q\det(Z)^{-\frac{q-1}{2}}Z^{-[q]}(\partial^{[q]}h)(Z^{-1})Z^{-[q]},$$

wobei $h(Z)=\det(Z)^{k-\frac{q-1}{2}}e^{\mathrm{Spur}(TZ)}$.

Die Behauptung folgt jetzt aus (10) und der Produktformel (9).

Zum Beweis von Proposition 1 ist

$$f_{\mathfrak{T}}|_k I^{\downarrow}=\det(z_4)^{-k}e^{\mathrm{Spur}(t_1(z_1-z_2z_4^{-1}z_3)+2t_2'z_2z_4^{-1}-t_4z_4^{-1})}$$

zu untersuchen. Es ist zweckmäßig, diese Funktion aufzuspalten gemäß

$$f_{\mathfrak{T}}|_k I^{\downarrow} = g(z_2, z_4)\, h(z_4)\, e^{\mathrm{Spur}(t_1 z_1)} \tag{34}$$

mit

$$g(z_2, z_4) = \det(z_4)^{-\frac{n}{2}}\, e^{\mathrm{Spur}(-t_1[z_2 - t_1^{-1} t_2] z_4^{-1})}$$

$$h(z_4) = \det(z_4)^{-k+\frac{n}{2}}\, e^{\mathrm{Spur}((t_1^{-1}[t_2] - t_4) z_4^{-1})}.$$

Mit dieser Aufspaltung gilt

Lemma 6.

$$(\partial_4 - \partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[q]}(gh) = \sum_{\alpha+\beta=q} \binom{q}{\alpha} ((\partial_4 - \partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[\alpha]} g) \sqcap (\partial_4^{[\beta]} h). \tag{35}$$

Beweis. Nach (4b) und der Produktregel (9) gilt

$$(\partial_4 - \partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[q]}(gh)$$
$$= \sum_{a+b=q} \sum_{b_1+b_2=b} \binom{q}{a} \binom{b}{b_1} (-\partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[a]} \sqcap ((\partial_4^{[b_1]} g) \sqcap (\partial_4^{[b_2]} h)). \tag{36}$$

Da die Funktion h nicht von z_2 abhängt, darf man in (36) anders herum klammern:

$$\sum_{a+b=q} \sum_{b_1+b_2=b} \binom{q}{a} \binom{b}{b_1} ((-\partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[a]} \sqcap \partial_4^{[b_1]} g) \sqcap (\partial_4^{[b_2]} h).$$

Wegen

$$\binom{q}{a} \binom{b}{b_1} = \binom{q}{a+b_1} \binom{a+b_1}{a}$$

folgt durch nochmalige Anwendung von (5b) die Behauptung.

Zur Bestimmung von $\Delta(p, q) f_{\mathfrak{T}}$ darf man $\Delta(p, q)$ in der Gestalt (16) benutzen. Der Beitrag, der von $(\partial_4 - \partial_3 t_1^{-1} \partial_2)^{[q]}$ geliefert wird, ist in Lemma 6 beschrieben. Nach Lemma 4 liefert dabei nur $\alpha = 0$ einen Beitrag zu (35), der Wert von $\partial_4^{[q]} h$ kann Lemma 5 entnommen werden. Man erhält also

$$(\partial_4 - \partial_3 t^{-1} \partial_2)^{[q]} f_{\mathfrak{T}}|_k I^{\downarrow} = (-1)^q \det(z_4)^{-k+\frac{n}{2}} \sum_{\alpha+\beta=q} C_\alpha \left(k - \frac{n}{2} - \frac{q-1}{2}\right)$$
$$\cdot z_4^{-[q]} (z_4^{[\alpha]} \sqcap (t_1^{-1}[t_2] - t_4)^{[\beta]}) z_4^{-[q]} e^{\mathrm{Spur}(\mathfrak{T} I^{\downarrow} \langle Z \rangle)}. \tag{37}$$

Andererseits zeigt man leicht, daß

$$\partial_2^{[p]} g(z_2, z_4) = (-1)^p (t_1 z_2 - t_2)^{[p]} z_4^{-[p]} g(z_2, z_4). \tag{38}$$

Die Behauptung der Proposition 1 folgt nun aus (37) und (38), wenn man die Regeln (4c) und (4d) sowie

$$C_\alpha \left(k - \frac{n}{2} - \frac{q-1}{2}\right) = (-1)^\alpha C_\alpha \left(-k + \frac{n}{2} + \frac{\beta}{2}\right), \quad \alpha + \beta = q$$

beachtet.

3. Die Fourier-Jacobi-Entwicklung von $\mathscr{D}_k \Psi_{2n}^k$

Die Eisensteinreihen n-ten Grades werden für gerades Gewicht $k > n+1$ gegeben durch

$$\Psi_n^k(z) = \sum_{M \in \Gamma_\infty^{(n)} \backslash \Gamma^{(n)}} j(M, z)^{-k} = \sum_{(c,d)} \det(cz+d)^{-k}. \tag{39}$$

Dabei bezeichnet $\Gamma^{(n)}$ die Siegelsche Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$,

$$\Gamma_\infty^{(n)} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \,\middle|\, c = 0 \right\},$$

und (c, d) durchläuft alle nicht assoziierten teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare. Die Fourierentwicklung von Ψ_n^k schreiben wir in der Form

$$\Psi_n^k(z) = \sum_{t \geqq 0} a_n^k(t)\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}, \tag{40}$$

wobei $t = t'$ alle positiv semidefiniten halbganzen n-reihigen Matrizen durchläuft.

Neben diesen Eisensteinreihen werden noch Poincaréreihen vom Exponentialtyp benötigt. Diese sind für $z \in \mathfrak{H}_n$, $k > 2n$, $k \cdot n$ gerade und positiv definites halbganzes $t^{(n)}$ gegeben durch

$$\mathfrak{g}_n^k(z, t) = \sum_{M \in A_n \backslash \Gamma^{(n)}} j(M, z)^{-k}\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tM\langle z \rangle)}.$$

Mit A_n wird dabei die Untergruppe der Translationen bezeichnet:

$$A_n = \left\{ M \in \Gamma^{(n)} \,\middle|\, M = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für alle Spitzenformen $f \in \mathfrak{S}_n^k$ mit Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{t > 0} b(t, f) e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}$$

gilt

$$\langle f, \mathfrak{g}_n^k(*, t) \rangle = A_n^k\, b(t, f) \det(t)^{\frac{n+1}{2} - k}, \tag{41}$$

wobei A_n^k die numerische Konstante

$$A_n^k = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{n(n+1)}{2} - nk} \prod_{\nu=1}^{n} \Gamma\left(k - \frac{n+\nu}{2}\right)$$

ist, und $\langle\ ,\ \rangle$ das Peterssonsche Skalarprodukt bezeichnet, das für zwei Modulformen $f, g \in \mathfrak{M}_n^k$ mit $f \cdot g \in \mathfrak{S}_n^{2k}$ gegeben wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma^{(n)} \backslash \mathfrak{H}_n} f \cdot \bar{g} \det(y)^{k-n-1}\, dx\, dy.$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Sätze I.7 und I.12 hinsichtlich der Aufspaltung (5) auch für $\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu \Psi_{2n}^k$ gelten:

Satz 7. *Es sei k gerade, $k>2n$ und $Z\in\mathfrak{H}_{2n}$. Dann gilt für alle $\nu\in\mathbb{N}$:*

$$\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu \Psi_{2n}^k(Z)=\phi_1^{(\nu)}(Z)+\sum_{t>0}\ \sum_{w_1\in\mathbb{Z}_n^{(n,n)}/GL(n,\mathbb{Z})}\ \sum_{\substack{w_3\in\mathbb{Z}^{(n,n)}\\ \binom{w_1}{w_3}\text{ primitiv}}}\ \sum_{M\in\Gamma_\infty^{(n)}\backslash\Gamma^{(n)}}$$
$$\cdot\det(2\pi i w_1 t w_3')^\nu a_n^k(t) j(M,z_4)^{-k-\nu} e^{2\pi i\operatorname{Spur}\left(tM\downarrow\langle Z\rangle\left[\binom{w_1}{w_3}\right]\right)}. \tag{42}$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{Z}_n^{(n,n)}$ die n-reihigen ganzen Matrizen vom Maximalrang n. In $\phi_1^{(\nu)}$ werden all die Glieder der Fourier-Jacobi-Entwicklung von $\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu \Psi_{2n}^k$ bezüglich z_1 zusammengefaßt, die zu Exponentenmatrizen t vom Rang $<n$ gehören. Aus (31) folgt, daß $\phi_1^{(\nu)}$ für $\nu>0$ identisch verschwindet.

Für $\nu=0$ handelt es sich bei (42) um einen Spezialfall von Satz I.7. Durch Anwendung des Operators $\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu$ erhält man daraus (42) auch für $\nu>0$: Man benutze die Vertauschungsrelation (29b) und die einfache Formel

$$\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu\left(e^{2\pi i\operatorname{Spur}\left(tZ\left[\binom{w_1}{w_3}\right]\right)}\right)=\det(2\pi i w_1 t w_3')^\nu e^{2\pi i\operatorname{Spur}\left(tZ\left[\binom{w_1}{w_3}\right]\right)}. \tag{43}$$

Wie in [4] erhält man daraus mit einem einfachen Umordnungsargument:

Satz 8. (*Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz* 7)

$$(\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu\Psi_{2n}^k)\begin{pmatrix} z_1 & 0\\ 0 & z_4\end{pmatrix}=\phi_1^{(\nu)}\begin{pmatrix} z_1 & 0\\ 0 & z_4\end{pmatrix}+\phi_2^{(\nu)}\begin{pmatrix} z_1 & 0\\ 0 & z_4\end{pmatrix}$$
$$+2\sum_{t>0}\ \sum_{w_1\in\mathbb{Z}_n^{(n,n)}/GL(n,\mathbb{Z})}(2\pi i)^{n\nu}a_n^k(t)\,e^{2\pi i\operatorname{Spur}(t[w_1']z_1)}$$
$$\cdot\sum_{\substack{w_3\in GL(n,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}_n^{(n,n)}\\ \binom{w_1}{w_3}\text{ primitiv}}}\det(w_1 t w_3')^\nu g_n^{k+\nu}(z_4, t[w_3']). \tag{44}$$

Dabei wurden in $\phi_2^{(\nu)}$ diejenigen Summanden aus (42) zusammengefaßt, die zu Matrizen w_3 mit $\operatorname{Rang}(w_3)<n$ gehören. Es gilt

$$\phi_1^{(\nu)}=\phi_2^{(\nu)}=0 \qquad \text{für } \nu>0.$$

Da wir $\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu\Psi_{2n}^k$ durch einen Differentiationsprozeß aus Ψ_{2n}^k gewonnen haben, treten gegenüber dem Fall $\nu=0$ keine neuen Konvergenzprobleme auf (vgl. [4]).

4. Die Hauptformel von Garrett für $\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu \Psi_{2n}^k$

Es sei D eine n-reihige Elementarteilermatrix

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix},\qquad d_i\mid d_{i+1},\ d_i>0.$$

Einer solchen Matrix ordne man den Heckeoperator $T(D)$ zu, der für $f\in\mathfrak{M}_n^k$ gegeben wird durch

$$f\mapsto f\mid T(D):=\det(D)^{-k}\sum_{R\in\Gamma^{(n)}\backslash\Gamma^{(n)}\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}\Gamma^{(n)}} f|_k R. \tag{45}$$

Für die allgemeine Theorie der Heckeoperatoren sei auf die Literatur verwiesen [1, 11].

Für $f \in \mathfrak{S}_n^k$, $\nu \in \mathbb{N}$ bilden wir (Konvergenz vorausgesetzt) die unendliche Reihe

$$f \mid S_n^{(\nu)} = \sum_D \det(D)^\nu f \mid T(D), \tag{46}$$

wobei D alle Elementarteilermatrizen durchläuft.

Falls (46) für alle $f \in \mathfrak{S}_n^k$ konvergiert, ist $S_n^{(\nu)}$ ein bezüglich $\langle\,,\rangle$ Hermitescher Operator auf $\mathfrak{S}_n^k$, insbesondere besitzt dann $\mathfrak{S}_n^k$ eine Orthogonalbasis, die aus lauter Eigenfunktionen von $S_n^{(\nu)}$ besteht.

Mit der numerischen Konstanten

$$\mu_n^k = 2^{n\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}-k\right)+1} i^{kn} \pi^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma\left(k-\frac{n+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\frac{\nu-1}{2}\right)}$$

gilt nun

Satz 9. (Garrettsche Hauptformel)
Es sei k gerade, $k>2n$ und $\nu \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_d$ eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{S}^{k+\nu}$, die aus Eigenfunktionen von $S_n^{(\nu)}$ besteht:

$$f_i \mid S_n^{(\nu)} = \lambda(f_i, \nu) f_i.$$

Dann gilt für die Aufspaltung (5):

$$(\tilde{\mathscr{D}}_k^\nu \Psi_{2n}^k)\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} = \delta_{0,\nu} F(z_1, z_4)$$
$$+\mu_n^{k+\nu} \prod_{i=0}^{\nu-1} C_n(-k-i) \sum_{j=1}^{d} \lambda(f_j, \nu) \frac{f_j(z_1)\overline{f_j(-\bar{z}_4)}}{\langle f_j, f_j \rangle}. \tag{47}$$

Dabei ist $F(z_1, z_4)$ eine Funktion aus $(\mathfrak{S}_n^k)^\perp \otimes (\mathfrak{S}_n^k)^\perp$, $\delta=$Kroneckersymbol.

Beweis. Für $\nu=0$ handelt es sich um die „Main Formula" von Garrett ([12]) für unsere Standardaufspaltung (5). In [12] wird auch die Funktion $F(z_1, z_4)$ explizit beschrieben, sie ist hier aber nicht weiter von Interesse.

Ausgangspunkt in Garretts Beweis von (47) im Falle $\nu=0$ ist eine geschickte Aufspaltung der Summation

$$\Psi_{2n}^k(Z) = \sum_{R \in \Gamma_\infty^{(2n)} \backslash \Gamma^{(2n)}} j(R, Z)^{-k}.$$

Er zeigt nämlich, daß man diese in der Form

$$\Psi_{2n}^k(Z) = \sum_M \sum_H j(G_{\tilde{M}} H, Z)^{-k} \tag{48}$$

schreiben kann.

Dabei durchläuft

a) M alle r-reihigen Elementarteilermatrizen

$$M=\begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_r \end{pmatrix}, \quad m_i | m_{i+1}, \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq n,$$

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(n,n)}, \qquad G_{\tilde{M}}=\begin{pmatrix} 1_{2n} & & 0 & \\ 0 & \tilde{M} & & \\ \tilde{M}' & 0 & & 1_{2n} \end{pmatrix} \in \Gamma^{(2n)}.$$

b) H eine (von M abhängige) Teilmenge von $\Gamma^{(n)\uparrow} \cdot \Gamma^{(n)\downarrow}$.

Wegen der (noch zu beweisenden) Formel

$$\tilde{\mathscr{D}}_k^{\nu} j(G_{\tilde{M}} H, Z)^{-k} = \prod_{i=0}^{\nu-1} C_n(-k-i) \det(M)^{\nu} j(G_{\tilde{M}} H, Z)^{-k-\nu} \tag{49}$$

ist Garretts Beweis wortwörtlich auch für $\nu>0$ richtig (mit $k+\nu$ statt k und einem zusätzlichen Faktor $\det(M)^{\nu}$), diejenigen M mit $\operatorname{Rang}(\tilde{M})<n$ liefern keinen Beitrag mehr. Ein Beitrag von Nichtspitzenformen tritt für $\nu>0$ in (47) nicht mehr auf; dieser rührte für $\nu=0$ nämlich genau von den M mit $\operatorname{Rang}(\tilde{M})<n$ her.

Zur Begründung von (49) ist anzumerken:

Wegen (29b), (29c) darf man $H=1_{4n}$ annehmen. Es genügt daher, folgendes zu zeigen:

Lemma 10. *Für* $M \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ *und* $G_M=\begin{pmatrix} 1_{2n} & & 0 & \\ 0 & M & & \\ M' & 0 & & 1_{2n} \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$\tilde{\mathscr{D}}_k j(G_M, Z)^{-k} = C_n(-k) \det(M) j(G_M, Z)^{-k-1}. \tag{50}$$

Da (50) analytisch in M ist, kann man sich auf reguläre M beschränken; für diese gilt insbesondere

$$\begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -M' & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(n, \mathbb{R}).$$

Für die Hilfsfunktion $h_k(Z) := \det(z_1+z_2+z_2'+z_4)^{-k}$ zeigt man durch direktes Nachrechnen

$$h_k|_k \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -M' & 0 \end{pmatrix}^{\uparrow} = \det(M)^k j(G_M, Z)^{-k}. \tag{51}$$

Wieder wegen (29b) braucht nur noch $\tilde{\mathscr{D}}_k h_k$ bestimmt zu werden.

Bemerkung. a) Es sei f eine auf $\mathfrak{H}_{2n}$ holomorphe Funktion, die nur von $z_1+z_2+z_2'+z_4$ abhängt. Dann gilt

$$\Delta(p,q) f = 0 \qquad \text{für } q>0.$$

b) $\partial_2^{[h]} \det(z_2+z_2')^{\alpha} = C_h(\alpha) \det(z_2+z_2')^{\alpha} (z_2+z_2')^{-[h]} \qquad (\alpha \in \mathbb{C},\ 0 \leqq h \leqq n).$

Der (elementare) Beweis sei dem Leser überlassen. Aus der Bemerkung folgt

$$\tilde{\mathscr{D}}_k h_k = C_n(-k)\, h_{k+1},$$

in Verbindung mit (51) ergibt sich die Behauptung des Lemmas.

Die Garrettsche Hauptformel besagt, daß die Funktion $\tilde{\mathscr{D}}^{\nu}_{k,0}\,\Psi^k_{2n}$ als Kernfunktion der Abbildung $S^{(\nu)}_n$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ interpretiert werden kann, genauer gilt für alle $f \in \mathfrak{S}^{k+\nu}_n$

$$(\tilde{\mu}^{k+\nu}_{n,\nu} S^{(\nu)}_n f)(z) = \left\langle f, \tilde{\mathscr{D}}^{\nu}_k \Psi^k_{2n} \begin{pmatrix} -\bar{z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{52}$$

wobei noch

$$\tilde{\mu}^{k+\nu}_{n,\nu} = \mu^{k+\nu}_n \prod_{i=0}^{\nu-1} C_n(-k-i)$$

gesetzt wurde.

Die Fourierentwicklungen

$$f(z) = \sum_{t>0} b(t,f)\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}$$

$$(\tilde{\mu}^{k+\nu}_{n,\nu} S^{(\nu)}_n f)(z) = \sum_{t>0} d_\nu(t,f)\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}$$

stehen wegen (44) und (41) in einem einfachen Zusammenhang:

Für alle halbganzen $T^{(n)} > 0$ gilt

$$d_\nu(T) = 2A^{k+\nu}_n (2\pi i)^{n\nu} \sum_{t>0} \sum_{w_1 \in \mathbb{Z}^{(n,n)}_+ / Gl(n,\mathbb{Z})} a^k_n(t) \sum_{\substack{w_3 \in Gl(n,\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{(n,n)}_+ \\ \binom{w_1}{w_3} \text{ primitiv}}}$$

$$\cdot \det(w_1 t w_3')^\nu\, b(t[w_3'], f) \det(t[w_3'])^{\frac{n+1}{2}-k-\nu}, \tag{53}$$

wobei t und w_1 der zusätzlichen Bedingung $t[w_1'] = T$ unterliegen.

Auf dem schon in [4] eingeschlagenen Weg wollen wir die Eigenwerte $\lambda(f,\nu)$ genauer beschreiben und insbesondere zeigen, daß diese stets von Null verschieden sind. Dazu benötigen wir die folgenden einer Spitzenform $f(z) = \sum_{t>0} b(t,f)\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)} \in \mathfrak{S}^l_n$ und einer Exponentenmatrix $T > 0$ zugeordneten Dirichletreihen:

$$D(s,f,T) := \sum_{w \in Sl(n,\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{(n,n)}_+} b(T[w']) \det(w)^{-s-l+1} \quad (\operatorname{Re}(s) > n+1)$$

$$L(s,f,T)_k := \underbrace{\sum_{t>0} \sum_{w_1 \in \mathbb{Z}^{(n,n)}_+ / Sl(n,\mathbb{Z})}}_{t[w_1'] = T} a^k_n(t) \sum_{\substack{w_3 \in Sl(n,\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}^{(n,n)}_+ \\ \binom{w_1}{w_3} \text{ primitiv}}}$$

$$\cdot\, b(t[w_3'], f) \det(t[w_3'])^{-s} \quad \left(\operatorname{Re}(s) > \frac{n+l}{2}\right).$$

Diese Dirichletreihen konvergieren in den angegebenen Bereichen absolut, $\mathbb{Z}^{(n,n)}_+$ bezeichnet die Menge der ganzen n-reihigen Matrizen mit positiver Determinante, k ist eine gerade Zahl, $k>n+1$. Ist $f\in\mathfrak{S}_n^l$ insbesondere eine Eigenfunktion aller Heckeoperatoren, so stehen beide Dirichletreihen in einer einfachen Beziehung zu der Standardzetafunktion $D_f(s)=\zeta(s)D_f^*(s)$ von Andrianov [1]; diese ist durch ein Eulerprodukt definiert:

$$D_f^*(s)=\prod_p\left\{\prod_{i=1}^n(1-\alpha_{i,p}^{-1}p^{-s})(1-\alpha_{i,p}p^{-s})\right\}^{-1},$$

wobei die $\alpha_{i,p}$ die p-Parameter von f sind (vgl. [1]).

Satz 11. *Es sei* $f(z)=\sum_{t>0}b(t,f)\,e^{2\pi i\operatorname{Spur}(tz)}\in\mathfrak{S}_n^l$ *eine Eigenfunktion aller Heckeoperatoren, k gerade mit $k>n+1$ und T eine f-Kernform* (d.h. $b(T,f)\neq 0$ *und* $b(T[w^{-1}],f)=0$ *für alle* $w\in\mathbb{Z}_n^{(n,n)}$ *mit* $|\det(w)|>1$). *Dann gilt (jeweils im Bereich absoluter Konvergenz)*:

a) $D(s,f,T)=b(T,f)\,B^n(s,T)\,D_f^*(s)$, (54a)

b) $$L(s,f,T)_k=\tilde{a}_n^k(T)\sum_{w\in Sl(n,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}_n^{(n,n)}}b(T[w'],f)\det(T[w'])^{-s} \tag{54b}$$

$$=\tilde{a}_n^k(T)\det(T)^{-s}\,b(T,f)\,B^n(2s-l+1)\,D_f^*(2s-l+1). \tag{54c}$$

Beweis. Die Aussage a) ist ein schwieriges Resultat von Andrianov [1], $B^n(s,T)$ ist dabei eine von f unabhängige Dirichletreihe mit Eulerprodukt, die in Satz I.15 genauer beschrieben ist.

Die Aussage b) ist eine Umformulierung der in (I.23), ..., (I.28) durchgeführten Rechnungen. Der modifizierte Fourierkoeffizient $\tilde{a}_n^k(T)$ ist in (I.33) explizit angegeben.

Ist nun $f\in\mathfrak{S}_n^l$ Eigenfunktion aller Heckeoperatoren, $k=l-v>2n$ und gerade, dann gilt nach Definition

$$d_v(t,f)=\tilde{\mu}_{n,v}^l\,\lambda(f,v)\,b(t,f) \tag{55}$$

für alle halbganzen $t>0$. Für f-Kernformen $T>0$ gilt andererseits nach (53) und (54c)

$$d_v(T,f)=2A_n^l(2\pi i)^{nv}\det(T)^{\frac{v}{2}}L\left(l-\frac{n+1}{2}-\frac{v}{2},f,T\right)_k$$

$$=2A_n^l(2\pi i)^{nv}\tilde{a}_n^k(T)\det(T)^{\frac{n+1}{2}-k}\,b(T,f)\,B^n(k-n,T)\,D_f^*(l-n-v), \tag{56}$$

insbesondere gilt

$$d_v(T,f)\neq 0.$$

In [4] hatte ich die Vermutung aufgestellt, daß die Größe

$$\beta^*(n,k)=a_n^k(T)\det(T)^{\frac{n+1}{2}-k}B^n(k-n,T)$$

von T unabhängig sei; das ist in der Tat richtig, wie ich in [5] zeigen konnte, es gilt nämlich

$$\beta^*(n,k)=(-1)^{\frac{nk}{2}}2^{n\left(k-\frac{n-1}{2}\right)}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\pi^{k-i/2}}{\Gamma(k-i/2)}\zeta(k-n)\zeta(k)^{-1}\prod_{j=1}^n\zeta(2k-2j)^{-1}.$$

Die genaue Gestalt des Eigenwerts $\lambda(f, \nu)$ ergibt sich nun durch Vergleich von (55) und (56). Zusammenfassend erhält man

Satz 12. *Es seien l und ν natürliche Zahlen mit $l-\nu$ gerade und $l-\nu>2n$. Dann vermittelt der Operator $S_n^{(\nu)}$ einen Automorphismus von $\mathfrak{S}_n^l$. Ist $f\in\mathfrak{S}_n^l$ eine Eigenfunktion aller Heckeoperatoren, so wird der Eigenwert $\lambda(f, \nu)$ gegeben durch*

$$\lambda(f, \nu)=(\tilde{\mu}_{n,\nu}^l)^{-1}\, 2\, A_n^l (2\pi i)^{n\nu}\, \beta^*(n, l-\nu)\, D_f^*(l-n-\nu), \tag{57}$$

insbesondere ist dieser Eigenwert stets von Null verschieden.

5. Die Modulformen von Cohen-Zagier

Wir definieren ein Polynom Q_k^ν (und entsprechend $\tilde{Q}_k^\nu$) in $n(2n+1)$ komplexen Variablen $t_{i,j}$ $(1\leqq i\leqq j\leqq 2n)$ vermöge

$$(\mathscr{D}_k^\nu f_{\mathfrak{T}})\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix}=Q_k^\nu(\mathfrak{T})\, e^{\operatorname{Spur}(t_1 z_1+t_4 z_4)}.$$

Dabei werden die Variablen t_{ij} in einer $2n$-reihigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{T}$ angeordnet. Das Polynom Q_k^ν ist homogen vom Grade $n\nu$:

$$Q_k^\nu(a\,\mathfrak{T})=a^{n\nu}\, Q_k^\nu(\mathfrak{T}), \qquad a\in\mathbb{C}.$$

Daraus folgt

Bemerkung. Die Abbildung

$$(2\pi i)^{-n\nu}\mathscr{D}_{k,0}^\nu\colon \mathfrak{M}_{2n}^k\to(\mathfrak{M}_n^{k+\nu}\otimes\mathfrak{M}_n^{k+\nu})^{\mathrm{sym}}$$

führt Modulformen mit rationalen Fourierkoeffizienten in Modulformen mit rationalen Fourierkoeffizienten (bezüglich des Variablenpaares (z_1, z_4)) über.

Für halbganze n-reihige Matrizen $R, T\geqq 0$ definieren wir rationale Zahlen $\alpha_k^\nu(R, S)$ durch die (endliche) Summe

$$\alpha_k^\nu(R, S)=\sum_{A\in\mathbb{Z}^{(n,n)}}\tilde{Q}_k^\nu\begin{pmatrix} R & A \\ A' & T\end{pmatrix} a_{2n}^k\begin{pmatrix} R & A \\ A' & T\end{pmatrix}.$$

Dies sind genau die Fourierkoeffizienten von $(2\pi i)^{-n\nu}\tilde{\mathscr{D}}_{k,0}^\nu\,\Psi_{2n}^k$. Wir erhalten

Satz 13. *Es sei $l-\nu$ gerade, $l-\nu>2n$. Für jedes halbganze $R\geqq 0$ ist*

$$\mathscr{C}_n^{l,\nu}(z, R)=\sum_{T\geqq 0}\alpha_{l-\nu}^\nu(R, T)\, e^{2\pi i\operatorname{Spur}(Tz)}$$

eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht l mit rationalen Fourierkoeffizienten. Für $\nu>0$ erhält man Spitzenformen, für alle

$$f(z)=\sum_{t>0} b(t, f)\, e^{2\pi i\operatorname{Spur}(tz)}\in\mathfrak{S}_n^l$$

gilt

$$\langle f, \mathscr{C}_n^{l,\nu}(*, R)\rangle=(2\pi i)^{-n\nu}\, d_\nu(f, R).$$

Für $v>0$ erzeugt (unter obigen Bedingungen)

$$\{\mathscr{C}_n^{l,v}(*, R) \mid R \text{ halbganz}, \; R>0\}$$

den Raum $\mathfrak{S}_n^l$ linear.

Bemerkungen:

1) Für $v=0$ war in [4] gezeigt worden, daß

$$\{\mathscr{C}_n^{l,0}(*, R) \mid R \text{ halbganz}, \; R \geqq 0\}$$

sogar ganz $\mathfrak{M}_n^l$ erzeugt (l gerade, $l>2n$).

2) Für $n=1$ erhält man die wohlbekannten Funktionen

$$C_{l,l-1}, C_{l,l-3}, \dots, C_{l,3} \qquad (l \text{ gerade}, \; l>2)$$

von Cohen-Zagier ([6, 29]). Bis auf eine Konstante stimmt nämlich für gerade l und v, $l-v>2$ die Funktion $\mathscr{C}_1^{l,v}(*, r)$ überein mit $C_{l,l-v-1} \mid T(r)$, wobei $T(r)$ den r-ten Heckeoperator bezeichnet.

3) Auf das hier offengelassene Problem der expliziten Beschreibung des Polynoms Q_k^v hoffe ich an anderer Stelle näher eingehen zu können.

4) An einigen Stellen taucht in der Literatur das Problem auf, Modulformen von ungeradem Gewicht mit ganzrationalen Fourierkoeffizienten zu konstruieren ([22], in [3] wird diese Schwierigkeit dadurch umgangen, daß von vornherein nur gerade Gewichte behandelt werden). Für gerades n, ungerades l, $l-1>2n$ werden durch die Funktionen

$$\mathscr{C}_n^{l,1}(z, R) = \sum_{T>0} \sum_{A \in \mathbb{Z}^{(n,n)}} \det(A) \, a_{2n}^{l-1}\begin{pmatrix} R & A \\ A' & T \end{pmatrix} e^{2\pi i \operatorname{Spur}(TZ)}$$

einfache Beispiele für Modulformen ungeraden Gewichts mit rationalen Fourierkoeffizienten von beschränktem Nenner gegeben. Verschwinden alle $\mathscr{C}_n^{l,1}(*, R)$, $R>0$ halbganz, identisch, so folgt $\mathfrak{S}_n^l = \{0\}$. Eine weitere Möglichkeit, solche Modulformen zu konstruieren, wird durch Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten gegeben (s.u.).

6. Rationalitätsaussagen für die Standard-Zetafunktion von Andrianov

Der Raum $\mathfrak{S}_n^l$ besitzt eine Basis mit rationalen Fourierkoeffizienten ([3, 7, 22]; für den hier interessierenden Fall großer Gewichte könnte man auch Satz 13 heranziehen). Daher ist für alle Körperautomorphismen σ von $\mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{t>0} b(t, f) \, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}$$

auch f^σ eine Spitzenform vom Gewicht l,

$$f^\sigma(z) := \sum_{t>0} b(t, f)^\sigma \, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(tz)}.$$

Mit ρ sei die komplexe Konjugation bezeichnet. Für $f \in \mathfrak{S}_n^l$ gilt

$$f^\rho(z) = \overline{f(-\bar{z})}.$$

Die Heckeoperatoren vertauschen mit der Operation von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$:

$$(f^\sigma)|T = (f|T)^\sigma \tag{58}$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und alle Heckeoperatoren T ([25, § 7]). Mit f ist dann auch f^σ eine Eigenfunktion der Heckeoperatoren.

Einer Idee Garretts [12] folgend, beweisen wir Rationalitätsaussagen für spezielle Werte der Standardzetafunktion $D_f(s)$. Dabei ist von entscheidender Bedeutung, daß $(2\pi i)^{-nv}\tilde{\mathscr{D}}_{k,0}^v \Psi_{2n}^k$ als Funktion von z_1 und z_4 rationale Fourierkoeffizienten hat. Zur Abkürzung setzen wir

$$\begin{aligned}\lambda^*(f, v) :&= (2\pi i)^{-nv}\tilde{\mu}_{n,v}^l \lambda(f, v)\\ &= 2A_n^l \beta^*(n, l-v) D_f^*(l-n-v).\end{aligned}$$

Für eine Eigenfunktion $f \in \mathfrak{S}_n^l$ aller Heckeoperatoren gilt dann einerseits

$$\left\langle f^\sigma, (2\pi i)^{-nv}\tilde{\mathscr{D}}_k^v \Psi_{2n}^k \begin{pmatrix} -\bar{z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda^*(f^\sigma, v) f^\sigma. \tag{59}$$

Wir wählen andererseits eine Orthogonalbasis $f_1, \ldots, f_d$ von $\mathfrak{S}_n^l$, die aus Eigenfunktionen der Heckealgebra besteht mit $f_1 = f$.

Dann gilt nach der Garrettschen Hauptformel:

$$\begin{aligned}(2\pi i)^{-nv}\tilde{\mathscr{D}}_k^v \Psi_{2n}^k \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^d \lambda^*(f_i, v)\frac{f_i^\rho(z_1) f_i(z_4)}{\langle f_i, f_i\rangle} + \delta_{0,v} F(z_1, z_4)\\ &= \sum_{i=1}^d \lambda^*(f_i, v)\frac{f_i(z_1) f_i^\rho(z_4)}{\langle f_i, f_i\rangle} + \delta_{0,v} F(z_1, z_4)\\ &= \sum_{i=1}^d \lambda^*(f_i, v)^{\sigma\rho}\frac{f_i^{\sigma\rho}(z_1) f_i^{\rho\sigma\rho}(z_4)}{\langle f_i, f_i\rangle^{\sigma\rho}} + \delta_{0,v} F(z_1, z_4)^{\sigma\rho}.\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß $(2\pi i)^{-nv}\tilde{\mathscr{D}}_{k,0}^v \Psi_{2n}^k$ ein Element von $(\mathfrak{S}_n^l \otimes \mathfrak{S}_n^l)^{\mathrm{sym}}$ ist mit rationalen Fourierkoeffizienten. Hieraus folgt

$$\left\langle f^\sigma, (2\pi i)^{-nv}\tilde{\mathscr{D}}_k^v \Psi_{2n}^k \begin{pmatrix} -\bar{z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda^*(f_i, v)^\sigma \frac{\langle f^\sigma, f_i^{\rho\sigma\rho}\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle^\sigma} f_i^\sigma(z). \tag{60}$$

Dabei ist zu beachten, daß im Falle $v=0$ mit F auch F^σ in $(\mathfrak{S}_n^l)^\perp \otimes (\mathfrak{S}_n^l)^\perp$ gelegen ist (zumindest für große Gewichte, vgl. [13, Theorem 2.5]).

Vergleich von (59) und (60) ergibt

$$\lambda^*(f^\sigma, v) = \lambda^*(f, v)^\sigma \frac{\langle f^\sigma, f^{\rho\sigma\rho}\rangle}{\langle f, f\rangle^\sigma}.$$

Man rechnet direkt nach, daß $\lambda^*(f, v)$ von der Gestalt

$$(\text{rationale Zahl}) \cdot \pi^{-d(l,n,v)} D_f(l-n-v)$$

ist, wobei

$$d(l,n,v)=2nl+l-v-vn-\frac{3n(n+1)}{2}.$$

Wir erhalten

Satz 14. *Es sei $l-v$ gerade, $l-v>2n$, $f\in\mathfrak{S}_n^l$ eine Eigenfunktion aller Heckeoperatoren. Dann gilt für alle $\sigma\in\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ mit $d=d(l,n,v)$:*

$$\pi^{-d}\frac{D_{f^\sigma}(l-n-v)}{\langle f^\sigma, f^{\rho\sigma\rho}\rangle}=\left(\pi^{-d}\frac{D_f(l-n-v)}{\langle f,f\rangle}\right)^\sigma. \tag{61}$$

Bemerkungen:

1) Nimmt man zusätzlich an, daß f total reelle algebraische Fourierkoeffizienten hat, so vereinfacht sich wegen $f^{\rho\sigma\rho}=f^\sigma$ die obige Formel, es folgt insbesondere, daß dann der Quotient

$$\pi^{-d}\frac{D_f(l-n-v)}{\langle f,f\rangle}$$

in dem von den Fourierkoeffizienten von f erzeugten algebraischen Zahlkörper liegt.

Im übrigen überlegt man sich leicht, daß in $\mathfrak{S}_n^l$ jeder Eigenraum der Heckealgebra eine Basis besitzt, deren Elemente total reelle algebraische Fourierkoeffizienten haben.

2) Ähnliche Sätze sind für gerades n von Harris [14] und Sturm [25] bewiesen worden, für $n=1$ ebenfalls von Sturm [24] und Zagier [29]. Für ungerades $n>1$ scheint Satz 14 aber neu zu sein.

7. Harmonische Formen

Eine Polynomfunktion $P\colon \mathbb{C}^{(m,n)}\to\mathbb{C}$ heißt harmonische Form vom Gewicht $v\in\mathbb{N}$, falls gilt

a) $P(XA)=\det(A)^v P(X)$ für alle $A\in Gl(n,\mathbb{C})$, $X\in\mathbb{C}^{(m,n)}$, (62a)

b) $\Delta P=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x_{ij}}=0.$ (62b)

Bei festen m,n und v bilden diese Funktionen einen endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $H_v(m,n)$, dessen Dimension man wie folgt berechnen kann: Nach [16] ist $H_v(m,n)$ Darstellungsraum einer explizit angebbaren irreduziblen Darstellung der orthogonalen Gruppe $O(m,\mathbb{C})$, daher kann man die gesuchte Dimension aus den Dimensionsformeln von Weyl [28] ablesen (man vergleiche dazu auch [27, § 6]). Eine einfache Folgerung aus [16, 28] ist

Bemerkung. Es sei m gerade, $m=2(n+t)$, $t\geqq 0$; dann gilt mit einer geeigneten Konstanten c

$$\dim H_v(m,n)\sim c\,v^{\frac{1}{2}n(n+1)+n(2t-1)}\quad \text{für } v\gg 0. \tag{63}$$

(Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen.)

Es sei nun S eine positiv-definite quadratische Form in m Variablen; eine Polynomfunktion Q in der Variablen $X = X^{(m,n)}$ heiße S-harmonisch, falls die Funktion $X \mapsto Q(S^{-\frac{1}{2}} X)$ im gewöhnlichen Sinne harmonisch ist, also (62b) erfüllt; es ist dann Q genau dann S-harmonisch, wenn

$$\operatorname{Spur}(\partial X' S^{-1} \partial X) Q = 0.$$

Daraus folgt, daß für $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ mit Q auch Q^σ eine S-harmonische Form vom Gewicht v ist, falls S rationale Koeffizienten hat; dabei gehe Q^σ aus Q durch Anwendung von σ auf die Koeffizienten von Q hervor.

Nach einer bekannten Schlußweise (vgl. [23, Lemma 3]) folgt daraus:

Bemerkung. Die quadratische Form $S > 0$ habe rationale Koeffizienten. Dann besitzt der Vektorraum $H_v^S(m, n)$ aller S-harmonischen Formen vom Gewicht v eine Basis, die aus Polynomen mit rationalen Koeffizienten besteht.

Wir benötigen noch eine Charakterisierung harmonischer Formen durch die Gaußtransformation. Diese ist für ein Polynom P in der Variablen $X = X^{(m,n)}$ definiert durch

$$\hat{P}(X) = \int_{\mathbb{R}^{(m,n)}} P(U + X)\, e^{-\pi \operatorname{Spur}(U'U)}\, dU.$$

Nach [19] gilt:

Eine Polynomfunktion P auf $\mathbb{C}^{(m,n)}$, die (62a) erfüllt, ist genau dann harmonisch, wenn $P = \hat{P}$.

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Satz 15. *Für jedes feste $X_0 \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ist die Polynomfunktion*

$$X \mapsto P_{X_0}^v(X) := Q_{m/2}^v((X_0, X)'(X_0, X))$$

eine harmonische Form vom Gewicht v in der Variablen $X = X^{(m,n)}$; außerdem ist $P_*^v(*)$ symmetrisch:

$$P_{X_0}^v(X) = P_X^v(X_0). \tag{64}$$

Beweis. Die Eigenschaft (62a) braucht nur für $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ nachgewiesen werden; für reelles A ist aber (62a) ebenso wie die Symmetrieeigenschaft (64) eine unmittelbare Folge der Vertauschungseigenschaften (29a) und (29b) des Operators $\mathcal{D}_{m/2}^v$. Es braucht also nur noch (62b) bzw. $\hat{P}_{X_0}^v = P_{X_0}^v$ gezeigt werden.

Man betrachte für $z_4 \in \mathfrak{H}_n$, $W \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ die Funktion

$$f(z_4, W) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P_{X_0}^v(G + W)\, e^{\pi i \operatorname{Spur}((G+W)'(G+W) z_4)}.$$

Man entwickle nun f in eine Fourierreihe bezüglich W

$$f(z_4, W) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} A(G, z_4)\, e^{2\pi i \operatorname{Spur}(G'W)}$$

und berechne die Fourierkoeffizienten $A(G, z_4)$ auf zwei verschiedene Weisen:

Nach [11, S. 161] gilt für $z_4 = i y_4$:

$$A(G, iy) = \det(y_4)^{-\frac{m}{2}}\, e^{-\pi \operatorname{Spur}(G' G y_4^{-1})} \int_{\mathbb{R}^{(m,n)}} P_{X_0}^v(U y_4^{-\frac{1}{2}})\, e^{-\pi \operatorname{Spur}(1_m [U + i G y_4^{-\frac{1}{2}}])}\, dU.$$

Wegen

$$P_{X_0}^{\nu}(U y_4^{-\frac{1}{2}}) = \det(y_4)^{-\frac{\nu}{2}} P_{X_0}^{\nu}(U)$$

erhält man nach einer Substitution

$$A(G, i y_4) = \det(y_4)^{-\frac{m+\nu}{2}} e^{-\pi \operatorname{Spur}(G' G y_4^{-1})} \hat{P}_{X_0}^{\nu}(-i G y_4^{-\frac{1}{2}}). \tag{65}$$

Andererseits betrachte man für $Z \in \mathfrak{H}_{2n}$, $W \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ die Funktion

$$\begin{aligned} g(Z, W) &= \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} e^{\pi i \operatorname{Spur}(Z[(X_0, G+W)'])} \\ &= e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_1[X_0'] + 2 z_2' X_0' W)} \vartheta_{2W, 2X_0 z_2}(z_4), \end{aligned}$$

wobei wie üblich mit $\vartheta_{A,B}$ die Thetakonstante

$$\vartheta_{A,B}(z_4) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_4[G' + \frac{1}{2}A'] + B'G)}$$

bezeichnet wird ($A, B \in \mathbb{C}^{(m,n)}$).

Die Reziprozitätsformel

$$\vartheta_{A,B}(-z_4^{-1}) = e^{-\frac{\pi}{2}\operatorname{Spur}(A'B)} \det\left(\frac{z_4}{i}\right)^{\frac{m}{2}} \vartheta_{B,-A}(z_4)$$

liefert nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} g(Z, W) &= \det\left(\frac{z_4}{i}\right)^{-\frac{m}{2}} \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} e^{\pi i \operatorname{Spur}(I^{\downarrow}\langle Z\rangle[(X_0, G)'] + 2G'W)} \\ &= i^{\frac{mn}{2}} \Big(\sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} e^{\pi i \operatorname{Spur}(Z[(X_0, G)'] + 2G'W)} \Big)\Big|_{\frac{m}{2}} I^{\downarrow}. \end{aligned}$$

Anwendung des Operators $\mathscr{D}_{\frac{m}{2},0}^{\nu}$ ergibt

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}_{\frac{m}{2},0}^{\nu}\, g(*, W)\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_4 \end{pmatrix} \\ &\quad = e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_1[X_0'])} \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P_{X_0}^{\nu}(G+W)\, e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_4[G'+W'])} = e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_1[X_0'])} f(z_4, W). \end{aligned}$$

Wegen (29b) ist das aber gleich

$$i^{\frac{mn}{2}} \det(z_4)^{-\frac{m}{2}-\nu} \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P_{X_0}^{\nu}(G)\, e^{\pi i \operatorname{Spur}(z_1[X_0'] - z_4^{-1}[G'] + 2G'W)},$$

es folgt

$$A(G, i y_4) = i^{\frac{mn}{2}} \det(z_4)^{-\frac{m}{2}-\nu} e^{-\pi i \operatorname{Spur}(z_4^{-1}[G'])} P_{X_0}^{\nu}(G).$$

Durch Vergleich mit (65) ergibt sich für $z_4 = i \cdot 1_n$:

$$\hat{P}_{X_0}^{\nu}(-iG) = i^{-\nu n} P_{X_0}^{\nu}(G) = P_{X_0}^{\nu}(-iG) \qquad \text{für alle } G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}.$$

Da nun $\hat{P}^{\nu}_{X_0}$ und $P^{\nu}_{X_0}$ zwei Polynomfunktionen auf $\mathbb{C}^{(m,n)}$ sind, die auf dem Gitter $i\mathbb{Z}^{(m,n)}$ übereinstimmen, folgt

$$\hat{P}^{\nu}_{X_0} = P^{\nu}_{X_0}.$$

Bemerkung. Für den Fall $n=1$ werden ähnliche Sätze von Waldspurger [26] sowie Eichler-Zagier [8] auf eher algebraischem Wege bewiesen; sie benutzen nämlich eine explizite Beschreibung der Polynome $P^{\nu}_{X_0}(X)$ durch Gegenbauer-Polynome. Die Tatsache, daß man auf diesem Wege harmonische Formen erhält, erscheint dort als ein glücklicher Zufall (bzw. als „morally certain" [8, Theorem 7.2]).

8. Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten

Für eine harmonische Form $P \in H_\nu(m,n)$, eine positiv definite quadratische Form S in m Variablen und $z \in \mathfrak{H}_n$ bildet man die Thetareihe n-ten Grades

$$\vartheta^n_{S,P}(z) = \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P(S^{\frac{1}{2}} G)\, e^{\pi i \,\mathrm{Spur}(S[G]z)}.$$

Ist S gerade und unimodular, so erhält man eine Modulform (für $\nu > 0$ eine Spitzenform) vom Gewicht $\frac{m}{2} + \nu$ [11]. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines solchen S ist $m \equiv 0 \bmod 8$.

Der Raum $B_{n,l}(m)$, der von allen $\vartheta^n_{S,P}$ (S gerade, unimodular und m-reihig, $P \in H_{l-\frac{m}{2}}(m,n)$) aufgespannt wird, besitzt zwei wichtige Invarianzeigenschaften:

1) $B_{n,l}(m)$ ist invariant unter allen Heckeoperatoren.

2) Für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ gilt $B_{n,l}(m)^\sigma = B_{n,l}(m)$.

Die erste Eigenschaft ist von Freitag [10] unter Verwendung seiner Resultate [9] über vektorwertige singuläre Modulformen gezeigt worden.

Die zweite Invarianzeigenschaft folgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft von $H^S_\nu(m,n)$, dem Raum der S-harmonischen Formen, $S = S^{(m)} > 0$ gerade und unimodular.

Unter dem *Basisproblem* versteht man die Frage, unter welchen Bedingungen an n, m und l der Teilraum $B_{n,l}(m)$ mit dem ganzen Raum $\mathfrak{M}^l_n$ $\left(\text{für } l = \frac{m}{2}\right)$ beziehungsweise $\mathfrak{S}^l_n$ $\left(l > \frac{m}{2}\right)$ übereinstimmt.

Mit dem Basisproblem verbunden ist eine allgemeinere Frage:

Wegen (58) operieren die Heckeoperatoren auf $\mathfrak{S}^l_n(\mathbb{Q})$, dem Raum der Spitzenformen mit rationalen Fourierkoeffizienten. Mit $\mathcal{T}^l_n$ sei die natürliche Darstellung der abstrakten $\mathbb{Q}$-Heckealgebra auf $\mathfrak{S}^l_n(\mathbb{Q})$ bezeichnet. Es ist ein wichtiges – leider kaum direkt angreifbares – Problem in der Arithmetik der Modulformen, den Raum $\mathfrak{S}^l_n(\mathbb{Q})$ als $\mathcal{T}^l_n$-Modul zu studieren. Die Frage nach der Reduzibilität der Darstellung $\mathcal{T}^l_n$ ist äquivalent zur Frage nach der Existenz nichttrivialer Teilräume $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}^l_n$, die invariant unter den Heckeoperatoren sind und $\mathfrak{A}^\sigma = \mathfrak{A}$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ erfüllen.

Der Zusammenhang mit dem Basisproblem ergibt sich aus der (trivialen)

Bemerkung. Falls $\mathscr{T}_n^l$ irreduzibel ist, folgt für alle m mit $\frac{m}{2}<l$:

$$B_{n,l}(m)=\{0\} \quad \text{oder} \quad B_{n,l}(m)=\mathfrak{S}_n^l.$$

Interessant ist in dieser Hinsicht der Fall $n\equiv 0 \bmod 4$, $m=2n$:

Aus dem asymptotischen Verhalten (63) der Dimension von $H_\nu(2n,n)$ folgt jedenfalls, daß

$$B_{n,l}(2n)\subsetneqq \mathfrak{S}_n^l \qquad \text{für } l\gg 0$$

gelten muß, da bekanntlich die Dimension von $\mathfrak{S}_n^l$ asymptotisch mit l^N, $N=\frac{1}{2}n(n+1)$ anwächst.

Die Frage, wann eine Thetareihe $\vartheta_{S,P}^n$ nicht identisch verschwindet, stellt im allgemeinen ein schwieriges Problem dar. Für $m\geqq 2n$ hat Raghavan – einer Idee von Maaß folgend – in [21] gezeigt, daß es für eine geeignete natürliche Zahl $h=h(S,n)$ unter h aufeinander folgenden Gewichten $\nu, \nu+1, \ldots, \nu+h-1$ mindestens ein Gewicht $\nu+j$ gibt, für das mindestens eine Thetareihe $\vartheta_{S,P}^n$, $P\in H_{\nu+j}(m,n)$ nicht verschwindet (Raghavan hat dieses Resultat nur für $\nu=1$ formuliert, sein Beweis ist aber für alle ν gültig).

Daraus erhält man

Satz 15. *Es sei $n\equiv 0 \bmod 4$. Dann gibt es eine natürliche Zahl h derart, daß es für $l\gg 0$ unter den Gewichten $l, l+1, \ldots, l+h-1$ mindestens ein Gewicht l' gibt mit*

$$\{0\}\neq B_{n,l'}(2n)\subsetneqq \mathfrak{S}_n^{l'},$$

insbesondere ist für diese Gewichte die Darstellung $\mathscr{T}_n^{l'}$ reduzibel.

Für $n=1$ hat J. Buhler durch numerische Rechnungen festgestellt, daß $\mathscr{T}_1^l$ für l gerade, $l\leqq 200$ in der Tat irreduzibel ist (vgl. [18, S. 252]).

Für $n=2$ jedoch ist $\mathscr{T}_2^l$ für gerades l im allgemeinen reduzibel:

Die Spezialschar von Maaß stellt nämlich für großes gerades l einen nichttrivialen Teilraum von $\mathfrak{S}_2^l$ dar, der die geforderten Invarianzeigenschaften besitzt [2].

9. Das Basisproblem

Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis von „$B_{n,l}(m)=\mathfrak{S}_n^l$" unter den Nebenbedingungen $m>4n$, $l>\frac{m}{2}$.

Wir beginnen nach dem Vorbild von [4] mit dem Siegelschen Hauptsatz:

Für $k>2n+1$, $2k=m\equiv 0 \bmod 8$ gilt

$$\Psi_{2n}^k(Z)=\gamma(m)^{-1}\sum_{i=1}^{h(m)} \# \operatorname{Aut}(S_i)^{-1}\, \vartheta_{S_i,1}^{2n}(Z). \tag{65}$$

Dabei durchläuft S_i $(1\leqq i\leqq h(m))$ ein vollständiges Repräsentantensystem aller Klassen gerader unimodularer quadratischer Formen $S=S^{(m)}>0$,

$$\operatorname{Aut}(S)=\{U\in Gl(m,\mathbb{Z})\,|\,S[U]=S\},$$
$$\gamma(m)=\sum_{i=1}^{h(m)}\#\operatorname{Aut}(S_i)^{-1}.$$

Wir wenden nun den Operator $\tilde{\mathscr{D}}_k^v$ auf beide Seiten von (65) an. Dabei ist zu beachten:

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathscr{D}}_k^v\vartheta_{S,1}^{2n})\begin{pmatrix} z_1 & 0\\ 0 & z_4\end{pmatrix} &=(\pi i)^n\sum_{G,H\in\mathbb{Z}^{(m,n)}}\tilde{Q}_k^v((G,H)'S(G,H))\,e^{\pi i\operatorname{Spur}(S[G]z_1+S[H]z_4)}\\ &=(\pi i)^n\sum_{G,H\in\mathbb{Z}^{(m,n)}}\tilde{P}^v_{S^{1/2}G}(S^{\frac12}H)\,e^{\pi i\operatorname{Spur}(S[G]z_1+S[H]z_4)}\\ &=(\pi i)^n\sum_{G\in\mathbb{Z}^{(m,n)}}\vartheta^n_{S,\tilde{P}^v_{S^{1/2}G}}(z_4)\,e^{\pi i\operatorname{Spur}(S[G]z_1)}.\end{aligned}$$

Für $f\in\mathfrak{S}_n^{k+v}$ ist die Funktion

$$X\mapsto\mathscr{P}^v_{S,f}(X):=\langle\vartheta^n_{S,\tilde{P}^v_X},f\rangle$$

eine harmonische Form von Gewicht v in der Variablen $X=X^{(m,n)}$, und es gilt

$$\left\langle f,(\tilde{\mathscr{D}}_k^v\vartheta_{S,1}^{2n})\begin{pmatrix}-\bar z & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\right\rangle=(\pi i)^{nv}\,\vartheta^n_{S,\mathscr{P}^v_{S,f}}(z).$$

Es sei nun $f\in\mathfrak{S}_n^{k+v}$ eine Eigenfunktion aller Heckeoperatoren.

Dann gilt einerseits

$$\left\langle f,(\tilde{\mathscr{D}}_k^v\Psi_{2n}^k)\begin{pmatrix}-\bar z & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\right\rangle=\tilde{\mu}^{k+v}_{n,v}\,\lambda(f,v)\,f(z),\tag{66}$$

wegen (65) ist dies andererseits gleich

$$(\pi i)^{nv}\gamma(m)^{-1}\sum_{i=1}^{h(m)}\#\operatorname{Aut}(S_i)^{-1}\,\vartheta^n_{S_i,\mathscr{P}^v_{S_i,f}}(z).\tag{67}$$

Daraus erhält man als vielleicht wichtigstes Ergebnis dieser Arbeit

Satz 16. *Es sei* $m\equiv 0\bmod 8$, $m>4n$. *Dann gilt für alle* $l>\frac{m}{2}$

$$B_{n,l}(m)=\mathfrak{S}_n^l.$$

Darüber hinaus hat man für jede Eigenform $f\in\mathfrak{S}_n^l$ *die folgende explizite Darstellung* $\left(v=l-\frac{m}{2}\right)$

$$\tilde{\mu}^l_{n,v}\,\lambda(f,v)\,f=(\pi i)^{nv}\gamma(m)^{-1}\sum_{i=1}^{h(m)}\#\operatorname{Aut}(S_i)^{-1}\,\vartheta^n_{S_i,\mathscr{P}^v_{S_i,f}}.\tag{68}$$

Bemerkungen. 1) Für $n=1$ ist ein solcher Satz erstmals von Waldspurger [26] gezeigt worden (man vergleiche auch [8]). Die Darstellung (68) einer Eigenform tritt in [8] und [26] nicht explizit auf, kann aber aus den dort angegebenen Resultaten leicht abgeleitet werden.

Den Fall $v=0$, $n\geqq 1$ hatte ich schon in [4] behandelt.

2) Verzichtet man auf die explizite Darstellung (68), so kann man obigen Satz – ohne die Hauptformel von Garrett zu benutzen – auch wie folgt bewiesen:

Nach [10] ist $B_{n,l}(m)$ und damit auch $B_{n,l}(m)^{\perp}$ invariant unter allen Heckeoperatoren. Eine Eigenform $0\neq f\in B_{n,l}(m)^{\perp}$ müßte wegen (65) die Gleichung

$$\left\langle f, \tilde{\mathscr{D}}^{v}_{m/2}\, \Psi^{m/2}_{2n}\begin{pmatrix} -\bar{z} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

erfüllen $\left(v=l-\dfrac{m}{2}\right)$ – im Widerspruch zu (56).

Erratum zu [4]

S. 32, Zeile 3: „$a^{k-r/2}_{n-r}(R_4-T^{-1}[R_2])$" statt „$a^{k-r/2}_{n-r}(R_4-T[R_2])$".

S. 34, Zeile 15: „2 für $s'>0$" statt „1/2 für $s'>0$", die nachfolgenden Formeln sind entsprechend zu korrigieren.

S. 37, Zeile 4: „$w\in Sl(n,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{(n,n)}_{+}$" statt „$w\in GL(n,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{(n,n)}_{n}$".

S. 41, Zeile 30: „$\det(t[w'_3])$" statt „$\det(t[w'_1])$".

S. 41, Zeile 31 ist zu ersetzen durch:
„wobei t und w_1 noch der zusätzlichen Bedingung $t[w'_1]=T$ unterliegen".

S. 42, Zeile 9: „$r-s=s=1$" statt „$r-s=s$".

Literatur

1. Andrianov, A.N.: The multiplicative arithmetic of Siegel modular forms. Russian Math. Surveys **34**, 75–148 (1979)
2. Andrianov, A.N.: Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. Invent. Math. **53**, 267–280 (1979)
3. Baily, W.L.: Automorphic forms with integral Fourier coefficients. In: Several Complex Variables I Maryland 1970, pp. 1–8. Lecture Notes in Math. **155**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
4. Böcherer, S.: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. Math. Z. **183**, 21–46 (1983)
5. Böcherer, S.: Über die Fourierkoeffizienten Siegelscher Eisensteinreihen. Manuscripta math. **45**, 273–288 (1984)
6. Cohen, H.: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. Math. Ann. **217**, 271–285 (1975)
7. Eichler, M.: Zur Begründung der Theorie der automorphen Funktionen in mehreren Variablen. Aequationes Math. **3**, 93–111 (1969)
8. Eichler, M., Zagier, D.: On the theory of Jacobi forms I. Preprint MPI Bonn 1983
9. Freitag, E.: Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann. **254**, 27–51 (1980)

10. Freitag, E.: Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten. Math. Ann. **258**, 419–440 (1982)
11. Freitag, E.: Siegelsche Modulfunktionen. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 254. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1983
12. Garrett, P.B.: Pullbacks of Eisenstein series; applications. Preprint 1980. Eine revidierte Fassung erscheint in: Proceedings of the Katata Conference (1983) on Automorphic Forms in Several Variables. Progress in Math.
13. Harris, M.: The rationality of holomorphic Eisenstein series. Invent. Math. **63**, 303–310 (1981)
14. Harris, M.: Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms. Ann. Sci. E.N.S. **14**, 77–120 (1981)
15. Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. In: Mathematische Werke, S. 789–898. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1970
16. Kashiwara, M., Vergne, M.: On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. Invent. Math. **44**, 1–47 (1978)
17. Klingen, H.: Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen. Math. Z. **102**, 30–43 (1967)
18. Kohnen, W.: Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$. Math. Ann. **248**, 249–266 (1980)
19. Maaß, H.: Spherical functions and quadratic forms. J. Indian Math. Soc. **20**, 117–162 (1956)
20. Maaß, H.: Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen. Math. Ann. **134**, 1–32 (1957)
21. Raghavan, S.: Cusp forms of degree 2 and 3. Math. Ann. **224**, 149–156 (1976)
22. Shimura, G.: On the Fourier coefficients of modular forms of several variables. Nachr. Akadem. Wiss. Göttingen 1975, 261–268
23. Shimura, G.: The critical values of certain zeta functions associated with modular forms of half integral weight. J. Math. Soc. Japan **33**, 649–671 (1981)
24. Sturm, J.: Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight. Amer. J. Math. **102**, 219–240 (1980)
25. Sturm, J.: The critical values of zeta functions associated to the symplectic group. Duke Math. J. **48**, 327–350 (1981)
26. Waldspurger, J.L.: Engendrement par des séries theta de certains espaces de formes modulaires. Invent. Math. **50**, 135–168 (1979)
27. Weissauer, R.: Vektorwertige Siegelsche Modulformen kleinen Gewichtes. J. Reine Angew. Math. **343**, 184–202 (1983)
28. Weyl, H.: The classical groups. Princeton: University Press 1946
29. Zagier, D.: Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In: Modular Functions of One Variable VI, pp. 105–169. Lecture Notes in Math. **627**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977

Eingegangen am 2. März 1984