

# Un principe variationnel pour les empilements de cercles

Yves Colin de Verdière

Institut Fourier, Laboratoire associé au CNRS, BP74,  
F-38402-Saint Martin d'Hères Cedex, France

Oblatum 16-XI-1990

## 0 Introduction

Andreev [AN], puis Thurston [TH] ont prouvé l'existence et l'unicité d'empilements de cercles dont la combinatoire est celle d'une triangulation arbitraire donnée  $\mathcal{T}$  d'une surface compacte  $X$ . Par triangulation, nous entendons ici et dans la suite de l'article complexe simplicial plongé (topologiquement) dans  $X$ .

Nous montrons que tout empilement de cercles de combinatoire  $\mathcal{T}$  est point critique d'une fonctionnelle  $F_a$ , où  $a$  est un système d'angles cohérents de  $\mathcal{T}$  (voir §2 la définition), strictement convexe et propre sur l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^S$  (ou plutôt son quotient par la diagonale), où  $S$  désigne l'ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$ .

Cette propriété redonne une démonstration simple du théorème d'Andreev-Thurston cité plus haut et permet aussi d'obtenir l'existence de certains empilements infinis. Tout algorithme de minimisation d'une fonctionnelle strictement convexe peut s'appliquer pour donner un algorithme de construction d'empilements de combinatoire donnée (comparer à [CV1]).

Nous traitons le problème analogue en géométrie hyperbolique dans le §5. Les résultats obtenus conduisent à une preuve simple du lemme 1 de [ST].

Une question naturelle est de préciser une définition plus directe que la nôtre de la fonction  $F_a$  et peut-être de relier ainsi notre travail à celui de [OPS] qui donne une méthode d'uniformisation des surfaces par les extremas du déterminant.

L'existence d'angles cohérents est prouvée au §7, mais une démonstration plus *géométrique* provient de l'existence d'une déformation géodésique de toute triangulation d'un polygone convexe du plan ou d'une surface compacte à courbure de Gauss négative ou nulle: l'existence d'une telle déformation est prouvée dans [CV2].

Le schéma général répété dans les cas euclidien et hyperbolique est, si:

A=(Donnée d'une triangulation géodésique  $\mathcal{T}$  d'une surface  $X$ , avec ou sans bord, à courbure constante),

B=(Existence et unicité d'une métrique à courbure constante sur  $X$  avec un empilement de cercles pour cette métrique de combinatoire  $\mathcal{T}$ ),

C=(Existence d'un système d'angles cohérents),

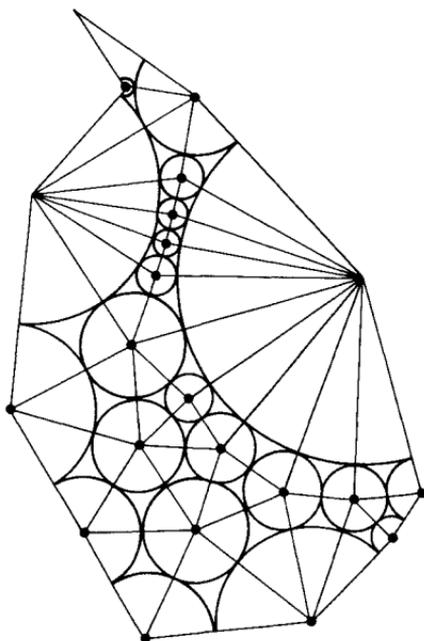


Fig. 1. un empilement plan et la triangulation sous-jacente

alors:

$$C \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C.$$

En particulier, on a ainsi une preuve détournée de l'existence de représentations géodésiques de toute triangulation d'une surface pour une métrique à courbure constante (qui dépend de  $\mathcal{T}$  sauf dans le cas plat où les géodésiques sont les mêmes).

Dans le cas où  $X$  est un domaine du plan, on peut renforcer (B) en demandant que  $X$  s'identifie avec la métrique associée à l'empilement à un domaine *plongé* (et pas seulement immergé) du plan. Cela est possible si on a des hypothèses de convexité ou de complétude (voir §3).

*Remerciements.* Je remercie Alexis Marin de m'avoir introduit à sujet et des discussions que nous avons eues. Merci aussi à François Jaeger pour m'avoir montré l'utilisation géométrique du théorème des flots compatibles.

## 1 Une fonctionnelle sur l'espace des modules des triangles euclidiens

Un triangle euclidien est donné par 3 nombres réels  $>0$ :  $x, y, z$ , tels que les longueurs des côtés soient  $y+z, z+x$  et  $x+y$ . On introduit les variables:

$$u = \log x, \quad v = \log y \quad \text{et} \quad w = \log z.$$

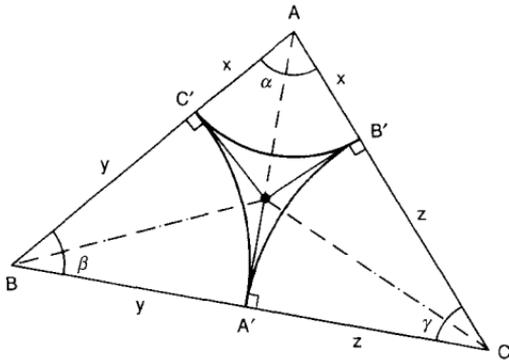


Fig. 2. un triangle euclidien

Soient  $\alpha(u, v, w)$ ,  $\beta(u, v, w)$  et  $\gamma(u, v, w)$  les angles (dans  $]0, \pi[$ ) de ce triangle, on a le:

**Lemme.** La forme  $\omega = \alpha \cdot du + \beta \cdot dv + \gamma \cdot dw$  est fermée.

*Preuve.* (suggérée par Gilles Robert) Si  $r$  est le rayon du cercle inscrit au triangle, on a:

$$r = x \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = y \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = z \cdot \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

d'où  $\omega = (\alpha + \beta + \gamma) \frac{dr}{r} - \alpha \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - \beta \frac{d\beta}{\sin \beta} - \gamma \frac{d\gamma}{\sin \gamma}$  en prenant les dérivées logarithmiques.

**Définition.** Soit  $\mu = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , les angles du triangle euclidien défini par  $(u_0, v_0, w_0)$ , on pose:

$$f_\mu(u, v, w) = \int_{(u_0, v_0, w_0)}^{(u, v, w)} (\alpha_0 - \alpha) \cdot du + (\beta_0 - \beta) \cdot dv + (\gamma_0 - \gamma) \cdot dw.$$

**Théorème.**  $f_\mu$  est une fonction invariante par translation parallèle à la diagonale  $D$  engendrée par  $(1, 1, 1)$ , strictement convexe sur  $\mathbf{R}^3/D$ , propre et  $\geq 0$ .

*Preuve.* (i) L'invariance est claire, car

$$l\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)((\alpha_0 - \alpha) \cdot du + (\beta_0 - \beta) \cdot dv + (\gamma_0 - \gamma) \cdot dw) = (\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) - (\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

(ii) La stricte convexité provient des inégalités, qui se vérifient par un calcul direct

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} < 0; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} > 0.$$

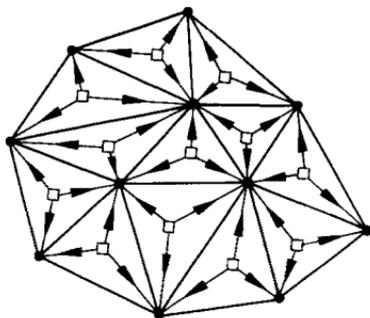


Fig. 3. le graphe  $G$  associé à une triangulation

La matrice des dérivées secondes de  $f_\mu$  admet donc pour noyau la diagonale de  $D$  et est définie positive sur le quotient; la forme quadratique associée est en effet:

$$q(u, v, w) = \frac{\partial \alpha}{\partial v}(v-u)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial w}(w-v)^2 + \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u-w)^2.$$

(iii) On va prouver qu'il existe, pour tout  $\mu$ , des constantes  $A, B > 0$  telles que,  $\forall(u, v, w)$ , on ait:

$$A(|u-v| + |v-w| - 1) \leq f_\mu(u, v, w) \leq B(|u-v| + |v-w| + 1).$$

La majoration est évidente, car les angles sont tous bornés par  $\pi$ .

Pour la minoration, à cause de l'invariance par translation parallèle à la diagonale  $D$ , on peut se restreindre au plan  $P$  d'équation  $u+v+w=0$ .

La fonction  $f_\mu$  est alors strictement convexe sur  $P$  et  $y$  admet un point critique, elle est donc à croissance au moins linéaire dans ce plan, d'où les estimations précédentes.

Précisons géométriquement la notion de propreté du théorème précédent:

lorsque  $f_\mu(u, v, w) \rightarrow +\infty$ , le triangle associé à  $(u, v, w)$  dégénère au sens qu'il a au moins un angle qui tend vers 0.

## 2 Le cas périodique

Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation (topologique) du tore  $X$  de dimension 2. Notons  $S$  l'ensemble des sommets,  $E$  l'ensemble des arêtes,  $F$  l'ensemble des faces (triangles) et  $A$  l'ensemble des angles de  $\mathcal{T}$ .

Il est commode d'associer à  $\mathcal{T}$  un graphe  $G$  orienté (plongé dans  $X$ ), dont l'ensemble des sommets est  $S \cup F$  ( $S$  est plongé comme ensemble des sommets de  $\mathcal{T}$ , alors que  $F$  est plongé comme un point intérieur à chaque face de  $\mathcal{T}$ ).

L'ensemble des arêtes est  $A$  avec, pour  $\alpha \in A$ , l'origine  $\omega_-(\alpha) = t$  si  $\alpha$  est un des 3 angles du triangle  $t$  et l'extrémité  $\omega_+(\alpha) = s$  si  $\alpha$  est un des angles de sommet  $s$ .

**Définition.** On dira que  $a \in ]0, \pi[^A$  est un système d'angles cohérent euclidien si:

- (i)  $\forall s \in S, \quad \sum_{\omega_+(a)=s} a_\alpha = 2\pi$
- (ii)  $\forall t \in F, \quad \sum_{\omega_-(a)=t} a_\alpha = \pi.$

Un tel  $a$  existe toujours (voir §7) et on a un chaque fois qu'on se donne une métrique plate sur  $X$  telle que les arêtes de  $\mathcal{F}$  sont géodésiques.

A tout  $u \in \mathbf{R}^S$ , on associe la métrique euclidienne à singularités coniques  $g_u$  (cf. [TV]) obtenue en recollant les triangles  $t$  de  $F$  munis de la métrique euclidienne qui donne au côté  $s$  la longueur  $e^{u_s} + e^{u_{s'}}$ .

Soit alors  $a$  un système d'angles cohérents, on lui associe la fonction  $F_a: \mathbf{R}^S \rightarrow \mathbf{R}^+$ , définie par

$$F_a(u) = \sum_{t \in F} f_{\mu_t}(u_{t_1}, u_{t_2}, u_{t_3}),$$

où  $t_1, t_2, t_3$  sont les sommets de  $t$  et  $\mu_t = (a_{t_1}, a_{t_2}, a_{t_3})$ .

Remarquons que la différentielle  $dF_a$  de  $F_a$  est indépendante du choix de  $a$ :

$$dF_a = 2\pi \sum_{s \in S} du_s - \sum_{t \in F} \omega_t,$$

où  $\omega_t$  est l'image réciproque de la forme définie au chapitre 1 par l'application  $u \rightarrow (u_{t_1}, u_{t_2}, u_{t_3})$ , où les  $t_i$  sont les sommets de  $t$ .

On a le:

**Théorème.**  $F_a$  est invariante par translation parallèle à la diagonale  $D$  de  $\mathbf{R}^S$ , strictement convexe sur le quotient  $\mathbf{R}^S/D$  et propre. Elle admet donc un unique (à translation parallèle à  $D$  près) minimum  $u$ , qui est associé à l'unique (à homothétie près) empilement de cercles de combinatoire  $\mathcal{F}$ : le rayon du cercle de centre  $s$  est  $e^{u_s}$ .

*Preuve.*

(i) *Propreté:*

L'invariance par translation parallèle à  $D$  est évidente. On peut donc se restreindre au plan  $P$  d'équation  $\sum u_s = 0$ . Lorsque  $u \rightarrow \infty$  dans  $P$ , il existe des coordonnées  $u_s$  qui tendent vers  $+\infty$ , d'autres vers  $-\infty$ . Par connexité du 1-squelette de  $\mathcal{F}$ , il y a au moins un des triangles  $t$  de  $F$  qui dégénère au sens du chapitre 1: la fonction  $f_{\mu_t}$  correspondante tend vers  $+\infty$ , les autres étant  $>0$ , la fonction  $F_a$  tend vers  $+\infty$ .

(ii) *Convexité:*

D'après les mêmes calculs qu'au chapitre 1, la forme quadratique  $q$ , associée à la dérivée seconde de  $F_a$  est:

$$q(v_s) = \sum_{(s,s') \in E} c_{(s,s')} |v_s - v_{s'}|^2,$$

avec

$$c_{(s,s')} = \partial \beta'' / \partial u_s + \partial \beta''' / \partial u_s,$$

où  $\beta''$  et  $\beta'''$  sont les mesures des angles de sommets  $s'$  des 2 triangles  $(s, s', s'')$  et  $(s, s', s''')$  adjacents à l'arête  $(s, s')$ .

Cette forme quadratique admet la diagonale comme noyau et est définie positive sur le quotient  $\mathbf{R}^S/D$ , ainsi qu'on le voit clairement sous la forme écrite.

### (iii) Empilements périodiques

La fin de l'énoncé est claire, car l'écriture de la différentielle  $dF_a$  montre que les points critiques de  $F_a$  correspondent aux métriques  $g_u$  lisses et donc aux empilements périodiques de cercles de combinatoire  $\mathcal{F}$  (cf [CF], [TH]). En effet,  $g_u$  est une métrique riemannienne plate sur le tore: l'image réciproque de l'empilement sur le tore associé à cette métrique par l'exponentielle (qui est l'application de revêtement riemannien universel) donne l'empilement cherché.

Il faut remarquer que la classe conforme de  $g_u$  est imposée par la triangulation topologique donnée sur le tore  $X$ .

## 3 Domaines plats

Une surface à bord simplement connexe plate n'est pas nécessairement isométrique à un domaine du plan euclidien: il suffit de penser à un région du revêtement universel du plan épointé qui ne se projette pas injectivement sur celui-ci. On a cependant le:

**Théorème.** *Soit  $X$  une surface riemannienne à bord, plate simplement connexe, complète dont le bord est géodésiquement convexe, alors  $X$  est isométrique à un domaine à bord, convexe, du plan euclidien.*

*Preuve.* Les hypothèses impliquent que  $X$  est géodésiquement convexe: pour tout couple  $x, y$  de points intérieurs à  $X$ , il existe une unique géodésique minimisante, contenue dans l'intérieur de  $X$ . L'existence provient de la complétude, le fait qu'elle ne rencontre pas le bord de la convexité géodésique et l'unicité résulte alors de la platitude.

Cela permet d'installer sur  $X$  un système global de coordonnées polaires

$$(r, \theta) \quad \text{avec} \quad 0 \leq r \leq F(\theta).$$

On peut ainsi construire un domaine du plan globalement isométrique à  $X$ .

## 4 Le cas planaire: empilements finis

Maintenant  $\mathcal{F}$  est une triangulation topologique finie d'une région  $D$  simplement connexe du plan; on garde les notations du §2, mais maintenant  $S = S_0 \cup S_1$  où  $S_0$  est l'ensemble des sommets intérieurs et  $S_1$  l'ensemble des sommets frontière. De même,  $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$ , où  $E_0$  sont les arêtes joignant 2 sommets intérieurs,  $E_1$  celles joignant un sommet intérieur et un sommet frontière et  $E_2$  les arêtes de la frontière.

On cherche à résoudre un *problème de Dirichlet*:  $u_1 \in \mathbf{R}^{S_1}$  étant donné, trouver  $u \in \mathbf{R}^S$  tel que  $u|_{S_1} = u_1$  et la métrique  $g_u$  est lisse dans  $D^0$ .

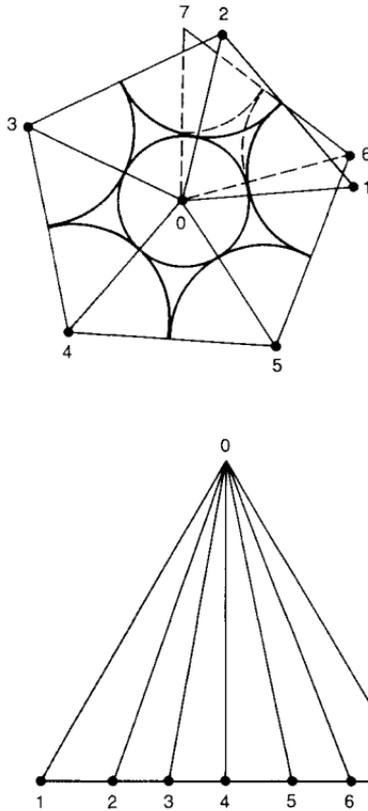


Fig. 4. un empilement non plongé et la triangulation associée

Les cercles de centres  $s$  et de rayon  $u_s$  forment un empilement, à ceci près que les cercles frontière peuvent se recouper et même que le domaine  $D$  muni de cette métrique plate peut dans certains cas ne pas se plonger comme un domaine euclidien du plan (remarque que je dois à Yves Carrière). On a des exemples de cette situation en considérant une région simplement connexe compacte du revêtement universel plat du plan épointé, triangulée par l'image réciproque du réseau équilatéral, ou même plus simplement en considérant la triangulation suivante sans sommets intérieurs, et pour laquelle le problème de Dirichlet est tout résolu.

On a le :

**Théorème.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe un  $u$  unique tel que  $u|_{S_1} = u_1$  et  $g_u$  est lisse dans  $D^0$ .*

*Preuve.* D'après [TU] (ou [CV 2]),  $\mathcal{F}$  admet une déformation géodésique. On choisit le système d'angles cohérent défini par cette déformation géodésique.

La preuve est alors une adaptation du cas périodique: on a une fonctionnelle  $F_a: \mathbf{R}^{S_0} \rightarrow \mathbf{R}$ , associée à ce système  $a$  d'angles cohérent, obtenue en figeant les coordonnées relatives à  $S_1$ . Cette fonctionnelle est propre (sans passage au quo-

tient) et strictement convexe; la forme quadratique associée à la dérivée seconde de  $F_a$  est:

$$q(v_s) = \sum_{(s,s') \in E_0} c_{s,s'} (v_s - v_{s'})^2 + \sum_{(s,s') \in E_1} c_{s,s'} v_s^2,$$

où les  $c_{s,s'}$  sont  $> 0$ , qui est définie positive.

**Corollaire** (Empilements sur la sphère). *Si  $\mathcal{T}$  est une triangulation de la sphère  $S^2$ , il y a un empilement de cercles, unique à transformation de Möbius près, de combinatoire définie par  $\mathcal{T}$*

*Preuve.* Il existe une projection stéréographique qui envoie 3 cercles 2 à 2 tangents extérieurement de  $S^2$  sur 3 cercles de rayon 1 du plan: on est ainsi ramené à un problème de Dirichlet du type précédent, où  $S_1$  est formé de 3 sommets et  $u_1 = (0, 0, 0)$ . Cet empilement est plongé, d'après le §3, car le domaine  $D$  est bordé par un triangle euclidien (donc convexe).

On peut aussi résoudre un problème de Neumann:

on se donne une triangulation  $\mathcal{T}$  d'un polygone  $P$  convexe du plan euclidien telle que le bord de  $\mathcal{T}$  soit le bord du polygone  $P$  et que les sommets de ce bord soit ceux de  $P$ . On a alors le:

**Théorème.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe un empilement de cercles dans le plan, unique à dilatation près, tel que la triangulation géodésique associée à cet empilement soit une triangulation d'un polygone  $P_1$  ayant les mêmes angles que  $P$  (et donc convexe et plongé).*

*Preuve.* On utilise d'abord le résultat de [TU] (voir aussi [CV 2]) qui permet de rendre  $\mathcal{T}$  géodésique sans changer les sommets du bord. Ce résultat de Tutte est un analogue discret du théorème de Choquet [CH].

La démonstration est alors la même que dans le cas périodique, à partir du système d'angles donnés par la triangulation  $\mathcal{T}$  rendue géodésique et sans condition au bord. La nullité de la différentielle de  $F_a$  par rapport aux variables  $u_s$  pour  $s$  sommet du bord assure la conservation des angles (qui joue le même rôle que  $2\pi$  pour les sommets intérieurs).

On pourrait englober ces résultats, construisant des métriques  $g_u$  ayant les mêmes angles coniques que ceux d'un système d'angles donné, ne vérifiant pas nécessairement la condition de somme  $2\pi$  aux sommets.

## 5 Le cas des surfaces à caractéristique d'Euler $< 0$

Soit  $X$  une surface compacte de caractéristique d'Euler  $< 0$  et  $\mathcal{T}$  une triangulation topologique finie de  $X$ . Pour faire une construction analogue à celle du §2, il faut d'abord obtenir une fonctionnelle analogue à  $f_u$  dans le cas hyperbolique.

Soient donc  $y + z$ ,  $z + x$  et  $x + y$  les longueurs des côtés d'un triangle hyperbolique d'angles  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, \pi[$ , on a le:

**Lemme.** *La forme*

$$\omega = \alpha \frac{dx}{\sinh(x)} + \beta \frac{dy}{\sinh(y)} + \gamma \frac{dz}{\sinh(z)}$$

*est fermée.*

*Preuve.* C'est un calcul sans malices à partir des formules de la trigonométrie hyperbolique (voir [BN] p. 148):

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma \\ \frac{\sin \alpha}{\sinh a} &= \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}. \end{aligned}$$

En effet, il suffit de calculer  $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$  et on vérifie que:

$$\frac{1}{\sinh z} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{2 \sinh y}{\sinh b \cdot (\sinh a \cdot \sinh b \cdot \sin \gamma)}$$

et donc par symétrie:

$$\frac{1}{\sinh z} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{\sinh x} \frac{\partial \alpha}{\partial z}.$$

Soit  $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sinh t}$ , on paramètre les triangles hyperboliques (ayant éventuellement 1 ou des sommets à l'infini) par

$$(u = \varphi(x), \quad v = \varphi(y), \quad w = \varphi(z)) \in \Omega = [0, +\infty[^3$$

et on définit, pour  $\mu = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , angles du triangle hyperbolique défini par  $(u_0, v_0, w_0) \in \Omega$ , la fonction  $g_\mu(u, v, w)$  par les conditions:

$$dg_\mu = (\alpha - \alpha_0) du + (\beta - \beta_0) dv + (\gamma - \gamma_0) dw$$

et

$$g_\mu(u_0, v_0, w_0) = 0.$$

**Théorème.** La fonction  $g_\mu$  est strictement convexe,  $>0$ , et propre sur  $\Omega$ .

*Preuve.* Le seul problème est de vérifier la stricte convexité; utilisant la formule de Gauss-Bonnet,  $A = \text{aire}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ , il vient pour la forme quadratique  $q$  associée à  $g_\mu''$ :

$$\begin{aligned} q(U, V, W) &= -\frac{\partial \alpha}{\partial v} (V-U)^2 - \frac{\partial \beta}{\partial w} (W-V)^2 - \frac{\partial \gamma}{\partial u} (U-W)^2 \\ &\quad - \frac{\partial A}{\partial u} U^2 - \frac{\partial A}{\partial v} V^2 - \frac{\partial A}{\partial w} W^2 \end{aligned}$$

Il suffit alors de vérifier les inégalités:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial x} > 0.$$

*Remarque.* La fonction  $g_\mu$  est lisse jusqu'au bord de  $\Omega$ . Son prolongement analytique à  $\mathbf{R}^3$  doit pouvoir s'interpréter à l'aide de l'espace des modules des "triangles" ayant un ou plusieurs angles ouverts (quadrilatères, pentagones ou hexagones).

On a maintenant le:

**Théorème.** Soient  $X$  une surface compacte de genre  $\geq 2$  et  $\mathcal{T}$  une triangulation topologique de  $X$ , il existe sur  $X$  un unique empilement de cercles pour une métrique à courbure  $-1$  bien déterminée.

*Preuve.* C'est la même idée que dans le cas des tores (§2): à partir d'un système d'angles cohérent hyperbolique (voir §6), on construit une fonctionnelle  $G$  sur  $[0, +\infty[^S$  qui est strictement convexe et propre. Le point critique de cette fonctionnelle détermine les rayons des cercles de l'empilement cherché.

**Corollaire.** On peut rendre géodésique toute triangulation topologique d'une surface de genre  $\geq 2$ , pour une métrique à courbure  $-1$  (que l'on ne peut pas imposer par la méthode proposée).

Ce corollaire peut être vu comme l'analogue discret de [S-Y].

*Remarque.* On peut penser cet empilement comme un empilement de cercles euclidiens dans le disque unité de  $\mathbb{C}$  périodique par rapport à l'action d'un groupe fuchsien cocompact, en effet pour la métrique de Poincaré du disque les cercles hyperboliques sont aussi des cercles euclidiens, on ne peut cependant pas travailler directement dans un contexte euclidien car il n'y a pas de système cohérent d'angles qui soit périodique par rapport à l'action du groupe fuchsien.

Une extension aux groupes de type fini non cocompacts ne devrait pas poser de problème, une fois la fonctionnelle  $g_\mu$  étendue à  $\mathbb{R}^3$ .

## 6 Empilements infinis

Soit maintenant  $\mathcal{T}$  une triangulation localement finie, sans bord, d'un ouvert  $\omega$  du plan euclidien.

Soit  $a$  un système d'angles cohérent pour  $\mathcal{T}$ : il en existe d'après [TO 1], th. 8.6 et 7.4, si  $\mathcal{T}$  est propre (les sommets ne s'accroissent que vers l'infini du plan), car alors  $\mathcal{T}$  peut être rendue géodésique.

Soit, si  $S$  est l'ensemble (infini) des sommets de  $\mathcal{T}$ ,

$$F_a: \mathbb{R}^S \rightarrow [0, +\infty]$$

la fonctionnelle construite comme plus haut (cas euclidien).

**Définition.**  $u \in \mathbb{R}^S$  est dit  $a$ -borné si  $F_a(u) < \infty$ .

On a le:

**Théorème.** S'il existe  $u_0 \in \mathbb{R}^S$ ,  $a$ -borné, alors il existe  $u \in \mathbb{R}^S$  unique (à translation près parallèle à la diagonale) tel que

- i) la métrique  $g_u$  est plate,
- ii)  $u$  est  $a$ -borné.

*Preuve.* Soit

$$K = \{u \in \mathbb{R}^S \mid F_a(u) \leq F_a(u_0) \text{ et } u_{s_0} = 0\},$$

où  $s_0$  est un sommet de  $\mathcal{T}$  choisi une fois pour toutes (normalisation).

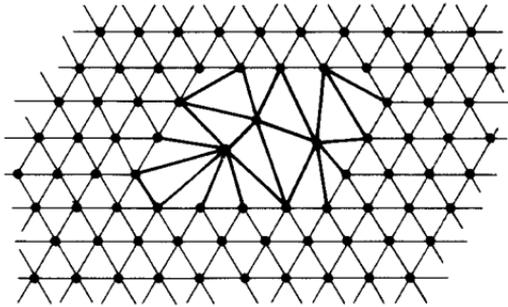


Fig. 5. modification de  $\mathcal{T}$  à support compact

Alors  $K$  est un compact (non vide, car contenant  $u_0$ ) pour la topologie induite par la topologie produit de  $\mathbf{R}^S$ . En effet il est clair que  $K$  est fermé (car  $F_a$  est semi-continue inférieurement sur  $\mathbf{R}^S$ , comme somme de fonctions  $\geq 0$  continues: les  $f_{\mu_t}$ ) ( $t$  triangle de  $\mathcal{T}$ ).

De plus chaque composante de  $u$  est bornée sur  $K$ : chaque  $f_{\mu_t}$  étant bornée sur  $K$ , les  $|u_s - u_{s'}$  sont bornées pour chaque arête, et par connexité tous bornés puisque  $u_{s_0} = 0$ .

Maintenant, il est clair que  $F_a$  atteint son minimum sur  $K$  (car  $F_a$  est s.c.i.).

La métrique  $g_u$  associée à ce minimum est plate, comme on peut le voir par variation individuelle des  $u_s$ .

L'unicité résulte de la stricte convexité de  $F_a$  sur le convexe  $K$ . Soient en effet  $u_1, u_2 \in K$ , et  $\varphi(x) = F_a(xu_1 + (1-x)u_2)$ . La fonction  $\varphi$  est convexe sur  $[0, 1]$ , comme somme de telles fonctions. Si elle n'était pas strictement convexe, aucune des composantes ne le serait ce qui impose pour chaque triangle que  $u_1$  et  $u_2$  ont même différence aux 3 sommets de  $t$ . Globalement, de proche en proche  $u_1$  et  $u_2$  ont une différence constante et sont donc égaux, car nuls en  $s_0$ .

*Applications à des empilements infinis*

Soit  $\mathcal{E}_0$  un empilement de cercles infini associé à une triangulation  $\mathcal{T}_0$  géodésique d'un ouvert  $\omega$  du plan euclidien. On a le:

**Théorème.** *Soit  $\mathcal{T}$  une modification géodésique à support compact de  $\mathcal{T}_0$  (c'est-à-dire que  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_0$  coïncident hors d'un compact de  $\omega$ ), alors il existe sur  $\omega$  une métrique plate  $g_u$  et un empilement de cercles  $\mathcal{E}$  pour la métrique  $g_u$  de combinatoire  $\mathcal{T}$  uniques (à dilatation près), tels que  $u$  est  $a$ -borné, où  $a$  est le système d'angles associé à la triangulation géodésique  $\mathcal{T}$ .*

*Preuve.* On peut appliquer le théorème précédent en prenant  $u_0$  coïncidant au voisinage de l'infini avec  $v_0 \in \mathbf{R}^{S_0}$  défini par l'empilement  $\mathcal{E}_0$  et pour  $a$  le système d'angles donné par la triangulation géodésique  $\mathcal{T}$ : on a alors  $F_a(u_0) < \infty$ , car cette somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Il n'y a aucune raison a priori pour que  $(\omega, g_u)$  soit isométrique à un ouvert du plan euclidien (voir §3), c'est cependant vrai dans le cas des:

**Théorème (cas euclidien).** *Si  $\omega$  est le plan, que  $\mathcal{T}_0$  est de degré (valence) borné et que*

$$u_0 \in l^\infty(S_0),$$

alors l'empilement  $\mathcal{E}$  est un empilement de cercles plongé dans le plan euclidien et la triangulation sous-jacente est une triangulation propre du plan.

*Preuve.* Le ring lemma de [R-S] et l'hypothèse de valence bornée impliquent que pour l'empilement  $\mathcal{E}$  on a  $(u_s - u_{s'}) \in l^\infty(E)$  (où  $E$  est l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{T}$ ). On en déduit que  $u$   $a$ -borné équivaut à

$$\sum_{(s, s') \in E} \{(u_s - u_{s'}) - (u_s^0 - u_{s'}^0)\}^2 < \infty.$$

En effet, on a une estimation :

$$f_\mu(u, v, w) \geq C \cdot \{((u - v) - (u_0 - v_0))^2 + ((v - w) - (v_0 - w_0))^2 + ((w - u) - (w_0 - u_0))^2\},$$

uniforme lorsque  $(u, v, w)$  et  $(u_0, v_0, w_0)$  restent dans un compact de  $\mathbf{R}^3/D$ . D'où l'on déduit par Cauchy-Schwarz que :

$$|u_s| = O(\sqrt{\|s\|})$$

(avec  $\|s\|$  = distance combinatoire ou distance euclidienne initiale sur  $\omega$ , car elle lui est équivalente,  $u_0$  étant borné).

On en déduit l'écriture :

$$g_u = e^{\varphi(z)} |dz + \mu(z) d\bar{z}|^2$$

avec  $\varphi(z) = O(\sqrt{|z|})$  (croissance de  $(u_s)$ ) et  $\mu(z)$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini (car

$$(u_s - u_{s'}) - (u_{0,s} - u_{0,s'})$$

tend vers 0 quand l'arête  $(s, s')$  tend vers l'infini).

Résolvant l'équation de Beltrami pour la fonction  $\mu$  [AL], on a un difféomorphisme  $\psi$  du plan tel que :

$$\psi^*(g_u) = e^{\varphi_1} |dz|^2,$$

avec  $\varphi_1$  harmonique (car  $g_u$  est plate), à croissance sous-linéaire (théorème de Mori, [AL], p. 47, appliqué au voisinage de l'infini, avec  $K$  voisin de 1), donc constante. Donc  $(\omega, g_u)$  est isométrique au plan euclidien.

**Théorème** (cas hyperbolique). *Si  $\omega$  est le disque, on considère la triangulation hyperbolique associée à  $\mathcal{E}_0$  (triangulation géodésique pour la métrique de Poincaré du disque), et on suppose qu'il existe un nombre  $r > 0$ , tel que les rayons des cercles hyperboliques de  $\mathcal{E}_0$  soient minorés par  $r$ . Alors l'empilement  $\mathcal{E}$  est plongé et la triangulation sous-jacente est une triangulation propre du disque.*

*Preuve.* L'hypothèse faite implique que les rayons des cercles de  $\mathcal{E}$  sont bornés inférieurement par une constante  $> 0$  (minoration uniforme des  $g_\mu$  par  $C \cdot \sup(\|u - u_0\| - 1, 0)$ ). Puis que  $\sum \|u_s - u_{s,0}\|^2 < \infty$ , car les dérivées secondes des  $g_\mu$  sont alors uniformément minorées. On en déduit que les métriques  $g_\mathcal{E}$  et  $g_{\mathcal{E}_0}$  ont un rapport qui tend vers 1 à l'infini : la métrique  $g_\mathcal{E}$  est donc complète, et par suite isométrique à la métrique hyperbolique du disque, ce qui donne le résultat.

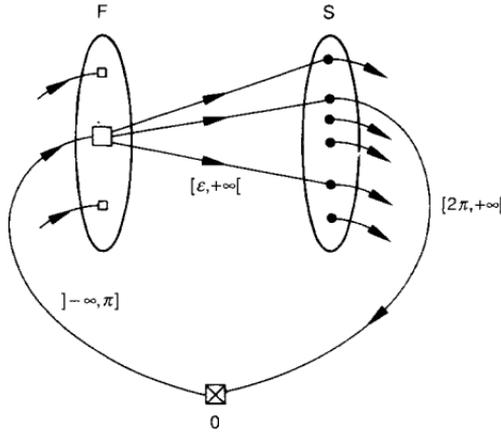


Fig. 6. le graphe  $G'$

### 7 Existence de systèmes d'angles cohérents

**Théorème.** Soit  $\mathcal{T}$  une triangulation topologique d'une surface compacte  $X$  sans bord à caractéristique d'Euler  $\leq 0$ , il existe un système d'angles cohérents pour  $\mathcal{T}$ .

*Preuve.* Elle utilise le théorème du *flot compatible*, qui assure, sous une hypothèse simple, l'existence sur un graphe orienté donné d'un courant global dont l'intensité dans chaque branche doit être dans un intervalle fermé donné (cf [BE], chap. 5).

Ici le graphe est  $G'$  fabriqué à partir de  $G$  en ajoutant un sommet  $0$  et des arêtes  $(0, t)$  pour tout  $t \in F$  et  $(s, 0)$  pour tout  $s \in S$ .

Les arêtes ne contenant pas  $0$  sont parcourues par un courant d'intensité égale à la valeur de l'angle.

#### i) Caractéristique d'Euler nulle

Dans ce cas on impose au courant d'être dans  $]-\infty, \pi]$  pour les arêtes  $(0, t)$ , dans  $[\varepsilon, +\infty[$  pour les arêtes de  $G$ , avec  $\varepsilon = \pi/3|F|$ , et dans  $[2\pi, +\infty[$  pour les arêtes  $(s, 0)$ .

Un tel courant est visiblement équivalent à la donnée d'un système d'angles cohérent. En effet, la somme des angles pour chaque triangle est  $\leq \pi$ , mais la loi de Kirchoff en  $O$  et la formule d'Euler ( $|S| = 2|F|$  pour une triangulation du tore) oblige cette somme à valoir  $\pi$ . Pour la même raison la somme des angles par sommet vaut  $2\pi$ .

Les angles  $\geq \varepsilon$  sont alors  $< \pi$ , puisque leur somme par triangle vaut  $\pi$ .

L'hypothèse du théorème du *flot compatible* est que pour toute partie  $Z$  de l'ensemble des sommets de  $G'$ , la somme des majorants des courants sortants de  $Z$  est supérieure ou égale à la somme des minorants des courants entrants.

Il y a 2 cas à considérer:

1)  $0 \notin Z$

Ce cas est très simple.

2)  $0 \in Z$

*Notation: on note  $[X \rightarrow Y]$  le nombre d'arêtes de  $G'$  ayant leur origine dans l'ensemble des sommets  $X$  et leur extrémité dans l'ensemble  $Y$ .*

Soit  $Z = \{0\} \cup B \cup C$ , où  $B$  et  $C$  sont comme plus haut. On n'a rien à vérifier si  $[B \rightarrow S \setminus C] \geq 1$ , car on a alors  $+\infty$  à gauche de l'inégalité. Dans le cas contraire, on écrit  $C = C_1 \cup C_2$ , où  $C_1$  est l'ensemble des sommets de triangles de  $B$  et  $C_2$  les autres sommets de  $C$ . On doit vérifier:

$$\pi|F \setminus B| \geq 2\pi|S \setminus C| + \varepsilon[F \setminus B \rightarrow C].$$

Comme  $2|S| = |F|$ , il reste:

$$2|C| \geq |B| + \varepsilon'[F \setminus B \rightarrow C],$$

avec  $\varepsilon' = \varepsilon/\pi$ .

Soit  $Y$  le sous-complexe de  $\mathcal{F}$ , réunion des triangles de  $B$ ,  $E_1$  les côtés bordants et  $E_2$  les côtés intérieurs de  $Y$ . Soit  $N$  le nombre de cycles du bord de  $Y$ .

On a:

$$\begin{aligned}\chi(Y) &= |B| - |E_1| - |E_2| + |C_1| \\ 0 &= 3|B| - |E_1| - 2|E_2|\end{aligned}$$

D'où:

$$2|C_1| - |B| = |E_1| + 2\chi(Y),$$

L'inégalité à vérifier devient donc:

$$2|C_2| + |E_1| + 2\chi(Y) \geq \varepsilon'[F \setminus B \rightarrow C]$$

Si on complète  $Y$  en ajoutant un disque à chaque composante du bord on obtient  $\tilde{Y}$  avec  $\chi(\tilde{Y}) \geq 0$  et  $\chi(Y) = \chi(\tilde{Y}) - N$ . Comme  $|E_1| \geq 3N$  (car dans un complexe simplicial, 2 arêtes ont au plus un point commun), il reste:

$$2|C_2| + N \geq \varepsilon'[F \setminus B \rightarrow C].$$

Ce qui est visiblement assuré pour le  $\varepsilon$  choisi.

(ii) *Caractéristique d'Euler  $< 0$*

On utilise la même stratégie, mais la contrainte sur les arêtes  $(0, t)$  devient maintenant l'appartenance à  $] -\infty, \pi - \varepsilon]$ . Il est clair que cela impose aux angles de chaque triangle d'être ceux d'un triangle hyperbolique.

La contrainte sur les arêtes  $(s, 0)$  devient l'égalité à  $2\pi$ .

La démonstration est semblable sauf que l'on utilise les relations  $2|S| - |F| = \chi(X)$  (au lieu de  $2|S| - |F| = 0$ ) et  $\chi(\tilde{Y}) \geq \chi(X)$  (au lieu de  $\chi(\tilde{Y}) \geq 0$ ).

## Bibliographie

- [AL] Ahlfors, L.: Lectures on quasi-conformal mappings. Van Nostrand 1982
- [AN] Andreev, E.M.: On convex polyhedra in Lobachevskii spaces. Mat. USSR Sbornik **10**, 413-440 (1970)
- [BE] Berge, C.: Graphes et hypergraphes. Dunod 1973
- [BN] Beardon, A.: The geometry of discrete groups. Berlin Heidelberg New York: Springer 1983

- [CH] Choquet, G.: Sur un type de transformation analytique... défini au moyen de fonctions harmoniques. *Bull. Sci. Math.*, **69**, 156–165 (1945)
- [CV 1] Colin de Verdière, Y.: Empilements de cercles: convergence d'une méthode de points fixe. *Forum Math.* **1**, 395–402 (1989)
- [CV 2] Colin de Verdière, Y.: Déformations géodésiques des triangulations de surfaces, Pré-publication de l'Institut Fourier n° 161 (1990)
- [FY] Fary, I.: On straight line representation of planar graphs. *Acta Sci. Math. Szeged* **II**, 229–233 (1948)
- [OPS] Osgood, Phillips, Sarnak: Extremals of determinants of Laplacians. *J. Funct. Anal.* **80**, 148–212 (1988)
- [RS] Rodin, B., Sullivan, D.: The convergence of circle packings to the Riemann mapping. *J. Diff. Geom.* **26**, 349–360 (1987)
- [SM] Schramm, O.: Existence and uniqueness of packings with specified combinatorics. Preprint UCSD (à paraître, 1990)
- [ST] Stephenson, K.: Circle packings in the approximations of conformal mappings. *Bull. AMS* **123**, 407–415 (1990)
- [S–Y] Schoen, R., Yau, S.T.: On univalent harmonic maps between surfaces. *Invent. Math.* **44**, 265–278 (1978)
- [TH] Thurston, W.: The geometry and topology of three-manifolds. Princeton Notes, chap. 13, 1978
- [TO 1] Thomassen, C.: Planarity and duality of finite and infinite graphs. *J. Comb. Theory B* **29**, 244–271 (1980)
- [TO 2] Thomassen, C.: Plane representations of graphs. In: *Progress in graph theory*, pp. 43–69. Academic press 1984
- [TU] Tutte, W.: How to draw a graph. *Proc. Lond. Math. Soc.* **13**, 743–768 (1963)
- [TV] Troyanov, M.: Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Ens. Math.* **32**, 79–94 (1986)
- [ZH] Zheng,-Xu He: An estimate for hexagonal circle packings, *J. Diff. Geom.* (à paraître 1990)