SUR L'EXISTENCE DE CERTAINES CONFIGURATIONS D'EQUILIBRE RELATIF DANS LE PROBLEME DES N CORPS

B. ELMABSOUT

Laboratoire de Mécanique et de Mathématiques Appliquées I.M.T.A., Université Paris 6, France

(Received: 6 October, 1986; accepted: 29 January, 1988)

Résumé. On sait que les positions d'équilibre relatif dans le problème des trois corps, où les corps se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral, existent lorsque les masses sont quelconques; tandis que pour $n = 4$ (voir [3]) et pour $n = 5$ (voir [4]), les positions d'équilibre relatifs, où les corps se trouvent aux sommets d'un polygone régulier de n cotés, existent seulement si les masses sont égales. L'objet de cet article est de montrer que ce dernier résultat est vrai pour tout $n \geqslant 4$.

Abstract. It is known that in the three body problem, the equilateral configuration of relative equilibrium exists for all values of masses, while in the n-body problem, for $n = 4$ (see [3]) and $n = 5$ (see [4]), the position of relative equilibrium where the bodies are at the vertices of a regular polygon with n sides, exists only if the masses are equal.

We prove in this paper, that this last result is true for all $n \geqslant 4$.

1. Introduction

Considérons n corps $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de masses respectives $m_1, m_2, \ldots., m_n$ soumis dans le plan $\mathbb{R}^2$ aux attractions newtonniennes mutuelles. Supposons que le centre des masses soit fixe à l'origine O du plan.

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, q_i désignera le vecteur **OM** de composantes (x^{2i-1}, x^{2i}). Soit

$$M^{2n} = \left\{ x = (x^1, \ldots, x^{2n}) \in (R^2)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot q_i = 0 \right\},$$

et

$$\Delta_{ij} = \{x\, M^{2n} | x_i = x_j\}. \quad \text{Notons} \quad \Delta = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Delta_{ij}$$

Le *hamiltonien* H est

$$H: (M^{2n} - \Delta) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to H(x, y) = \tfrac{1}{2} \| y \|^2 - U(x),$$

où

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i [(x^{2i-1})^2 + (x^{2i})^2], \quad \text{si} \quad x \in M^{2n},$$

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} [(y_{2i-1})^2 + (y_{2i})^2],$$

où

$$p_i = (y_{2i-1}, y_{2i}) \in \mathbb{R}^2,$$

avec

$$p_i = m_i \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}, \quad U(x) = \sum_{i<j} m_i \cdot m_j / r_{ij}(x),$$

où $r_{ij}(x) = |q_i - q_j|$ est la distance entre les corps M_i et M_j:

$$r_{ij}(x) = [(x^{2i-1} - x^{2j-1})^2 + (x^{2i} - x^{2j})]^{1/2}.$$

Un point $x = (x^1, \ldots, x^{2n}) \equiv (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de $(M^{2n} - \Delta)$ est un *point d'équilibre relatif* s'il existe un groupe à un paramètre φ_t de rotations du plan $\mathbb{R}^2$ tel que

$$[\varphi_t(q_1), \varphi_t(q_2), \ldots, \varphi_t(q_n)]$$

soit solution du système d'équations de Hamilton:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots n.$$

L'ensemble R_e des points d'équilibre relatifs est invariant par rotation dans $\mathbb{R}^2$ et par multiplication par un scalaire non nul. Le quotient $\bar{R}_e$ de R_e par S^1 et par $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des *classes d'équilibre relatif.*

2. Mise en Equations

Soit $S = \{x \in (M^{2n} - \Delta) \mid \| x \| = 1\}$. On sait (voir [5]) que $x \in S$ est un point d'équilibre relatif si et seulement si x est un point critique de l'application:

$$V: S \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sum_{i<j} m_i \cdot m_j / r_{ij}(x)$$

qui est la restriction à S de la fonction de force U.

Ainsi tout point critique de S doit vérifier:

$$(E)\colon \mathrm{d}V(x) + (\alpha'/2)\,\mathrm{d}(\| x \|^2 - 1) + \beta \cdot d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x^{2i-1}\right) + \gamma \cdot d\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x^{2i}\right) = 0,$$

où α', β et γ sont des constantes à déterminer. Or, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V(x) &= -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2(x)} \mathrm{d}r_{ij}(x) = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} [(x^{2i-1} - x^{2j-1})\,\mathrm{d}(x^{2i-1} - x^{2j-1}) + \\
&\qquad + (x^{2i} - x^{2j})\,\mathrm{d}(x^{2i} - x^{2j})] \\
&= -\sum_{i<j} [(x^{2i-1} - x^{2j-1})\,\mathrm{d}x^{2i-1} + \\
&\qquad + (x^{2j-1} - x^{2i-1})\,\mathrm{d}x^{2j-1} + (x^{2i} - x^{2j})\,\mathrm{d}x^{2i} + \\
&\qquad + (x^{2j} - x^{2i})\,\mathrm{d}x^{2j}] \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{d}V(x) = -\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} [(x^{2i-1} - x^{2j-1})\,\mathrm{d}x^{2i-1} + (x^{2i} - x^{2j})\,\mathrm{d}x^{2i}].$$

On a aussi

$$\mathrm{d}(\| x \|^2 - 1) = 2 \sum_{i=1}^{n} m_i (x^{2i-1}\,\mathrm{d}x^{2i-1} + x^{2i}\,\mathrm{d}x^{2i}),$$

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x^{2i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathrm{d}x^{2i-1}$$

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x^{2i}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathrm{d}x^{2i}.$$

On obtient alors en identifiant dans (E) les coefficients de $\mathrm{d}x^{2i-1}$ et de $\mathrm{d}x^{2i}$ à zéro

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3(x)} (x^{2i-1} - x^{2j-1}) + \alpha' x^{2i-1} + \beta = 0 \\ -\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3(x)} (x^{2i} - x^{2j}) + \alpha' x^{2i} + \gamma = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations s'écrit

$$(E_i)\colon -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3(x)} (q_i - q_j) + \alpha' q_i + u = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

où $u = (\beta, \gamma) \in R^2$.

On en déduit en multipliant (E_i) pa m_i et en sommant pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$-\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} (q_i - q_j) + \alpha' \sum_{i=1}^{n} m_i q_i + \mu u = 0,$$

où $\mu = \Sigma_{i=1}^{n} m_i$, d'où $u = 0$. Ainsi (E_i) devient

$$(E_i)\colon -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3(x)} (q_i - q_j) + \alpha' q_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n} m_i q_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i |q_i|^2 = 1.$$

Pour déterminer la constante α' multiplions les deux membres de (E_i) scalairement par $m_i q_i$ et sommons pour tout i, on obtient:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i |q_i|^2\right) \alpha' = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_j - q_i, q_i \rangle$$

$$= -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_j - q_i, q_i \rangle - \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_j - q_i, q_i \rangle,$$

mais le deuxième terme du dernier membre s'écrit en permutant i et j:

$$\sum_{j>i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_i - q_j, q_j \rangle = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_j - q_i, -q_j \rangle,$$

d'où

$$\alpha' = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3(x)} \langle q_j - q_i, q_i - q_j \rangle = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}(x)} = V(x).$$

3. Recherche des Solutions où les Corps sont aux Sommets d'un Polygone Régulier

On va se limiter dans la suite à la recherche des solutions de (E_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, où les corps $M_1, M_2, \ldots, M_n$ se trouvent dans l'ordre aux sommets notés aussi $M_1, M_2, \ldots, M_n$, d'un polygone régulier de n cotés. Soit O' le centre de ce polygone, et soit $q_i' = \mathbf{O'M}_i$, $i = 1, \ldots n$.

Pour des raisons de symétrie supposons que M_i, m_i, q_i et q_i' soient définis pour tout $i \in N$, en posant $\forall i \in N$

$$M_i = M_{\tilde{i}}, \quad m_i = m_{\tilde{i}}, \quad q_i = q_{\tilde{i}}, \quad q_i' = q_{\tilde{i}}',$$

où $\tilde{i} = i$ modulo n.

Notons q' la longueur commune des q_i'. On a

$$\mathbf{O'O} = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot q_j', \quad \text{et} \quad \overline{O'O}^2 = q'^2 - \frac{1}{\mu}, \quad \text{car}$$

$$\|x\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n} m_i |\mathbf{OO'} + q_i'|^2 = \mu \overline{00'}^2 + \mu q'^2 + 2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} m_i q_i', \mathbf{OO'} \right\rangle$$

$$= \mu \overline{OO'}^2 + \mu q'^2 - 2\mu \overline{00'}^2 = \mu (q'^2 - \overline{OO'}^2).$$

On a aussi

$$r_{ij} = |q_i' - q_j'| = 2q' \cdot \left| \sin \left[\frac{\pi}{n}(i - j) \right] \right|, \quad i, j = 1, \ldots n.$$

Les équations (E_i) deviennent:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j (q_i' - q_j)}{|\sin^3 [\pi/n(i - j)]|} - 8\alpha' q'^3 \Big(q_i' - \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{n} m_j q_j'\Big) = 0,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j (q_i' - q_j')}{|\sin^3 [\pi/n(i - j)]|} - \frac{8\alpha' q'^3}{\mu} \sum_{j=1}^{n} m_j (q_i' - q_j') = 0,$$

d'où en notant $\alpha = -(8/\mu)\alpha' \cdot q'^3$:

$$(E_i'): \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j (q_i' - q_j') \left[\alpha + \frac{1}{|\sin^3 [\pi/n(j - i)]|} \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ainsi

$$(E'_i): \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} m_j(q'_i - q'_j)\alpha_{j-i} = 0,$$

avec

$$\alpha_k = \alpha + \frac{1}{\sin^3(k\pi/n)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Afin de simplifier les conditions (E'_i) observons que les q'_i vérifient la relation

$$q'_{i+2} + q'_i = 2\cos(2\pi/n)q'_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots n$$

C'est une équation aux différences finies dont la solution est

$$q'_i = a_1\cos(2i\pi/n) + a_2\sin(2i\pi/n), \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

où a_1 et a_2 sont des vecteurs indépendant de i que l'on peut calculer en fonction de q'_r et de q'_k pour r et k fixés entre 1 et $n, r \neq k$. On trouve

$$a_1\sin[2(k-r)\pi/n] = q_r\sin(2k\pi/n) - q'_k\sin(2r\pi/n),$$
$$a_2\sin[2(r-k)\pi/n] = q'_r\cos(2k\pi/n) - q'_k\cos(2r\pi/n),$$

d'où pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$q'_i = \frac{1}{\sin[2(k-r)\pi/n]} - \{q'_k\sin[2(r-i)\pi/n] + q'_r\sin[2(k-i)\pi/n]\}$$

Substituons q'_i et q'_j en fonction de q'_k et q'_r considérés comme deux vecteurs linéairement indépendants du plan, dans (E'_i). On trouve alors en annulant les coefficients de q'_k et de q'_r:

$$(H_{irk}): \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} m_j\alpha_{j-i}\{-\sin[2(k-i)\pi/n] + \sin[2(k-j)\pi/n]\} = 0$$

$$(K_{irk}): \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} m_j\alpha_{j-i}\{\sin[2(r-i)\pi/n] - \sin[2(r-j)\pi/n]\} = 0$$

On constate que (H_{irk}) ne dépend pas de r, (K_{irk}) ne dépend pas de k, et que $(K_{ikr}) = (H_{irk})$. Ainsi on a une seule équation

$$(H'_{ik}): \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} m_j\alpha_{j-i}\{\sin[2(k-i)\pi/n] - \sin[2(k-j)\pi/n]\} = 0$$

pour i, $k = 1, \ldots, n$.

On remarque que pour $k = i$, (H'_{ik}) devient

$$(K_i): \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} m_j\alpha_{j-i}\sin[2(j-i)\pi/n] = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Posons $k = i + r$, on a alors

$$(H'_{i,r+i})\colon \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \alpha_{j-i}\{\sin(2r\pi/n) - \sin[2(i-j+r)\pi/n]\} = 0$$

pour $i = 1,\ldots, n$ et $r = -(n-1),\ -(n-2),\ldots, 0,\ 1,\ldots, (n-1)$; mais $(H'_{i,n+r+i}) = (H'_{i,r+i})$ donc il suffit de prendre $r = 1, 2,\ldots, n$. Ainsi $(H'_{i,r+i})$ pour $i,r = 1,\ldots, n$, est équivalente aux deux relations:

$$(K_i)\colon \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \alpha_{j-i} \sin[2(j-i)\pi/n] = 0, \quad i = 1,\ldots, n,$$

$$(L_i)\colon \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \alpha_{j-i}\{1 - \cos[2(j-i)\pi/n]\} = 0, \quad i = 1, 2,\ldots, n.$$

En résumé on peut énoncer:

PROPOSITION 1. *La configuration d'équilibre relatif, où les M_i se trouvent aux sommets d'un polygone régulier de n côtés, existe si et seulement si les relations (K_i) et (L_i) sont vérifiées pour tout $i = 1, 2,\ldots, n$.*

REMARQUE. On peut facilement vérifier que les relations (K_i) et (L_i) sont satisfaites pour tout n lorsque les masses sont égales. Cela permet de retrouver le résultat suivant déjà connu (voir [6], p. 255):

Lorsque les masses sont égales, les configurations de l'équilibre relatif où les corps sont aux sommets d'un polygone régulier de n côtés, existent pour tout n.

Nous supposons, dans la suite, que les masses sont quelconques.

4. Cas ou les Masses sont Quelconques

Supposons $n \geqslant 4$. Nous avons le résultat suivant:

PROPOSITION 2. *Les configurations de l'équilibre relatif, où les n corps se trouvent aux sommets d'un polygone regulier de n côtés, existent seulement si les masses sont égales.*

REMARQUE. Ce résultat est connu pour $n = 4$ et $n = 5$ (voir [2], [3] et [4]), alors que pour $n = 3$ (voir [1], [2]) les configurations d'équilibre relatif où les corps sont aux sommets d'un triangle équilatéral, existent sans conditions sur les masses

Preuve de la proposition 2. (a) Compte tenu des résultats précédents, il suffit de montrer que si les conditions

$$(K_i)\colon \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \alpha_{j-i} \sin[2(j-i)\pi/n] = 0$$

$$(L_i)\colon \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_j \alpha_{j-i}\{1 - \cos[2(j-i)\pi/n]\} = 0$$

sont vérifiées pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors on a forcément

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n.$$

En posant $k = j - i$, les relations (K_i) et (L_i) deviennent respectivement:

$$\sum_{k=1-i}^{-1} m_{k+i}\alpha_k \sin(2k\pi/n) + \sum_{k=1}^{n-i} m_{k+i}\alpha_k \sin(2k\pi/n) = 0,$$

$$\sum_{k=1-i}^{1} m_{k+i}\alpha_k[1 - \cos(2k\pi/n)] + \sum_{k=1}^{n-i} m_{k+i}\alpha_k[1 - \cos(2k\pi/n)] = 0.$$

Mais en posant $j = n + k$ les termes de gauche de ces deux relations s'écrivent respectivement:

$$\sum_{j=n-i+1}^{n-1} m_{-n+j+i}\alpha_j \cdot \sin(2j\pi/n), \quad \text{et} \quad \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \alpha_j \cdot m_{-n+j+i}[1 - \cos(2j\pi/n)]$$

alors les relations (K_i) et (L_i) sont équivalentes à

$$(K_i')\colon \sum_{j=1}^{n-1} m_{j+i}\alpha_j \cdot \sin(2j\pi/n) = 0$$

$$(L_i')\colon \sum_{j=1}^{n-1} m_{j+i}\alpha_j \cdot [1 - \cos(2j\pi/n)] = 0.$$

(b) Posons $l_k = m_{k+1} - m_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, d'où $l_{n+k} = l_k \forall k \in \mathbb{N}$, et

$$\sum_{k=1}^{n} l_k = 0.$$

Il suffit de montrer que les conditions (K_i) et (L_i), pour $i = 1, \ldots, n$, entrainent que $l_k = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Or en utilisant (K_i') et (K_{i+1}'), (L_i') et (L_{i+1}'), on obtient:

$$(K_i'')\colon \sum_{j=1}^{n-1} l_{i+j}\alpha_j \sin(2j\pi/n) = 0,$$

$$(L_i'')\colon \sum_{j=1}^{n-1} l_{i+j}\alpha_j \sin^2(j\pi/n) = 0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, et même pour tout $i \in \mathbb{N}$ en tenant compte du fait que $l_{n+k} = l_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les relations (K_i'') et (L_i''), $i \in \mathbb{N}$ forment un système d'équations linéaires récurrentes. Pour achever la démonstration de la proposition 2, il suffit de montrer que la seule solution $l_1, l_2, \ldots$, de ce système, telle que les l_k soient finis avec $l_{n+k} = l_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est la solution identiquement nulle.

On constate que $r^i \cdot P(r)$ et $s^i \cdot Q(s)$, où

$$P(r) = \sum_{j=1}^{n-1} r^j \alpha_j \sin(2j\pi/n) \quad \text{et} \quad Q(s) = \sum_{j=1}^{n-1} s^j \alpha_j \sin^2(j\pi/n)$$

sont les polynomes caractéristiques respectifs de (K_i'') et de (L_i''), obtenus en substituant

l_k par r^k et par s^k dans (K_i'') et dans (L_i'') respectivement. On remarque qu'une racine nulle du polynome caractéristique d'une équation aux différences donne une solution particulière nulle, donc il suffit d'étudier les racines non nulles de P et de Q. On a

$$P(1/r) = \sum_{j=1}^{n-1} (1/r^j)\alpha_j \cdot \sin(2j\pi/n) = (1/r^n) \sum_{j=1}^{n-1} r^{n-j} \cdot \alpha_j \cdot \sin(2j\pi/n)$$

$$= (1/r^n) \sum_{j=1}^{n-1} r^j \alpha_j \cdot \sin[2(n-j)\pi/n] = -(1/r^n) \cdot P(r).$$

Ainsi si $r \neq 0$ est racine de P, $(1/r)$ l'est aussi et l'on a

$$P'(r) = r^{n-2} P'(1/r),$$

donc si r est une racine de P de multiplicité 2 alors $(1/r)$ l'est aussi. Par récurrence si r est une racine de multiplicité k de P, supposons que $(1/r)$ est de multiplicité k et que

$$P^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} r^{n-2k} P^{(k)}(1/r),$$

où $P^{(k)}$ est la k ème dérivée de P. Alors on a

$$P^{(k+1)}(r) = (-1)^{k+1}(n-2k)P^{(k)}(1/r)r^{n-2k-1} P^{(k)}(1/r) +$$
$$+ (-1)^{k+2} r^{n-2k-2} P^{(k+1)}(1/r),$$

or $P^{(k)}(1/r) = 0$ si $P^{(k)}(r) = 0$, ce qui donne si r est de multiplicité $(k+1)$:

$$P^{(k+1)}(r) = (-1)^{k+2} r^{n-2k} P^{(k+1)}(1/r).$$

Donc la récurrence est vraie pour $k+1$, et l'on a

$$P^{(k)}(r) = (-1)^{k+1} r^{n-2k} P^{(k+1)}(1/r),$$

pour tout k si r est une racine de multiplicité k de P. Cela entraine que si r est une racine de multiplicité k de P alors $(1/r)$ est de multiplicité k, pour tout k.

Le même raisonnement permet d'affirmer que si s est une racine de multiplicité k de Q alors $(1/s)$ est de multiplicité k aussi, car $Q(1/s) = (1/s^n)Q(s)$. Soient r_j, $1/r_j, j = 1, \ldots, p$ les racines non nulles de P, p_j l'ordre de multiplicité de r_j et de $1/r_j$. [On a $\Sigma_{j=1}^{p} p_j \leqslant (n-2)$]. La solution générale de (K_i'') s'écrit:

$$l_k = \sum_{j=1}^{p} P_j(k) r_j^k + \sum_{j=1}^{p} P_j(k) r_j^{-k}$$

où P_j et $\bar{P}_j$ sont des polynomes, de degré $(p_j - 1)$ en k, dont les coefficients sont des constantes arbitraires. Mais nous cherchons des solutions bornées pour tout k, ce qui donne, en utilisant le fait que l'exponentielle l'emporte sur la puissance, la forme de la solution admissible de (K_i''):

$$l_k = \sum_{j=1}^{p'} P_j(k) r_j^k + \sum_{j=p'+1}^{p} c_j r_j^k + \bar{c}_j r_j^{-k},$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_{p'}$ désignent les racines de P de module < 1, et $r_{p'+1}, \ldots, r_p$ désignent les racines de module égal à 1, où $c_{p'+1}, \bar{c}_{p'+1}, \ldots, c_p, \bar{c}_p$ sont des constantes. D'autre part la condition $l_{n+k} = l_k$ donne pour tout k:

$$\sum_{j=1}^{p'} [P_j(n+k)r_j^n - P_j(k)]r_j^k + \sum_{j=p'+1}^{p} c_j r_j^k(r_j^n - 1) + \bar{c}_j r_j^{-k}(r_j^{-n} - 1) = 0$$

ce qui entraine:

$$(1_j)\colon P_j(n+k)\, r_j^n - P_j(k) = 0, \quad \forall k = 1,2,\ldots, \quad \text{et } \forall\, j = 1,\ldots p',$$
$$(2_j)\colon c_j(r_j^n - 1) = 0, \quad (3_j)\colon \bar{c}_j(r_j^{-n} - 1) = 0, \quad \forall j = p'+1,\ldots, p.$$

Posons $P_j(k) = \Sigma_{i=0}^{p_j-1} p_{ji} k^i$, alors (1_j) donne

$$(1_{ji})\colon p_{ji}(r_j^n - 1)k^i + r_j^n \sum_{l=0}^{i-1} C_i^l P_{jl} K^l n^{i-l} = 0,$$

$$\forall j = 1,\ldots,p', \quad \forall i = 0,\ldots,(p_j - 1), \quad \text{où} \quad C_i^j = \frac{i!}{l!(i-l)!}.$$

Or ici $|r_j| < 1$donc $r_j^n - 1 \neq 0$, alors $p_{ji} \neq 0$,
pour $i = 0, 1,\ldots, (p_j - 1)$, $\forall j = 1,\ldots, p'$, d'où

$$P_j(k) = 0, \text{ pour } j = 1,\ldots, p'.$$

Les conditions (2_j) et (3_j) donnent $c_j = 0$, et $\bar{c}_j = 0$, si

$r_j^n \neq 1$, d'où l'expression de la solution:

$$l_k = \sum_{\substack{j=p'+1 \\ r_j^n = 1}}^{p} (c_j r_j^k + \bar{c}_j r_j^{-k}),$$

la sommation se faisant seulement pour les j tels que $r_j^n = 1$.

Autrement dit la solution générale admissible des (K_i'') est de la forme:

$$(\mathrm{I})\colon l_k = \sum_{j=1}^{p} (c_j r_j^k + \bar{c}_j r_j^{-k});$$

où selon des nouvelles notations $r_1, r_2,\ldots, r_p$ désignent les racines distinctes de P telles que $r_j^n = 1$ pour $j = 1,\ldots, p$.

La même méthode appliquée à l'équation (L_i'') permet d'écrire la solution générale admissible de (L_i'') sous la forme:

$$(\mathrm{II})\colon \tilde{l}_k = \sum_{j=1}^{q} c_j' s_j^k + \bar{c}_j' s_j^{-k},$$

où $s_1, s_2,\ldots, s_q$ sont les racines distinctes de $Q(s)$ telles que $s_j^n = 1$ pour $j = 1,\ldots,q$.

Il nous reste à identifier l_k et $\tilde{l}_k$ donnés par (I) et (II) respectivement, pour tout k. Cela entraine que $c_j = \bar{c}_j = 0$, s'il n'existe pas un nombre $h \in \{1,2,\ldots,q\}$ tel que $r_j = s_h$ ou $r_j = 1/s_h$, et que $c_j' = \bar{c}_j' = 0$, s'il n'existe pas $t \in \{1,2,\ldots,p\}$ tel que $s_j = r_t$ ou $s_j = 1/r_t$.

Autrement dit on aura $l_k = 0$ pour tout k si P et Q ne possèdent pas de racine commune de la forme: $\exp(2ji\pi/n)$ avec $j \in \{0, 1,\ldots, (n-1)\}$, où $i = \sqrt{-1}$. Pour cela il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que l'on ait en même temps

$$\text{(EI)}: \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \cdot \exp[2ki(j-1)\pi/n] \cdot \sin(2j\pi/n) = 0,$$

et

$$\text{(E2)}: \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \cdot \exp[2ki(j-1)\pi/n] \cdot \sin^2(j\pi/n) = 0.$$

On constate que (EI) s'écrit sous la forme

$$\text{(E3)}: R(n, k+1) = R(n, k-1),$$

avec

$$R(n,k) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \cdot \exp(2kji\pi/n)$$
$$= -\alpha + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(2kji\pi/n)/\sin^3(j\pi/n),$$

alos que (E2) s'écrit:

$$\text{(E4)}: 2R(n,k) - R(n,k+1) - R(n,k-1) = 0.$$

On en déduit

$$\text{(E5)}: R(n,k-1) = R(n,k) = R(n,k+1),$$

qui s'écrit aussi:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp[2(k-1)ji\pi/n]}{\sin^3(j\pi/n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp(2kji\pi/n)}{\sin^3(j\pi/n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp[2(k+1)ji\pi/n]}{\sin^3(j\pi/n)}$$

Mais:

- le premier et le dernier membre de (E5) donnent:

$$\text{(E6)}: \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp(2kji\pi/n) \cdot \sin(2j\pi/n)}{\sin^3(j\pi/n)} = 0,$$

- le premier et le deuxième membre de (E5) donnent:

$$\text{(E7)}: \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp(2kji\pi/n) \cdot [1 - \exp(2ji\pi/n)]}{\sin^3(j\pi/n)} = 0,$$

d'où

$$\text{(E8)}: \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\exp(2kji\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} = 0.$$

La partie imaginaire de la relation (E8) est toujours vérifiée (il suffit de poser

$j' = n - j$); alors que la partie réelle de (E8) s'écrit:

$$\text{(F)}: \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos(2kj\pi/n)}{\sin(j\pi/n)} = 0.$$

Pour achever la démonstration de la proposition 2 il suffit de démontrer que la relation (F) n'est vérifiée pour aucune valeur de $k \in \mathbb{N}$ et quel que soit le choix de n.

(c) Nous allons étudier les propriétés de

$$S(n,k) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos(2kj\pi/n)}{\sin(j\pi/n)}$$

afin de montrer que cette expression ne s'annule jamais quels que soient n et $k \in \mathbb{N}$.

Il est évident déjà que $S(n,0) = \Sigma_{j=1}^{n-1} 1/\sin(j\pi/n) > 0$, pour tout $n = 2, 3, \ldots$ On a aussi

$$S(n, n+k) = S(n,k), \quad S(n, n-k) = S(n,k), \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

donc il suffit de montrer que pour tout n fixé, $S(n,k) \neq 0$, pour $k = 1, 2, \ldots, [n/2]$, où $[n/2]$ est la partie entière de $(n/2)$.

En utilisant la relation:

$$\cos(2kj\pi/n) - \cos[2(k-1)j\pi/n] = -2\sin[2(k-1)j\pi/n]\cdot\sin(j\pi/n),$$

on obtient:

$$S(n,k) = S(n,k-1) - 2\sum_{j=1}^{n-1} \sin[(2k-1)j\pi/n],$$

d'où

$$\text{(F1)}: S(n,k) = S(n,k-1) - 2\,\mathrm{cotg}[(2k-1)\pi/2n],$$

en utilisant l'identité:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \exp[(2k-1)ji\pi/n] = i\,\mathrm{cotg}[(2k-1)\pi/2n].$$

On en déduit:

$$\text{(F2)}: S(n,k) = S(n,0) - 2\sum_{j=1}^{k} \mathrm{cotg}[(2j-1)\pi/2n].$$

mais on a

$$\text{(F3)}: S(n,0) = \sum_{j=1}^{n-1} 1/\sin(j\pi/n) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{cotg}(j\pi/2n),$$

grâce aux deux identités

$$1/\sin(j\pi/n) = \mathrm{cotg}(j\pi/2n) - \mathrm{cotg}(j\pi/n), \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{cotg}(j\pi/n) = 0 \text{ [remplacer } j \text{ par } (n-j)],$$

d'où,

$$(\mathrm{F4}){:}\ S(n,k)=\sum_{j=1}^{n-1}1/\sin(j\pi/n)-2\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2n]$$

et

$$(\mathrm{F5}){:}\ S(n,k)=\sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{cotg}(j\pi/2n)-2\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2n].$$

La relation (F1) montre que $S(n,k)$ est, pour n fixé, strictement décroissante par rapport à k pour $k=0,\ 1,\dots,[n/2]$.

Or $S(n,0)>0$, pour tout n, montrons alors que

$$S(n,[n/2]])<0,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

On a, d'après (F5),

$$\begin{aligned}S(2p,p)&=\sum_{j=1}^{2p-1}\operatorname{cotg}(j\pi/4p)-2\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/4p]\\&=\sum_{j=1}^{p-1}\operatorname{cotg}(j\pi/2p)+\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/4p]-2\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/4p]\\&=\sum_{j=1}^{p}\{\operatorname{cotg}(j\pi/2p)-\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/4p]\},\end{aligned}$$

tous les termes du dernier membre sont <0 car la fonction cotg x est strictement décroissante sur $]0,\pi[$; donc $S(2p,p)<0$ pour tout $p=1,2,\dots$.

On a d'autre part,

$$\begin{aligned}S(2p+1,p)&=\sum_{j=1}^{2p}\operatorname{cotg}[j\pi/2(2p+1)]-2\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2(2p+1)]\\&=\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[j\pi/(2p+1)]+\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2(2p+1)]\\&\quad-2\sum_{j=1}^{p}\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2(2p+1)]\\&=\sum_{j=1}^{p}\{\operatorname{cotg}[j\pi/(2p+1)]-\operatorname{cotg}[(2j-1)\pi/2(2p+1)]\},\end{aligned}$$

mais tous les termes du dernier membre sont strictement négatifs, d'où $S(2p+1,p)<0$, pour tout $p=1,\ 2,\dots$.

Ainsi on a

$$(\mathrm{F6}){:}\ 0<S(n,0)>S(n,1)>S(n,2)>\cdots>S(n,[n/2])<0.$$

Il en résulte que au plus un des $S(n,1), S(n,2),\dots,S(n,[n/2]-1)$ peut s'annuler alors que les autres sont forcément différents de zéro. Pour montrer que tous ces termes sont différents de zéro, nous allons procéder à la majoration et à la minoration de $S(n,k)$.

Le calcul numérique sur ordinateur montre que pour $1 \leqslant k \leqslant 400$,

$$(\mathbf{G}_0)\colon S(6k, k-1) > 0, \quad S(6k, k) < 0,$$

$$(\mathbf{G}_s)\colon S(6k+s, k) > 0, \quad S(6k+s, k+1) < 0, \quad \text{pour } s = 1, 2, \ldots 5.$$

En admettant que ces inégalités sont vérifiées pour tout $k \in \mathbb{N}$, les inégalités (F6) permettent de conclure que $S(n,k) \neq 0$, pour tout $k = 1, 2\ldots, [n/2]$, et pour tout $n = 2, \ldots$.

Pour démontrer $(\mathbf{G}_0), \ldots, (G_5)$, il suffit de considérer les deux cas où $n = 6k + 2r$ et $n = 6k + 2r + 1$, respectivement, avec $r = 0$, 1 et 2.

1- On a

$$\begin{aligned}
S(6k+2r, k) &= \sum_{j=1}^{6k+2r-1} \operatorname{cotg}\left[\frac{j\pi}{2(6k+2r)}\right] - 2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{3k+r-1} \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right) + \sum_{j=1}^{3k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right] - \\
&\quad - 2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right]
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{j=k+1}^{3k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right] = \sum_{j=1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right],$$

en changeant j en $3k + r + 1 - j$, d'où en utilisant $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = -2\operatorname{cotg} 2x$,

$$\begin{aligned}
S(6k+2r, k) &= S(3k+r, k) + \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right] \\
&= S(3k+r, k) + \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi[2(3k+r+1-j)-1]}{2(6k+2r)}\right\} = \\
&= S(3k+r, k) + \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right]
\end{aligned}$$

où,

$$S(3k+r, k) = \sum_{j=1}^{3k+r-1} \operatorname{cotg}\left[\frac{j\pi}{2(3k+r)}\right] - 2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(3k+r)}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{3k+r}\right) + \sum_{j=1}^{k+r-1} \operatorname{cotg}\left[\frac{(3k+r-j)\pi}{2(3k+r)}\right] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(3k+r)}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{j\pi}{2(3k+r)}\right] - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{j\pi}{2(3k+r)}\right] -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{3k+r}\right)+\sum_{h=1}^{k+r-1}\operatorname{tg}\left[\frac{j\pi}{2(3k+r)}\right]$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(3k+r)}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k+r-1}\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)-\sum_{j=1}^{k}\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)-$$

$$-\sum_{j=k+1}^{2k}\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)$$

On a alors

$$S(6k+2r,k)=\sum_{j=1}^{k+r-1}\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)-\sum_{j=1}^{k}\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{2k+r}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r)}\right]-\sum_{j=k+1}^{2k}\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r}\right)$$

On a ainsi

$$S(6k,k)=-1/\sqrt{3}+\sum_{j=k+1}^{2k}\left\{\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{12k}\right]-\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k}\right)\right\}$$

$$S(6k+2,k)=\operatorname{cotg}\left[\frac{(4+1)}{2(6k+2)}\right]+\sum_{j=k+1}^{2k}\left\{\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2)}\right]-\right.$$

$$\left.-\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2}\right)\right\}$$

$$S(6k+4,k)=\operatorname{tg}\left[\frac{(k+1)\pi}{6k+4}\right]+\operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+4)}\right]+\operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+4)}\right]+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{2k}\left\{\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+4)}\right]-\operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+4}\right)\right\}$$

2 – On a

$$S(6k+2r+1,k)=\sum_{j=1}^{6k+2r}\operatorname{cotg}\left[\frac{j\pi}{2(6k+2r+1)}\right]-$$

$$-2\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{3k+r}\operatorname{cotg}\left[\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right]+\sum_{j=k+1}^{3k+r}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right].$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right]$$

Or,

$$\sum_{j=k+1}^{3k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] = \sum_{j=1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right],$$

en changeant j en $3k+r+1-j$, d'où en utilisant $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = -2\operatorname{cotg}(2x)$,

$$\begin{aligned}
S(6k+2r+1,k) &= \sum_{j=2k+1}^{3k+r} \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{6k+2r+1}\right] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{6k+2r+1}\right] - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{6k+2r+1}\right] + \sum_{j=2k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k+\tau} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] + \sum_{j=2k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] + T,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
T &= -2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\frac{2(2j-1)\pi}{6k+2r+1} + 2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{cotg}\left(\frac{4j\pi}{6k+2r+1}\right) + \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{k} \left\{ -\operatorname{cotg}\left[\frac{2(2j-1)\pi}{6k+2r+1}\right] + \operatorname{cotg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{cotg}\left(\frac{4j\pi}{6k+2r+1}\right)\right\} \\
&= -2\sum^{2k} \operatorname{cotg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right) + 2\sum^{k} \operatorname{cotg}\left(\frac{2j\pi}{6k+2r+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=k+1}^{2k} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) \right]$$

d'où,

$$S(6k+2r+1) = \sum_{j=1}^{k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) - \sum_{j=k+1}^{2k} \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right)$$

or on a, en changeant j en $3k+r+1-j$,

$$\sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{tg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r+1}\right) = \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right]$$

d'où,

$$S(6k+2r+1,k) = \sum_{j=1}^{k+r} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] - \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] +$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{2k+r} \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+2r+1)}\right] -$$
$$- \sum_{j=k+1}^{2k} \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+2r-1}\right),$$

On en déduit alors

$$S(6k+1,k) = \sum_{j=k+1}^{2k} \left\{ \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+1)}\right] - \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+1}\right) \right\},$$

$$S(6k+3,k) = \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+3)}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+3)}\right],$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{2k} \left\{ \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+3)}\right] - \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+3}\right) \right\},$$

$$S(6k+5,k) = \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+5)}\right] + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+5)}\right] +$$
$$+ \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] + \sum_{j=k+1}^{2k} \left\{ \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+5)}\right] - \right.$$
$$\left. - \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+5}\right) \right\}$$

3 – Preuve de (G_s), $s = 0, \ldots, 5$. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{N}$,

$$u_{k,s} = \sum_{j=k+1}^{2k} \left\{ \operatorname{cotg}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2(6k+s)}\right] - \operatorname{cotg}\left(\frac{j\pi}{6k+s}\right) \right\}$$

On a

$$u_{k,s}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin[\pi/2(6k+s)]}{\sin[(j+k)\pi/(6k+s)-\pi/2(6k+s)]\,\sin[(j+k)\pi/(6k+s)]}$$

d'où

$$0<w_{k,s}<u_{k,s}<v_{k,s}$$

avec

$$v_{k,s}=\frac{\pi}{2(6k+s)}\sum_{j=1}^{k}1/\sin^2 x_j'$$

$$w_{k,s}=\sin[\pi/2(6k+s)]\sum_{j=1}^{k}1/\sin^2 x_j,$$

où,

$$x_0=\frac{\pi}{6},\quad x_j=\frac{(j+k)\pi}{6k+s},\quad \text{pour } j=1,\ldots,k,\quad x_{k+1}=\frac{\pi}{3}$$

$$x_j'=x_j-\frac{\pi}{2(6k+s)},\quad \text{pour } j=1,2\ldots,k.$$

Alors, en utilisant la définition de l'intégrale de Riemann et la décroissance de $f(x)=1/(2\sin^2 x)$, on a

$$p_{k,s}<1/\sqrt{3}$$

avec

$$p_{k,s}=\sum_{j=1}^{k+1}(x_j-x_{j-1})f(x_j)$$

On a

$$p_{k,s}=(x_1-\pi/6)f(x_1)+\frac{\pi}{6k+s}\sum_{j=2}^{k}f(x_j)+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2k\pi}{6k+s}\right)f(\pi/3)$$

$$=w_{k,s}'-\frac{s\pi}{6(6k+s)}f(x_1)+\frac{\pi s}{3(6k+s)}f(\pi/3),$$

avec

$$w_{k,s}'=\frac{\pi}{6k+s}\sum_{j=1}^{k}f(x_j)=\frac{\pi}{2(6k+s)}\sum_{j=1}^{k}1/\sin^2(x_j),$$

d'où, puisque $f(x_1)<f(\pi/6)=2$,

$$p_{k,s}=w_{k,s}'+\frac{2s\pi}{9(6k+s)}-\frac{s\pi}{6(6k+s)}f(x_1)>w_{k,s}'-\frac{s\pi}{9(6k+s)},$$

ce qui donne

$$w_{k,s} < w'_{k,s} < 1/\sqrt{3} + \frac{s\pi}{9(6k+s)}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a

$$u_{k,s} < w_{k,s} \cdot v_{k,s} < (w_{k,s} + v_{k,s})/2 < (w'_{k,s} + v_{k,s})/2,$$

mais

$$w'_{k,s} + v_{k,s} = 2w'_{2k,2s}, \quad \text{car}$$

$$w'_{k,s} + v_{k,s} = \frac{\pi}{2(6k+s)} \sum_{j=1}^{k} \Big\{ 1/\sin^2 [(2k+2j)\pi/2(6k+s)] + $$
$$+ 1/\sin^2 [(2k+2j-1)\pi/2(6k+s)] \Big\}$$
$$= \frac{\pi}{12k+2s} \sum_{j=1}^{2k} 1/\sin^2 [(2k+j)\pi/(12k+2s)] = 2w'_{2k,2s},$$

d'où,

$$u_{k,s} < w'_{2k,2s} < 1/\sqrt{3} + \frac{s\pi}{9(6k+s)}$$

On en déduit, en tenant compte de (F1) et des expressions de $S(n,k)$ obtenues au dessus,

$$S(6k,k) < 0,$$

$$S(6k+1,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{\pi}{9(6k+1)} - 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+1)}\right],$$

$$S(6k+2,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{2\pi}{9(6k+2)} + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+2)}\right] -$$
$$- 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+2)}\right],$$

$$S(6k+3,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{\pi}{3(6k+3)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+3)}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{6k+3}\right] -$$
$$- 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+3)}\right]$$

$$S(6k+4,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{4\pi}{9(6k+4)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(k+1)\pi}{6k+4}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+4)}\right] +$$
$$+ \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+4)}\right] - 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+4)}\right]$$

$$S(6k+5,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{5\pi}{9(6k+5)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+5)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] + \right.$$
$$+ \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+5)}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] -$$
$$- 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+5)}\right]$$

D'où, en utilisant la décroissance de $\operatorname{cotg} x$ sur $]0,\pi[$,

$$S(6k+1,k+1) < 1/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3} + \frac{\pi}{9(6k+1)} < -1/\sqrt{3} + \frac{\pi}{63} < 0,$$

$$S(6k+2,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{\pi}{9(3k+1)} - \operatorname{cotg}\left[\frac{\pi(2k+1)}{2(6k+2)}\right] < 1/\sqrt{3} - 1 +$$
$$+ \frac{\pi}{36} < 0$$

$$S(6k+3,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{\pi}{9(2k+1)} + 1/\sqrt{3} + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{6k+3}\right] - 2\sqrt{3}$$
$$< -\sqrt{3} + \pi/27 < -1.5 < 0,$$

$$S(6k+4,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{2\pi}{9(3k+2)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(k+1)\pi}{6k+4}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+4)}\right] +$$
$$+ \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+4)}\right] - 2\cot\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+4)}\right]$$

Or,

$$\operatorname{tg}\left[\frac{(k+1)\pi}{6k+4}\right] = \operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{6k+4}\right] \quad \text{et}$$

$$-2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+4)}\right] = -2\operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+4)}\right] - 4\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{6k+4}\right]$$
$$= -2\operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+4)}\right] - 4\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{6k+4}\right],$$

d'où,

$$S(6k+4,k+1) < 1/\sqrt{3} + 2\pi/45 + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+4)} - \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+4)}\right] - \right.$$
$$- 3\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{6k+4}\right]$$
$$< 1/\sqrt{3} + 2\pi/45 + 1 - 3/\sqrt{3} < 0,$$

$$S(6k+5,k+1) < 1/\sqrt{3} + \frac{5}{9(6k+5)} + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+5)}\right] + \operatorname{tg}\left[\frac{(2k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] +$$
$$+ \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+1)\pi}{2(6k+5)}\right] + \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+3)\pi}{2(6k+5)}\right] -$$
$$- 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2(6k+5)}\right]$$

ou bien,

$$S(6k+5,k+1) < 1/\sqrt{3} + 5/99 + \sum_{j=1}^{4} \operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+j)\pi}{2(6k+5)}\right] -$$
$$- 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(4k+4)\pi}{2(6k+5)}\right] - 4\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k+1)\pi}{6k+5}\right] < 5\pi/99 -$$
$$- 2/\sqrt{3} < 0.$$

Minorons $S(6k,k)$. On a $S(6k,k) = -1/\sqrt{3} + u_{k,0} > -1/\sqrt{3} + w_{k,0}$ mais, en utilisant la définition de l'intégrale de $f(x)$ sur $[\pi/6, \pi/3]$ et la décroissance de cette fonction sur cet intervalle, on a

$$p_{k,0} + 2\pi/9k > 1/\sqrt{3},$$

ce qui donne

$$w_{k,0} > \frac{12k}{\pi} \sin(\pi/12k) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{9k}\right),$$

d'où,

$$S(6k,k) > \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[\frac{12k}{\pi} \sin(\pi/12k) - 1\right] - \frac{8}{3} \sin(\pi/12k)$$

$$S(6k,k) > -\frac{2\pi}{9k} - \frac{\pi^2}{864\sqrt{3}k^2},$$

Alors d'après (F1), on a

$$S(6k,k-1) = S(6k,k) + 2\operatorname{cotg}\left[\frac{(2k-1)\pi}{12k}\right] > S(6k,k) + 2\sqrt{3},$$

d'où,

$$s(6k,k-1) > 2\sqrt{3} - 2\pi/9k - \pi^2/(864k^2 \cdot \sqrt{3} > 3.2359\ldots.$$

ce qui achève la preuve de (G_0).

Finalement, en tenant compte du fait que $u_{k,s} > 0$, pour tout k et pour $s = 1, \ldots, 5$, on peut déduire facilement des expressions de $S(6k+s,k)$ trouvées au dessus, que

$$S(6k+s,k) > 0, \quad \text{pour } s = 1, \ldots, 5,$$

ce qui achève la vérification de $(G_1), \ldots, (G_5)$, et par conséquent la démonstration de la proposition 2.

Références

1. B. Elmabsout: 'Espace des phases dans le problème plan des trois corps', *Journal de Mécanique*, **17** (1978), 485–530.
2. A. Wintner: *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton, 1941.
3. W. D. Macmillan and W. Bartky: 'Permanent Configurations in the Problem of Four Bodies', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **34** (1932), 838–875.
4. W. L. Williams: (permanent Configurations in the Problem of Five Bodies', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 562–579.
5. Julian I. Palmore: 'Relative Equilibria and the Virial Theorem', *Celestial Mechanics* **19** (1979) 167–171.
6. Y. Hagihara: *Celestial Mechanics*, Vol. I, MIT Press, 1970.