J. geom. 69 (2000) 227 - 233
0047-2468/00/020227-07 $ 1.50+0.20/0

Journal of Geometry

Euklidische d-Simplexe mit inhaltsgleichen k-Seiten

Herrn Professor Hanfried Lenz gewidmet

Bernulf Weißbach

We give the answer of a question by H. Lenz, wether for $3 \leq k < d$ the k-faces of a d-simplex must be pairwise congruent if they all have the same k-volume.

1. In dem am Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach ausliegendem Buch ,,Mathematical Problems" stellte H. Lenz im Jahre 1987 die folgende Frage:

> A well-known theorem states the following: If all facets of a 3-dimensional simplex (=tetrahedron) in $\mathbb{R}^3$, say $ABCD$, have equal areas, then these facets are congruent triangles, in particular $AB \equiv CD$, $AC \equiv BD$, $AD \equiv BC$. Are there analogous theorems for the k-faces of a d-simplex ($k < d$)?

Wir beantworten diese Frage hier mit: ,,Nein, dies ist für $k \geq 3$ nicht der Fall." Genauer fassen wir diese Antwort in

Satz 1: *Ist $d \geq 4$, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl k mit $3 \leq k \leq d-1$ ein euklidisches d-Simplex mit inhaltsgleichen k-Seiten, die nicht alle untereinander kongruent sind.*

Bevor wir den einfachen Beweis dieses Satzes antreten, seien einige wenige Bemerkungen eingefügt. Daß die ein Tetraeder begrenzenden Dreiecke kongruent sind, sobald sie den gleichen Inhalt besitzen, zeigten E. Genty und E. Lemoine gegen 1880. Genauere Hinweise findet man bei M. Zacharias in der Enzyklopädie der Mathematik [9]. An neueren Arbeiten ist eine Abhandlung von V. Devidé [1] aus dem Jahre 1975 zu nennen, und eine ältere Literatur völlig außer Acht lassende Note von F. Frankl und H. Maehara [3] von 1990. Daß der genannte Sachverhalt nicht nur im euklidischen Raum, sondern auch in Räumen mit beliebiger konstanter Krümmung besteht, zeigte 1969 J. Horváth [4]. Mit dem hyperbolischen Fall haben sich 1989 auch H. Lenz, G. Selényi und H. Zeitler [5] beschäftigt. Auch für $d \geq 4$ ist der Fall $k = 2$ vollständig geklärt. Ist S ein d-Simplex mit $d \geq 4$, bei dem alle im Rand auftretenden genau einmal auftritt, und wenn W weder zerfällt noch einer zerfallenden Matrix ähnlich ist. Auf letztere Bedingung kann (außer für $d = 2$) nicht verzichtet werden. Da zwei Matrizen W_1 und W_2 ähnlich heißen, wenn es eine reguläre Matrix T gibt, so daß $W_2 = T^{-1}W_1T$ gilt, handelt es sich um eine zur affinen Geometrie gehörende Forderung. Sie sichert, daß der Durchschnitt von Halbräumen, für die die Punkte a_i äußere Normalen festlegen, beschränkt ist. Ob zu W ein sphärisches oder ein hyperbolisches Simplex gehört, hängt allein von Rang und Signatur dieser Matrix ab. In beiden Fällen muß W regulär sein und darf entweder nur positive Eigenwerte, oder genau einen negativen Eigenwert besitzen. (Man vergleiche - auch zum euklidischen Fall - etwa [8]; 105 - 108.)

Die Matrizen W, die euklidischen Simplexen mit inhaltsgleichen Facetten zugeordnet sind, lassen sich nun sehr einfach kennzeichnen. Es gilt

SATZ 2: *Zu einer zulässigen Matrix* $W = [-\cos\alpha_{ij}]$ *gehören genau dann Simplexe mit inhaltsgleichen Facetten, wenn* $[1,\ldots,1]^T$ *Eigenvektor von* W *zum Eigenwert* 0 *ist.*

BEWEIS: Der Satz, der sich in dieser Form wohl noch nicht in der Literatur findet, ergibt sich als überaus einfache Folgerung aus wohlbekannten allgemeineren Sachverhalten. Es sei P ein d-dimensionales konvexes Polyeder, dessen äußere Normalen mit jenen Strahlen gleichgerichtet sind, die vom Ursprung ausgehen und die Punkte $a_0, \ldots, a_n$, $n \geq d$ mit $\|a_i\| = 1$ enthalten. Mit V_i, $i = 0, \ldots, n$ seien die $(d-1)$-dimensionalen Inhalte der Facetten von P bezeichnet. Es gilt dann

$$V_0a_0 + V_1a_1 + \cdots + V_na_n = 0 \tag{3}$$

Mit $\langle a_i, a_j\rangle =: -\cos\alpha_{ij}$, wobei jetzt $0 \leq \alpha_{ij} \leq \pi$ zuzulassen ist, folgt

$$\sum_{j=0}^{n} V_j \cos\alpha_{ij} = 0,\ i = 0, \ldots, n, \tag{4}$$

und dieses System ist mit (3) äquivalent, da sich unter den Punkten a_i eine Basis $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_d})$ des Raumes befinden muß . Man bestätigt (4) und damit auch (5), indem man den Rand des Polyeders P senkrecht auf jene Hyperebenen projiziert, die seine Facetten enthalten. Sind H und H' orientierte Hyperebenen mit dem Schnittwinkel α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ und ist M eine in H gelegene meßbare Menge mit dem $(d-1)$-dimensionalen Inhalt V, so ist der senkrechten Projektion von M auf H' der orientierte Inhalt $V' = V\cos\alpha$ zuzuweisen. Wird der Rand eines konvexen Polyeders senkrecht auf eine seiner Wände projiziert, so wird das relative Innere der Projektion genau zweifach überdeckt. Die orientierten Inhalte der Projektionen aller Facetten müssen sich aufheben.

Für ein Simplex mit inhaltsgleichen Facetten ergibt sich aus (4) notwendigerweise die im Satz genannte Bedingung, die sich auch als hinreichend erweist, weil W ein zugehöriges Simplex bis auf Ähnlichkeiten festlegt. Es sei angemerkt, daß auch für $n > d$ die Bedingung (3), zusammen mit $Rg(a_0, \ldots, a_n) = d$ ausreicht, um die Existenz und, bis auf Verschiebungen, die Eindeutigkeit eines Polyeders P zu sichern, dem die Punkte a_i und die positiven Zahlen V_i auf die genannte Weise zugeordnet sind. Dies ist der Inhalt eines tiefliegenden Satzes von H. Minkowski [7].

Wie man zu $d+1$ Punkten a_i mit $\|a_i\| = 1$ und

$$Rg(a_0, \ldots, a_d) = d,\ \ a_0 + a_1 + \cdots + a_d = 0 \tag{5}$$

ein Simplex S bestimmt, für das die Punkte a_i die Richtungen der äußeren Normalen festlegen, - es muß dann notwendigerweise inhaltsgleiche Facetten besitzen - liegt auf der Hand: Man löse die $d+1$ linearen Systeme

$$\begin{aligned} &\langle a_i, p_j\rangle - \mu_i = 0, \quad i \in \{0,\dots,d\}\backslash\{j\} \\ j = 0,1,\dots,d \quad &\sum_{i=0}^{d} \mu_i =: \mu > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

und hat $S = conv(\{p_0,\dots,p_d\})$. Die positive Zahl μ ist die gemeinsame Länge der Höhen von S, es wird ja $\langle a_j, p_j\rangle - \mu_j = -\mu$. Die Zahlen μ_i können ansonsten beliebig gewählt werden.

Selbstverständlich sind durch (2) die Punkte a_i nur bis auf eine Isometrie, die den Ursprung fest läßt, bestimmt. Eine Lösung $(a_0,\dots,a_d)$ erhält man auf kanonische Weise: Eine positiv semidefinite reelle symmetrische Matrix W läßt sich als Produkt einer reellen Matrix mit ihrer Transponierten darstellen: Wird W orthogonal in eine Diagonalmatrix transformiert, d. h. hat man $W = YDY^{-1}$ mit $Y^{-1} = Y^T$ und $D = [\lambda_i\delta_{ij}], \lambda_i \geq 0$, so ist $D^{\frac{1}{2}} := [\lambda_i^{\frac{1}{2}}\delta_{ij}]$ reell, und es wird $W = (YD^{\frac{1}{2}})(YD^{\frac{1}{2}})^T$. Voraussetzungsgemäß

verschwindet genau ein Eigenwert von W. Wird $\lambda_0 = 0$ gewählt, so steht in der ersten Spalte der Matrix $YD^{\frac{1}{2}}$ überall 0. Streicht man diese Spalte und bezeichnet man die verbleibende Matrix vom Format $(d+1,d)$ mit A, so gilt auch $AA^T = W$. Dies besagt aber gerade, daß die Zeilen von A die Koordinaten von Punkten a_i liefern, für die $W = [\langle a_i, a_j\rangle]$ gilt.

Da die Matrix W zugehörige d-Simplexe S bis auf Ähnlichkeiten festlegt, muß sich aus W auch entnehmen lassen, zu wieviel verschiedenen Kongruenzklassen die k-Seiten von S gehören. Beispiele zeigen, daß die Facetten von S mit den durch a_i und a_j bestimmten äußeren Normalen offenbar genau dann kongruent sind, wenn die d-reihigen Hauptminoren W_{ii} und W_{jj} der Matrix W über $W_{ii} = T^T W_{jj} T$ mit einer Permutationsmatrix T verbunden sind. Ein Hinweis auf diesen sicher bekannten Sachverhalt, der den für die Grundlagen der Geometrie bedeutsamen Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck verallgemeinert, konnte nicht gefunden werden. Die behauptete Beziehung leitet zu

SATZ 3: *In vierdimensionalen euklidischen Räumen gibt es Simplexe mit inhaltsgleichen aber paarweise inkongruenten Facetten.*

BEWEIS: Man betrachte die Matrix

$$W(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}-\varepsilon_1 & -\frac{1}{4}+\varepsilon_1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}+\varepsilon_2 & -\frac{1}{4}-\varepsilon_2 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4}+\varepsilon_1-\varepsilon_2 & -\frac{1}{4}-\varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ -\frac{1}{4}-\varepsilon_1 & -\frac{1}{4}+\varepsilon_2 & -\frac{1}{4}+\varepsilon_1-\varepsilon_2 & 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}+\varepsilon_1 & -\frac{1}{4}-\varepsilon_2 & -\frac{1}{4}-\varepsilon_1+\varepsilon_2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $W(0,0)$ ist die zu den regulären 4-Simplexen gehörende Matrix. Die beiden störenden Parameter sind so eingefügt, daß bei beliebiger Wahl von ε_1 und ε_2 sicher $[1,1,1,1,1]^T$ Eigenvektor von $W(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ zum Eigenwert 0 ist. Die Matrix $W(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ hat das Spektrum $(0,\frac{5}{4},\frac{5}{4},\lambda_3,\lambda_4)$ mit $\lambda_{3,4} = \frac{5}{4} \pm (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}$. Wird $\varepsilon_1 = \frac{5}{16}, \varepsilon_2 = -\frac{3}{16}$ gewählt, so erhält man $\lambda_3 = \frac{17}{8}$, $\lambda_4 = \frac{3}{8}$. Die sich ergebende Matrix

$$W(\frac{5}{16}, -\frac{3}{16}) =: W = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{16} & -\frac{7}{16} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

ist mithin zulässig und sie gehört zu Simplexen mit inhaltsgleichen Facetten. In dieser Matrix $W(\frac{5}{16}, \frac{-3}{16})$ lassen sich ersichtlich keine zwei der fünf vierreihigen Hauptminoren durch Transformation mit einer Permutationsmatrix ineinander überführen. Ermittelt man in der zuvor beschriebenen Weise eine Lösung $(a_0, \dots, a_4)$ von $W = [\langle a_i, a_j \rangle]$, so ergibt sich

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & [\ \frac{1}{6}\sqrt{6}, \ \frac{-11}{84}\sqrt{30}, \ \frac{5}{56}\sqrt{34}, \ \frac{5}{56}\sqrt{6}] \\ a_1 & = & [\ \frac{1}{6}\sqrt{6}, \ \frac{13}{84}\sqrt{30}, \ \frac{3}{56}\sqrt{34}, \ \frac{3}{56}\sqrt{6}] \\ a_2 & = & [\ \frac{1}{6}\sqrt{6}, \ \frac{-2}{84}\sqrt{30}, \ \frac{-8}{56}\sqrt{34}, \ \frac{-8}{56}\sqrt{6}] \\ a_3 & = & [-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \ 0, \ \frac{-1}{8}\sqrt{34}, \ \frac{1}{8}\sqrt{6}] \\ a_4 & = & [-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \ 0, \ \frac{1}{8}\sqrt{34}, \ -\frac{1}{8}\sqrt{6}] \end{array} .$$

Werden gemäß (6), etwa mit $(\mu_0, \dots, \mu_4) = (1785, 0, 0, 0, 0)$, die Ecken eines zugehörigen Simplex bestimmt, so gelangt man zu

$$\begin{array}{lllll} p_0 & (0, & 0, & 0, & 0) \\ p_1 & (0, & -408\sqrt{30}, & 30\sqrt{34}, & 170\sqrt{6}) \\ p_2 & (0, & -153\sqrt{30}, & 195\sqrt{34}, & 1105\sqrt{6}) \\ p_3 & (595\sqrt{6}, & -187\sqrt{30}, & 180\sqrt{34}, & -170\sqrt{6}) \\ p_4 & (595\sqrt{6}, & -187\sqrt{30}, & -30\sqrt{34}, & 1020\sqrt{6}) \end{array}$$

Die Facetten von $S = conv(\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\})$, die sicherlich inhaltsgleich sind, sind in der Tat paarweise inkongruent, denn man überzeugt sich leicht, daß es nicht einmal zwei Kanten mit gleicher Länge gibt.

Abschließend dankt der Verfasser Herrn Horst Martini, der ihn auf die von H. Lenz gestellte Frage aufmerksam gemacht hat.

LITERATUR

[1] DEVIDÉ, V.: über gewisse Klassen von Simplexen. Rad Jugoslav. Akad. Znan.. Umjet. 370, odj. mat. fiz. tehn. Nauke **14** (1975), 21 - 37.

[2] DÖRBAND, W.: Determinantensätze und Simplexeigenschaften. Math. Nachr. **44** (1970), 295 - 304.

[3] FRANKL, P.; MAEHARA, H.: Simplices with given 2-face areas. European J. Combin. **11** (1990), 241 - 247.

[4] HORVÁTH, J.: A property of tetrahedra with equal faces in spaces of constant curvature (Hungarian). Mat. Lapok **20** (1969), 257 - 263.

[5] LENZ, H.; SELÉNYI, G.; ZEITLER, H.: Einige Eigenschaften gleichflächiger Tetraeder in der hyperbolischen Geometrie. Working papers, Pécs-Osijek **3** (1989), 81 - 89.

[6] MARTINI, H.: Regular Simplices in Spaces of Constant Curvature. Amer. Math. Monthly **100** (1993), 169 - 171.

[7] MINKOWSKI, H.: Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder. Ges. Abhandlungen, 2. Band, XXII, Leipzig 1911, 103-121.

[8] VINBERG, E. B. (ED.): Geometry II, Spaces of Constant Curvature. Encycl. of Math. Sciences **29**, Springer Verlag 1993.

[9] ZACHARIAS, M.: Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. Encykl. Math. Wiss. III, 1. Teil, 2. Hälfte, Leipzig 1913, 1062 - 1063.

Bernulf Weißbach
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Algebra und Geometrie
PSF 41 20, 39130 Magdeburg, Germany

Eingegangen am 7. September 1998; in revidierter Fassung am 16. Dezember 1999