

Starrheit in der Geometrie involutorischer Gruppenelemente

Von

FRIEDRICH BACHMANN und FRIEDER KNÜPPEL

WOLFGANG GASCHÜTZ zum 60. Geburtstag gewidmet

Wir gehen aus von der

Grundannahme. Sei G eine Gruppe und seien S, P unter inneren Automorphismen von G invariante Mengen von involutorischen Elementen aus G . Jedes involutorische Element aus G liege entweder in S oder in P . Es seien $S, P \cong \emptyset$.

In der Geometrie involutorischer Gruppenelemente ordnet man einem Tripel (G, S, P) , welches der Grundannahme genügt, eine geometrische Struktur zu: Man nennt die Elemente aus S Geraden, die Elemente aus P Punkte, nennt einen Punkt und eine Gerade inzident, wenn ihr Produkt involutorisch ist, nennt zwei Geraden zueinander senkrecht, wenn ihr Produkt involutorisch ist, und nennt die auf S und P restringierten inneren Automorphismen von G Bewegungen¹⁾.

Wenn (G, S, P) eine Hjelslevgruppe ist, gilt:

(*) Der Zentralisator jeder Fahne²⁾ ist eine Kleinsche Vierergruppe und damit operiert die Bewegungsgruppe starr: Läßt eine Bewegung einen Punkt A und eine mit ihm inzidente Gerade b fest, so ist sie die Identität, die Spiegelung am Punkte A , die Spiegelung an der Geraden b oder die Spiegelung an der in A auf b errichteten Senkrechten.

Wir wollen zeigen: Wenn G endlich ist, charakterisiert die Aussage (*), zusammen mit den Aussagen:

P enthält nicht zwei Elemente mit involutorischem Produkt,

S ist keine Konjugiertenklasse,

die endlichen Hjelslevgruppen im Rahmen der Tripel (G, S, P) , welche der Grundannahme genügen.

Ferner geben wir eine einprägsame Charakterisierung beliebiger (nicht notwendig endlicher) Hjelslevgruppen, in der gleichfalls die Starrheits-Bedingung (*) auftritt.

Bezeichnungen. Sei G eine Gruppe. Sind $\alpha, \beta \in G$, so bezeichnen wir das Element $\beta^{-1}\alpha\beta$ mit α^β . Sind α, β involutorisch, so bedeute $\alpha|\beta$: $\alpha\beta$ ist involutorisch („Strichrelation“, AGS § 3, 1). Ist S eine Menge von involutorischen Elementen aus G , so werde die Menge der Zweierprodukte von Elementen aus S mit S^2 bezeichnet: $S^2 := SS$; entsprechend sei $S^3 := SSS, \dots$,

¹⁾ Vergleiche AGS, S. 314f., insbesondere das „Wörterbuch“ S. 315.

²⁾ Unter einer Fahne verstehen wir ein inzidentes Punkt-Gerade-Paar.

ferner $S^{\text{ger}} := \{1\} \cup S^2 \cup S^4 \cup \dots$ und $S^{\text{ung}} := S \cup S^3 \cup \dots$. Ist T eine Teilmenge von G , so bezeichne $I(T)$ die Menge der involutorischen Elemente aus T .

Unsere Note handelt von Tripeln (G, S, P) der zu Anfang genannten Art. Beim Studium solcher Tripel verwenden wir ständig die in AGS, S. 314f. definierten geometrischen Redeweisen; wichtig sind dabei vor allem die oben erwähnten Definitionen von Gerade, Punkt, inzident, senkrecht, Bewegung.

Unter einer Hjelslevgruppe verstehen wir in dieser Note stets eine nicht-elliptische Hjelslevgruppe. Die Definition findet man in AGS, § 20, 5. Eine Hjelslevgruppe ist nach Definition ein Paar (G, S) , wobei G eine Gruppe und S ein unter inneren Automorphismen invariantes Erzeugendensystem von G ist, das aus involutorischen Elementen besteht; die Definition enthält ferner fünf Axiome, denen die Elemente aus S und $P := I(S^2)$ genügen müssen³⁾.

Wenn man Hjelslevgruppen im größeren Rahmen der Geometrie involutorischer Gruppenelemente betrachtet, ist es zweckmäßig, aus einer Hjelslevgruppe (G, S) das Tripel (G, S, P) mit $P := I(S^2)$ zu bilden. Die Redeweise „ (G, S, P) ist eine Hjelslevgruppe“ bedeuten: (G, S) ist eine (nicht-elliptische) Hjelslevgruppe im Sinne der Definition aus AGS und es ist $P = I(S^2)$.

1. Folgerungen aus der Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunkts. Sei (G, S, P) ein Tripel, welches der Grundannahme genügt.

Buchstaben-Konvention. Sofern nichts anderes gesagt ist, mögen a, b, c, d, e, m, n Elemente aus S , und A, B, C, D, E, M, N Elemente aus P bezeichnen.

In P gelte die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunkts⁴⁾:

Je zwei Punkte haben einen Mittelpunkt:

(Ex MP) Zu $A, B \in P$ gibt es stets ein $M \in P$ mit $A^M = B$.

Zwei Punkte haben höchstens einen Mittelpunkt:

(Eind MP) Aus $A^M = A^N$ folgt $M = N$, für alle $A, M, N \in P$.

Für Tripel (G, S, P) , die der Grundannahme und diesen Forderungen genügen, gelten folgende Sätze:

1.1. P^2 enthält kein involutorisches Element.

Beweis. Die Eindeutigkeit des Mittelpunkts liefert im Spezialfall $N = A$: Aus $(AM)^2 = 1$ folgt $AM = 1$.

1.2. Aus $A|b$ folgt $Ab \in S$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist Ab involutorisch, also $Ab \in S \cup P$. Wäre $Ab \in P$, so wäre $b = A \cdot Ab$ ein involutorisches Element aus P^2 .

Satz 1.2 lehrt genauer: Liegt A auf b , so ist Ab eine in A auf b errichtete Senkrechte (denn wegen $A|b$ gilt $A, b|Ab$).

³⁾ Die ersten vier von diesen Axiomen treten im folgenden als Sätze 1.4, 2.5, 2.6, 3.1 auf; das fünfte Axiom sagt nur, daß $P \neq \emptyset$ ist.

⁴⁾ M heißt ein *Mittelpunkt* von A, B , wenn $A^M = B$ ist, wenn also die Spiegelung an M die Punkte A und B vertauscht.

Was die Existenz von Mittelpunkten angeht, so benutzen wir im Abschnitt 1 nur, daß zwei Punkte, die durch Spiegelung an einer Geraden auseinander hervorgehen, einen Mittelpunkt besitzen. Erst im Beweis von Satz 2.6 wird benutzt, daß je zwei verbindbare Punkte einen Mittelpunkt haben.

1.3. Ist M Mittelpunkt von A, A^b , so liegt M auf b und die in M auf b errichtete Senkrechte Mb ist eine Verbindungsgerade von A, A^b .

Beweis. Es ist $A^M = A^b$ und daher $A^{bMb} = A^{MMb} = A^b = A^M$. Da bMb wegen der Invarianz von P in P liegt, folgt mit der Eindeutigkeit des Mittelpunkts $bMb = M$ und damit $M|b$. Nach Satz 1.2 ist also Mb eine in M auf b errichtete Senkrechte. Wegen $A^{Mb} = A, A^{bMb} = A^b$ gilt $A, A^b|Mb$.

1.4 (Existenz des Lotes). Zu A, b gibt es stets ein c mit $A, b|c$.

Beweis. A, A^b haben einen Mittelpunkt M . Nach Satz 1.3 ist Mb ein Lot von A auf b .

1.5. Auf jeder Geraden liegt ein Punkt. Durch jeden Punkt geht eine Gerade. $P \subseteq S^2$.

Beweis. Wegen $P \neq \emptyset$ gibt es einen Punkt A . Ist b eine Gerade, so liegt der Mittelpunkt von A, A^b nach Satz 1.3 auf b . — Wegen $S \neq \emptyset$ gibt es eine Gerade b . Ist A ein Punkt, so gibt es nach Satz 1.4 ein Lot von A auf b . — Sei $A \in P$ gegeben. Es gibt eine Gerade c mit $A|c$. Dann ist $Ac \in S$ (Satz 1.2) und $A = Ac \cdot c \in S^2$.

Ein Mittelpunkt von A, B liegt auf jeder Verbindungsgeraden von A, B :

1.6. Aus $A, A^M|a$ folgt $M|a$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt $A^{aMa} = A^M$. Mit der Eindeutigkeit des Mittelpunkts folgt $aMa = M$, also $M|a$.

1.7. Senkrechte haben einen Punkt gemein: Zu a, b mit $a|b$ gibt es ein C mit $a, b|C$.

Beweis. Sei A ein Punkt mit $A|a$ (Satz 1.5) und M Mittelpunkt von A, A^b ; nach Satz 1.3 gilt $M|b$. Andererseits: Wegen $A|a$ gilt $A^b|a^b$, also $A^M|a$ (denn $A^b = A^M$ und $a^b = a$); man hat also $A, A^M|a$ und daher $M|a$, nach Satz 1.6.

Sind b, c Geraden, die einen Punkt gemein haben, so nennen wir jede Gerade m , für die $b^m = c$ ist⁵⁾, eine Winkelhalbierende von b, c .

Im Hinblick auf Abschnitt 3 erwähnen wir: Ist A ein gemeinsamer Punkt von b, c und m eine Winkelhalbierende von b, c , so kann m mit A inzidieren⁶⁾ oder nicht (vgl. [2, § 8]); jedenfalls gibt es dann eine Winkelhalbierende von b, c , die durch A geht:

1.8. Ist A ein gemeinsamer Punkt von b, c und m eine Winkelhalbierende von b, c , so gilt für den Mittelpunkt M von A, A^m : M liegt auf b, m, c und die in M auf m errichtete Senkrechte Mm ist eine Winkelhalbierende von b, c , die durch A geht.

Beweis. Satz 1.3 liefert $M|m, Mm \in S, A|Mm$. Ferner gilt $A, A^M|b$ (denn $A|b^m$ gibt $A^m|b$, also $A^M|b$); mit Satz 1.6 folgt $M|b$. Ebenso gilt $M|c$. Aus $M|b$ folgt $b^{Mm} = b^m = c$.

⁵⁾ $b^m = c$ bedeutet: die Spiegelung an m vertauscht die Geraden b und c .

⁶⁾ Wenn A und m inzidieren, so ist auch die in A auf m errichtete Senkrechte Am eine Winkelhalbierende von b, c .

2. Hinzunahme der Starrheit. Gilt $A|b$, so ist $\{1, A, b, Ab\}$ eine Kleinsche Vierergruppe; sie ist in $C_G(A, b)$, dem Zentralisator von $\{A, b\}$ in G , enthalten.

Zu den Voraussetzungen aus 1 nehmen wir nun folgende Starrheits-Forderung hinzu:

Starrheit. Der Zentralisator einer Fahne in G ist die von der Fahne erzeugte Kleinsche Vierergruppe:

(St) Gilt $A \in P$, $b \in S$ und $A|b$, so ist $C_G(A, b) = \{1, A, b, Ab\}$.

Für Tripel (G, S, P) , welche diesen Voraussetzungen genügen, gelten folgende Sätze:

2.1 (Satz vom Kreuz⁷⁾). Aus $A|b|c$ folgt $Abc = 1$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A|b$ und $c \in C_G(A, b)$. Mit (St) folgt $c \in \{1, A, b, Ab\}$.

Weil $c \neq 1, A, b$ ist, ist $c = Ab$.

2.2. Aus $a|b$ folgt $ab \in P$.

Beweis. Nach Satz 1.7 gibt es ein C mit $a|b|C$. Mit dem Satz vom Kreuz folgt $ab = C$.

Folgerung. $S \cap S^2 = \emptyset$.

2.3. Gilt $a|b$, so ist $C_G(a, b) = \{1, a, b, ab\}$.

Beweis. ab ist nach Satz 2.2 ein Punkt, mit $ab|a$. Es ist

$$C_G(a, b) = C_G(ab, a) = \{1, ab, a, b\}, \text{ wegen (St).}$$

Jede Kleinsche Vierergruppe V mit $V \leq G$ enthält, weil es in ihr nach Satz 1.1 nicht zwei Punkte gibt, zwei (senkrechte) Geraden, deren Produkt und die 1, ist also von der Form $V = \{1, a, b, ab\}$ mit $a|b$. Daher folgt aus Satz 2.3:

2.4. Für jede Kleinsche Vierergruppe V mit $V \leq G$ gilt $C_G(V) = V$.

Unter den Voraussetzungen aus 1 sind also die Aussagen (St), 2.3, 2.4 äquivalent.

2.5 (Eindeutigkeit des Lotes). Aus $A, b|c, d$ folgt $c = d$.

Beweis. Aus $b|c, d$ folgt mit Satz 2.2 $cb, db \in P$. Wegen $A|c, d$ ist $A^{cb} = A^b = A^{db}$. Mit der Eindeutigkeit des Mittelpunkts folgt $cb = db, c = d$.

2.6. Aus $a, b, c|e$ folgt $abc \in S$.

Beweis. a) Zu a, b mit $a, b|e$ gibt es ein m mit $a^m = b$ und $m|e$. Denn ae, be sind Punkte (Satz 2.2), haben also einen Mittelpunkt M ; wegen $ae, be|e$ gilt $M|e$

⁷⁾ AGS, S. 319. $A|b|c$ ist eine Abkürzung für die Aussage, daß A, b, c paarweise zueinander in der Strichrelation stehen.

(Satz 1.6). Es folgt $a^M = b$. Es ist $Me \in S$ (Satz 1.2) und für $m := Me$ gilt $a^m = b$ und $m|e$. — b) Wir zeigen nun: Aus $a, b, c|e$ folgt $abc \in S \cup P$. a^{abc} ist eine zu e senkrechte Gerade. Daher gibt es, wie Teil a) lehrt, ein m mit $a^m = a^{abc}$ und $m|e$. Man hat dann $a|e$ und $abcm \in C_G(a, e)$; mit Satz 2.3 folgt $abcm \in \{1, a, e, ae\}$. Daher gilt Fall 1: $abc \in \{m, me\}$ oder Fall 2: $bc \in \{m, me\}$. Fall 2 ist nach Satz 1.1 nicht möglich, weil $bc = be \cdot ec \in P^2$ ist und m, me involutorisch sind. Also ist abc gleich der Geraden m oder dem Punkt me . — c) Es gelte $a, b, c|e$. Nach Teil a) gibt es Geraden m, n mit $a^m = b, a^n = c$ und $m, n|e$. Nach Teil b) ist amn involutorisch, also gleich nma . Daher ist $abc = amamnan = amnmn = nmamn = a^{mn} \in S$.

Die Sätze 1.5, 2.2, 1.4, 2.5, 1.2, 2.6 lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Zwischenresultat. (G, S, P) erfülle die Grundannahme und die Forderungen: Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunkts und Starrheit ((Ex MP), (Eind MP), (St)). Dann ist $P = I(S^2)$ und $(\langle S \rangle, S)$ genügt dem Axiomensystem des Senkrechtstehens (AGS, S. 320).

3. Hinzunahme der Bedingten Existenz von Winkelhalbierenden. Zu den Voraussetzungen aus 2 nehmen wir folgende Forderung hinzu:

Bedingte Existenz von Winkelhalbierenden. *Zwei ineinander bewegliche Geraden⁸⁾, die einen Punkt gemein haben, haben eine Winkelhalbierende:*

(WH) *Für alle $b \in S$ und $\alpha \in G$ gilt: Gibt es ein $A \in P$ mit $A|b, b^\alpha$, so gibt es ein $m \in S$ mit $b^m = b^\alpha$.*

Nach Satz 1.8 gilt dann auch die Verschärfung: Zwei ineinander bewegliche Geraden, die einen Punkt A gemein haben, haben eine Winkelhalbierende durch A .

Für Tripel (G, S, P) , welche den Voraussetzungen aus 2 und der Forderung (WH) genügen, beweisen wir die Sätze 3.1 und 3.2.

3.1. *Aus $a, b, c|E$ folgt $abc \in S$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $a^{abc}|E$. Wegen (WH) gibt es eine Gerade d mit $a^{abc} = a^d$ und $d|E$. Man hat dann $E|a$ und $abcd \in C_G(E, a)$ und mit (St) folgt $abcd \in \{1, E, a, Ea\}$. Daher gilt Fall 1: $abc \in \{d, Ed\}$ oder Fall 2: $bc \in \{d, Ed\}$. Im Fall 1 ist abc eine von den beiden mit E inzidenten, zueinander senkrechten Geraden d, Ed (wegen $E|d$ ist $Ed \in S$, nach Satz 1.2). Fall 2 ist wegen der Folgerung von Satz 2.2 unmöglich.

3.2. *S erzeugt G .*

Beweis. Sei $\alpha \in G$. Wegen $P \neq \emptyset$ und Satz 1.5 gibt es eine Fahne $\{A, b\}$. A, A^α haben einen Mittelpunkt M ; es ist dann $A^{\alpha M} = A$. Wegen $A|b$ gilt $A^{\alpha M}|b^{\alpha M}$. Folglich gilt $A|b, b^{\alpha M}$, und wegen (WH) gibt es eine Gerade m mit $A|m$ und b^m

⁸⁾ Zwei Geraden (und ebenso zwei Punkte) sind genau dann ineinander beweglich, wenn sie konjugiert sind.

$= b^{\alpha M}$. Damit gilt $A | b$ und $\alpha M m \in C_G(A, b)$. Mit (St) folgt $\alpha M m \in \{1, A, b, Ab\}$ und hieraus mit Satz 1.2 und $P \subseteq S^2$ (Satz 1.5)

$$\alpha \in \{mM, AmM, bmM, AbmM\} \subseteq SP \cup S^2P \subseteq S^3 \cup S^4.$$

Das Zwischenresultat und die Sätze 3.1, 3.2 führen zu dem

Resultat. *Genügt (G, S, P) der Grundannahme und den Forderungen:*

- Existenz des Mittelpunkts ((Ex MP)),*
- Eindeutigkeit des Mittelpunkts ((Eind MP)),*
- Bedingte Existenz von Winkelhalbierenden ((WH)),*
- Starrheit ((St)),*

so ist (G, S, P) eine Hjlemslevgruppe.

Die Voraussetzung, daß je zwei Punkte einen Mittelpunkt haben, ist nicht in allen unendlichen Hjlemslevgruppen erfüllt. Alle anderen Voraussetzungen des Resultats gelten in jeder Hjlemslevgruppe (vgl. etwa [2, 2*.15, 3*.3, 3*.6, § 13, Lemma 1]).

4. Die endlichen Hjlemslevgruppen. Wir wollen jetzt das Resultat auf endliche Gruppen spezialisieren. Wenn G endlich ist, kann man schon die Voraussetzungen aus 1 auf Grund des folgenden Lemmas abschwächen:

Lemma (vgl. [8, S. 52]). *Sei G eine endliche Gruppe und P eine Menge von involutorischen Elementen aus G , die gegen innere Automorphismen von G invariant ist. Die Elemente aus P werden Punkte genannt; A, B, M, N seien Variable für Elemente aus P . Dann sind äquivalent:*

- 1) P^2 enthält kein involutorisches Element,
- 2) Existenz des Mittelpunkts: Zu A, B gibt es ein M mit $A^M = B$,
- 3) Eindeutigkeit des Mittelpunkts: Aus $A^M = A^N$ folgt $M = N$.

Beweis. Aus der Invarianz von P (in $\langle P \rangle$) folgt, daß alle natürlichen Potenzen eines Elements aus P^2 in P^2 liegen; für $m \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$(AB)^{2m} = A \cdot A^{(AB)^m}, \quad (AB)^{2m+1} = A \cdot B^{(AB)^m}.$$

Es folgt: $(AB)^n \cdot A$ ist stets ein Punkt, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Aus 1) folgt 2): Sei n die Ordnung von AB . Wäre n gerade, etwa $n = 2m$, so wäre $(AB)^m$ involutorisch, also nach dem Gesagten ein involutorisches Element aus P^2 — im Widerspruch zu 1). Folglich ist n ungerade. Wegen $(AB)^n = 1$ ist der Punkt $(AB)^{(n-1)/2} \cdot A =: M$ ein Mittelpunkt von A, B ; denn es ist $MAMB = (AB)^n = 1$, also $A^M = B$. — Aus 2) folgt 3): Die Abbildung $P \rightarrow P, X \mapsto A^X$ ist wegen 2) surjektiv, also, weil P endlich ist, injektiv. — Aus 3) folgt 1) durch Spezialisierung (Beweis von Satz 1.1).

In der Geometrie von Tripeln (G, S, P) der einleitend genannten Art bezeichnet man die Menge der Geraden durch einen Punkt A mit $S(A)$ und die von diesen Geraden erzeugte Untergruppe von G mit $G(A)$:

$$S(A) := \{b \in S : A | b\}, \quad G(A) := \langle S(A) \rangle.$$

(G, S, P) genüge nun wieder den in 2 gemachten Voraussetzungen. Für solche Tripel (G, S, P) beweisen wir die folgenden Hilfssätze 2.7 und 2.8 und den Satz 2.9.

2.7. *Ist $S(A)$ endlich und $b \in S(A)$, so ist $|b^{S(A)}| = \frac{1}{2} |S(A)|$.*

Beweis. Sind $x, y \in S(A)$, so gilt $b^x = b^y$ dann und nur dann, wenn $y = x$ oder $y = xA$ ist. Zum „nur dann“: Aus $A | b$ und $xy \in C_G(A, b)$ folgt mit (St) $xy \in \{1, A, b, Ab\}$, und es ist $xy \neq b, Ab$ nach der Folgerung von Satz 2.2 (auch Ab ist nach Satz 1.2 eine Gerade).

2.8. *Ist G endlich und S keine Konjugiertenklasse, so gilt:*

- a) $S(A)$ besteht aus zwei Konjugiertenklassen von $G(A)$;
- b) Zwei Geraden aus $S(A)$, die in $G(A)$ nicht konjugiert sind, sind auch in G nicht konjugiert.

Beweis. Zu a): Weil auf jeder Geraden ein Punkt liegt (Satz 1.5) und je zwei Punkte einen Mittelpunkt haben, gilt: Spiegelt man alle Geraden aus $S(A)$ an allen Punkten, so erhält man alle Geraden aus S . Wenn alle Geraden aus $S(A)$ unter $G(A)$ konjugiert wären, so wären also alle Geraden (aus S) konjugiert. Da Letzteres nach Voraussetzung nicht der Fall ist, besteht $S(A)$ aus mehreren Konjugiertenklassen von $G(A)$ und, weil $|b^{G(A)}| \geq |b^{S(A)}| = \frac{1}{2} |S(A)| = \frac{1}{2} |S(A)|$ für jedes $b \in S(A)$ gilt (Satz 2.7), aus genau zwei, mit je $\frac{1}{2} |S(A)|$ Elementen. Somit gilt a) und es ist $b^{G(A)} = b^{S(A)}$ für jedes $b \in S(A)$.

Zu b): Seien $b, c \in S(A)$ nicht konjugiert in $G(A)$. Nach a) ist $S(A) = b^{G(A)} \cup c^{G(A)}$. Da man aus den Geraden der Menge $S(A)$ durch Punktspiegelungen alle Geraden aus S erhält, folgt $S = b^G \cup c^G$. Weil S keine Konjugiertenklasse ist, folgt hieraus, daß die beiden Konjugiertenklassen b^G, c^G verschieden, also b, c in G nicht konjugiert sind.

2.9. *Ist G endlich, so ist die Bedingte Existenz von Winkelhalbierenden (WH) äquivalent mit: S ist keine Konjugiertenklasse.*

Beweis. a) Sei $b \in S(A)$. Gilt (WH), so ist $b^G \cap S(A) = b^{S(A)}$; mit Satz 2.7 folgt $|b^G \cap S(A)| = \frac{1}{2} |S(A)|$. Nur die Hälfte aller Geraden aus $S(A)$ ist also zu b konjugiert (in G), schon $S(A)$ enthält Geraden, die unter G nicht konjugiert sind.

b) Sei S keine Konjugiertenklasse. Seien $b, b^\alpha \in S(A)$, mit $\alpha \in G$. Nach Satz 2.8 b sind b, b^α bereits in $G(A)$ konjugiert, und wegen der Gleichung $b^{G(A)} = b^{S(A)}$ aus dem Beweis von Satz 2.8 gibt es ein $m \in S(A)$ mit $b^m = b^\alpha$.

Das Resultat des Abschnitts 3 liefert nun zusammen mit dem Lemma, dem Satz 2.9 und der Äquivalenz von (St) und Satz 2.4 das

Theorem 1. Sei (G, S, P) ein Tripel, welches der Grundannahme genügt; sei G endlich. Es gelte:

- P^2 enthält kein involutorisches Element,
- Jede in G enthaltene Kleinsche Vierergruppe ist selbstzentralisierend,
- S ist keine Konjugiertenklasse.

Dann ist (G, S, P) eine Hjelsmlevgruppe. — Jede endliche Hjelsmlevgruppe (G, S, P) hat alle genannten Eigenschaften.

5. Eine Charakterisierung der Hjelsmlevgruppen. In unendlichen Hjelsmlevgruppen brauchen zwei Punkte nicht immer einen Mittelpunkt zu haben, aber in jeder Hjelsmlevgruppe gilt ([2, 3*. 7]):

Bedingte Existenz von Mittelpunkten. Je zwei ineinander bewegliche Punkte haben einen Mittelpunkt: Zu $A \in P$ und $\alpha \in G$ gibt es stets ein $M \in P$ mit $A^M = A^\alpha$.

Die Hjelsmlevgruppen lassen sich durch die Bedingte Existenz von Mittelpunkten und Winkelhalbierenden, Eindeutigkeit des Mittelpunkts und Starrheit charakterisieren⁹⁾:

Theorem 2. Sei (G, H) ein Paar, das aus einer Gruppe G und einer Untergruppe H vom Index 2 besteht. Sei $P := I(H)$, $S := I(G - H)$. Seien $P, S \neq \emptyset$. (G, S, P) erfülle die Forderungen:

- Bedingte Existenz von Mittelpunkten,
- Eindeutigkeit des Mittelpunkts ((Eind MP)),
- Bedingte Existenz von Winkelhalbierenden ((WH)),
- Starrheit ((St)).

Dann ist (G, S, P) eine Hjelsmlevgruppe. — Umgekehrt hat in einer beliebigen Hjelsmlevgruppe (G, S, P) das Paar (G, S^{ger}) alle genannten Eigenschaften, insbesondere ist $P = I(S^{\text{ger}})$, $S = I(S^{\text{ung}})$.

Zur ersten Hälfte von Theorem 2. Um diesen, dem Resultat aus 3 verwandten Satz zu beweisen, wiederhole man unter den jetzigen Voraussetzungen die Überlegungen aus 1—3. Einiges wird nun einfacher. Einer Revision bedürfen die Stellen, an denen ein Mittelpunkt von zwei nicht notwendig ineinander beweglichen Punkten verwendet wurde. Dies war nur im Beweis von Satz 2.6 der Fall. Schon dort benötigte man aber für den Beweis der Abschwächung:

(b) Aus $a, b, c|e$ folgt $abc \in S \cup P$

nur einen Mittelpunkt der ineinander beweglichen Punkte ae , $(ae)^{abc}$. Unter den Voraussetzungen der ersten Hälfte von Theorem 2 liegen a, b, c und ihr Produkt in $G - H$, während P Teilmenge von H ist; damit ist $abc \in P$ unmöglich und (b) liefert: Aus $a, b, c|e$ folgt $abc \in S$.

⁹⁾ Diese Postulate wurden auch in einem Vortrag besprochen, den F. Bachmann auf einer Geometrie-Tagung gehalten hat, die vom 18. bis 23. März 1979 in Haifa stattfand. Es ist beabsichtigt, die auf der Tagung gehaltenen Vorträge in Springers Lecture Notes zu publizieren.

Die zweite Hälfte von Theorem 2 ist eine Vereinigung von viel verwendeten Sätzen aus der Geometrie der Hjelmslevgruppen (vgl. etwa [2, 2*.15, 3*.3, 3*.6, 3*.7, § 13, Lemma 1]).

Hinweise. Hjelmslev hat in [7] ein mit der Forderung (WH) verwandtes Axiom benutzt. Unser Theorem 2 ist mit dem Kriterium 2 aus [4] verwandt.

Literaturverzeichnis

- [1] F. BACHMANN, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Zweite ergänzte Auflage. Berlin-Heidelberg-New York 1973. — Zitiert als AGS.
- [2] F. BACHMANN, Hjelmslev-Gruppen. Math. Sem. Univ. Kiel 1970/71. Zweiter Neudruck 1976.
- [3] F. BACHMANN, Beweglichkeit in Hjelmslevgruppen. In: Logik, Mathematik und Philosophie des Transzendenten. Festgabe für U. Saarnio. Paderborn 1977, S. 11—29.
- [4] F. BACHMANN und R. SCHNABEL, Kriterien für Hjelmslevgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 44, 222—232 (1976).
- [5] M. GÖTZKY und K. JOHNSEN, Eine Charakterisierung der endlichen Gruppen, welche bezüglich geeigneter Erzeugendensysteme Hjelmslevgruppen sind. Geom. Dedic. 2, 375—377 (1973).
- [6] G. HEIMBECK, Endliche verallgemeinerte metrische Ebenen mit starren Richtelementen. Arch. Math. 30, 27—39 (1978).
- [7] J. HJELMSLEV, Einleitung in die Allgemeine Kongruenzlehre, 1. Mitt. Danske Vid. Selskab, mat.-fys. Medd. 8, Nr. 11 (1929).
- [8] K. JOHNSEN, Endliche Gruppen mit nicht-elliptischer Spiegelungsgeometrie. Geom. Dedic. 2, 51—56 (1973).
- [9] R. STÖLTING, Über endliche Hjelmslevgruppen. Math. Z. 135, 249—255 (1974).

Eingegangen am 17. 8. 1979

Anschrift der Autoren:

F. Bachmann und F. Knüppel
Mathematisches Seminar
Universität Kiel
Olshausenstr. 40—60
D-2300 Kiel 1