Invent. math. 99, 215–224 (1990)

*Inventiones mathematicae*


# Sur une question d'Erdös et Schinzel, II

G. Tenenbaum
Département de Mathématiques, Université de Nancy I, BP 239,
F-54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex, France

## § 1. Introduction et énoncé des résultats

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique $n$, avec la convention $P(1)=1$. En 1952, Erdös [3] a montré que pour tout polynôme irréductible $F(X)$, à coefficients entiers et de degré $g>1$, on a

$$P\big(\prod_{n\leq x} F(n)\big)>x\exp\{c_0(F)\log_2 x\cdot\log_3 x\}\qquad (x>x_0(F))$$

où $c_0(F)>0$ et où $\log_k$ désigne la $k$-ième itérée de la fonction logarithme. Dans le même article, il a annoncé le résultat meilleur

$$P\big(\prod_{n\leq x} F(n)\big)>x\exp\{(\log x)^{c_1(F)}\}\qquad (x>x_0(F))\tag{1.1}$$

pour une constante positive convenable $c_1(F)$. Cependant, le schéma de démonstration initialement envisagé par Erdös s'est révélé insuffisant à fournir (1.1), et un récent travail d'Erdös et Schinzel [4] a pour objet d'établir rigoureusement une minoration intermédiaire, soit

$$P\big(\prod_{n\leq x} F(n)\big)>x\exp\exp\{c_2(\log_2 x)^{\frac{1}{3}}\}\qquad (x>x_0(F))\tag{1.2}$$

où $c_2$ est une constante absolue.

La méthode initiale d'Erdös reposait sur l'étude de la localisation des diviseurs de $F(n)$ dans de petits intervalles. Plus précisément, désignons par $H_F(x,y,z)$ le nombre des entiers $n$ n'excédant pas $x$ pour lesquels $F(n)$ possède au moins un diviseur $d$ tel que $y<d\leq z$. Posons $H_F(x):=H_F(x,\frac{1}{2}x,x)$. L'argument de [3] est explicité dans [4] sous la forme quantitative

$$P\big(\prod_{n\leq x} F(n)\big)>x\exp\left\{\frac{\log x}{gx}H_F(x)\right\}\qquad (x>x_0(F)).\tag{1.3}$$

Répondant, au moins partiellement, à une question d'Erdös et Schinzel, nous avons effectué dans [11] une étude asymptotique de la quantité $H_F(x,y,z)$ sans restriction de primalité concernant le polynôme $F(X)$. Lorsque $y \leqq x^{1-\varepsilon}$ et $z = y(1+(\log y)^{-\beta})$ avec $0 \leqq \beta = \beta(y,z) \ll 1$, nous avons déterminé $H_F(x,y,z)$ avec un facteur d'incertidude $(\log y)^{o(1)}$. Dans le cas particulier d'un polynôme irréductible, et pour $z=2y$, une forme sensiblement affaiblie de notre résultat peut s'énoncer ainsi.

**Théorème A** [11]. *Soit* $\delta := 1 - \left(\frac{1+\log_2 2}{\log 2}\right) = 0{,}08607$. *Pour chaque* $\varepsilon > 0$ *fixé, on a*

$$H_F(x,y,2y) = x(\log y)^{-\delta+o(1)} \tag{1.4}$$

*lorsque* $x$ *et* $y$ *tendent vers l'infini en restant dans le domaine* $y \leqq x^{1-\varepsilon}$.

Dans cet article, nous nous proposons d'adjoindre à (1.4) une minoration valable uniformément pour $y \leqq \frac{1}{2}x$.

**Théorème 1.** *Soit* $\eta > \log 4 - 1$. *Pour chaque polynôme* $F(X)$ *irréductible dans* $\mathbb{Z}[X]$, *on a*

$$H_F(x,y,2y) > x(\log x)^{-\eta} \tag{1.5}$$

*lorsque* $x$ *et* $y$ *tendent vers l'infini dans le domaine* $y \leqq \frac{1}{2}x$.

En insérant cette estimation dans (1.3), nous obtenons immédiatement une forme quantitative du résultat (1.1) annoncé par Erdös en 1952.

**Théorème 2.** *Soit* $\alpha$, $0 < \alpha < 2 - \log 4 = 0{,}61370$. *Pour chaque polynôme* $F(X)$, *de degré* $g > 1$, *irréductible dans* $\mathbb{Z}[X]$, *on a l'inégalité asymptotique*

$$P\Big(\prod_{n \leqq x} F(n)\Big) > x \exp\{(\log x)^{\alpha}\} \qquad (x > x_0(F)).$$

Nous déduisons le théorème 1 d'une extension aux suites polynomiales de l'estimation en moyenne des moments de la fonction $\Delta$ de Hooley. Posons, pour $n \geqq 1$,

$$\Delta(n,u) := \operatorname{card}\{d : d \mid n,\ e^u < d \leqq e^{u+1}\} \tag{1.6}$$

et

$$\Delta(n) := \max_{u \in \mathbb{R}} \Delta(n,u). \tag{1.7}$$

Hooley a montré dans [7] que l'ordre moyen de $\Delta(n)$ intervient de façon cruciale dans de nombreux problèmes arithmétiques. Une étude assez complète de cette fonction est disponible dans le livre de Hall et l'auteur [6] – chapitres 4 à 7. Désignons par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts de $n$. Dans un autre travail en commun avec Hall [5], nous avons établi, pour tous $t$, $y$ satisfaisant à $t \geqq 1$, $y \geqq t/(2^t - 1)$, la majoration asymptotique

$$\sum_{n \leqq x} \Delta(n)^t y^{\omega(n)} \ll_{t,y} x(\log x)^{\beta(t,y)-1}\, \mathscr{L}(\log x)^{2\sqrt{t}+o(1)} \tag{1.8}$$

avec

$$\beta(t, y) := 2^t y - t, \tag{1.9}$$

$$\mathscr{L}(z) := \exp\{\sqrt{\log z \cdot \log_2 z}\} \qquad (z > 3). \tag{1.10}$$

Le résultat suivant, qui constitue le point-clef de notre démonstration du théorème 1, est une généralisation partielle de (1.8).

**Théorème 3.** *Soit $F(X)$ un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$. Pour chaque $t \geqq 1$, on a, lorsque $x$ tend vers l'infini,*

$$\sum_{n \leqq x} \Delta(F(n))^t \ll_t x(\log x)^{\beta(t)-1} \mathscr{L}(\log x)^{\sqrt{2t}+o(1)} \tag{1.11}$$

*avec $\beta(t) := 2^t - t$.*

Par souci de simplicité, nous n'avons énoncé ici que l'extension du cas $y = 1$ de (1.8). Le lecteur n'aura aucun mal à vérifier, le cas échéant, que l'introduction d'un poids $y^{\omega(F(n))}$, avec $y \geqq t/(2^t - 1)$, n'affecte en rien la nature de notre argument. Semblablement, la même méthode permet d'étudier les moments pondérés de $\Delta_r(F(n))$, où $\Delta_r$ $(r \geqq 2)$ est la fonction de Hooley générale, introduite dans [7]. Les résultats de [5] sont encore valables dans ce cadre, à ceci près que la valeur explicite des facteurs $\mathscr{L}(\log x)^{o(1)}$ donnée dans [5] doit être convenablement modifiée. En faisant appel à la technique exposée au § 7.3 de [6], on peut même améliorer l'exposant de $\mathscr{L}(\log x)$ dans ces majorations – ainsi que l'atteste la comparaison de (1.11) et (1.8).

## § 2. Preuve du théorème 3

Soit $\rho(n)$ le nombre des racines modulo $n$ de $F$. On sait classiquement que $\rho$ est une fonction multiplicative telle que $\rho(p^\nu) \ll 1$ pour tout $p$ premier et tout entier $\nu \geqq 1$.

**Lemme 2.1.** *On a lorsque $x$ tend vers l'infini*

$$\sum_{p \leqq x} \rho(p) = \mathrm{li}(x) + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}), \tag{2.1}$$

$$\sum_{n \leqq x} \rho(n) = A x + O(x^{1-\alpha}), \tag{2.2}$$

*où $c$, $A$, $a$ sont des constantes positives dépendant de $F$.*

*Démonstration.* La relation (2.1) est une conséquence facile du théorème des idéaux premiers – cf. par exemple [11], lemme 3.1. Pour établir (2.2), il suffit d'observer que l'on a pour $s$ complexe, $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) n^{-s} = \zeta_K(s) \Phi(s) \tag{2.3}$$

où $\zeta_K(s)$ est la fonction zêta de Dedekind du corps de nombres $K$ engendré sur $\mathbb{Q}$ par une racine de $F$, et où $\Phi$ est une fonction holomorphe et bornée pour $\mathrm{Re}(s) \geqq \frac{3}{4}$, avec $\Phi(1) \neq 0$ – cf. par exemple la démonstration du lemme 3.9 de [11] pour les détails. La formule asymptotique (2.2) découle de (2.3) par la méthode usuelle d'intégration complexe, en faisant appel aux propriétés analytiques classiques de $\zeta_K(s)$ – [8], §§ 14–15.

*Remarque.* Nous n'utiliserons (2.2) que sous la forme faible

$$\sum_{\frac{1}{2}x < n \leqq x} \rho(n) \gg x. \tag{2.4}$$

En vue d'une éventuelle extension du théorème 3 au cas d'intervalles plus courts, nous avons préféré énoncer ici la formule la plus précise – dont la démonstration repose d'ailleurs sur les mêmes idées que celles qui conduisent à (2.4): voir par exemple le *lemma* 10 de [2].

Jusqu'à la fin de cette section, nous convenons que toutes les constantes, implicites ou explicites, peuvent dépendre du polynôme $F$ et du paramètre $t$.

**Lemme 2.2.** *Soit $t \geqq 1$. On a lorsque $x$ tend vers l'infini*

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Delta(n)^t \rho(n)}{n} \ll (\log x)^{\beta(t)} \mathcal{L}(\log x)^{\sqrt{2t} + o(1)}. \tag{2.5}$$

**Démonstration.** Nous employons la méthode d'équation différentielle exposée dans [5] et, pour $t=1$, au chapitre 7 de [6]. Le fait de remplacer le coefficient pondéral $y^{\omega(n)}$ par $\rho(n)$ n'induit aucun changement significatif dans les calculs. Pour la commodité du lecteur, nous indiquons cependant les principales étapes du raisonnement. Ainsi que nous l'avons précédemment mentionné, l'argument développé dans [6] est légèrement plus précis que celui de [5]; nous ferons donc, paradoxalement, référence à [6] plutôt qu'à [5].

Etant donné un paramètre entier $q \geqq 1$, nous posons pour $n \geqq 1$

$$M_q(n) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n,u)^q \, du.$$

D'après le *theorem* 72 de [6], on a

$$2^{1-q} \Delta(n)^q \leqq M_q(n) \leqq \tau(n)^q, \tag{2.6}$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre total des diviseurs de $n$. Nous allons étudier la série de Dirichlet d'argument réel

$$L(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} M_q(n)^{\frac{t}{q}} \frac{\rho(n)}{n^\sigma} \qquad (1 < \sigma \leqq 2)$$

où, ici et dans la suite, l'astérisque indique que la sommation est restreinte aux entiers sans facteur carré. Soit $S := \{s \in \mathbb{Z}^+ : p|s \Rightarrow p^2|s\}$. En utilisant l'existence, pour chaque entier $n$, d'une unique décomposition $n=ms$ avec $\mu(m)^2=1$, $s\in S$, $(m,s)=1$, et en remarquant que

$$\Delta(ab)\leqq\Delta(a)\,\tau(b)\qquad(a\geqq 1, b\geqq 1)\tag{2.7}$$

(cf. [6] *lemma* 61.1), on peut écrire pour $x\geqq 2$

$$\sum_{n\leqq x}\Delta(n)^t\,\frac{\rho(n)}{n}\leqq\sum_{s\in S}\frac{\tau(s)^t\rho(s)}{s}\sum_{m\leqq x}{}^{*}\,\frac{\Delta(m)^t\rho(m)}{m}\ll L\left(1+\frac{1}{\log x}\right).\tag{2.8}$$

Nous allons déduire (2.5) de (2.8) pour un choix convenable de $q$, $q>q_0(t)$.

On a pour $\sigma>1$

$$-L'(\sigma)=\sum_p\sum_{\substack{m=1\\ p\nmid m}}^{\infty}{}^{*}\,M_q(pm)^{\frac{t}{q}}\,\frac{\rho\,(pm)\log p}{(pm)^{\sigma}}.\tag{2.9}$$

Considérons l'identité

$$\Delta(pm,u)=\Delta(m,u)+\Delta(m,u-\log p)\qquad(p\nmid m).$$

En élevant à la puissance $q$ et en développant le membre de droite par la formule du binôme, nous obtenons

$$M_q(pm)=2\,M_q(m)+E_q(m,p)\qquad\text{(disons).}$$

Le *theorem* 73 de [6] permet alors d'écrire

$$\sum_p E_q(m,p)\frac{\log p}{p}\leqq C\,4^q\,\tau(m)^{\frac{q}{q-1}}\,M_q(m)^{\frac{q-2}{q-1}}.$$

Cela implique l'existence d'une constante $C_0$ telle que

$$\sum_p M_q(pm)\,\frac{\rho(p)\log p}{p^{\sigma}}\leqq 2\,M_q(m)\sum_p\frac{\rho(p)\log p}{p^{\sigma}}+C_0\,4^q\,\tau(m)^{\frac{q}{q-1}}\,M_q(m)^{\frac{q-2}{q-1}}.\tag{2.10}$$

Maintenant, la formule (2.1) fournit grâce à une sommation d'Abel

$$\sum_p\frac{\rho(p)\log p}{p^{\sigma}}\leqq\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\qquad(1<\sigma\leqq 2)\tag{2.11}$$

où $\kappa$ ne dépend que de $F$. En employant tour à tour l'inégalité de Hölder et celle de Minkowski, on déduit de (2.10) et (2.11) que l'on a

$$\begin{aligned}\sum_p M_q(pm)^{\frac{t}{q}} \frac{\rho(p)\log p}{p^\sigma} &\leqq 2^{\frac{t}{q}} M_q(m)^{\frac{t}{q}}\left(\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\right)\\ &+C_0^{\frac{t}{q}}\cdot 4^t\,\tau(m)^{\frac{t}{q-1}} M_q(m)^{\frac{t(q-2)}{q(q-1)}}\left(\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\right)^{1-\frac{t}{q}}\end{aligned}$$

En reportant dans (2.9), il suit

$$\begin{aligned}-L'(\sigma) &\leqq 2^{\frac{t}{q}} L(\sigma)\left(\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\right)\\ &+C_1\left(\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\right)^{1-\frac{t}{q}} \sum_{m=1}^{\infty}{}^{*}\, M_q(m)^{\frac{t(q-2)}{q(q-1)}} \frac{\rho(m)\,\tau(m)^{\frac{t}{q-1}}}{m^\sigma}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, la dernière somme est au plus égale à

$$\left\{\sum_{m=1}^{\infty}{}^{*} \frac{\rho(m)\,\tau(m)^t}{m^\sigma}\right\}^{\frac{1}{q-1}} L(\sigma)^{\frac{q-2}{q-1}}$$

et la série en $m$ vaut

$$\prod_p\left(1+2^t\frac{\rho(p)}{p^\sigma}\right) \leqq C_2(\sigma-1)^{-2^t}. \tag{2.12}$$

Nous pouvons donc finalement écrire

$$-L'(\sigma) \leqq 2^{\frac{t}{q}} L(\sigma)\left(\frac{1}{\sigma-1}+\kappa\right)+C_3\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{\alpha(t,q)} L(\sigma)^{\frac{q-2}{q-1}}$$

avec $\alpha(t,q) := 1-\frac{t}{q}+\frac{2^t}{q-1} = 1+\frac{\beta(t)}{q-1}+\frac{t}{q(q-1)}$. A ce stade, on remarque que (2.6) implique que le membre de gauche de (2.12) majore $L(\sigma)$. Donc

$$L(\sigma) \leqq L(\sigma)^{\frac{q-2}{q-1}} C_2^{\frac{1}{q-1}} (\sigma-1)^{\frac{-2^t}{q-1}} \ll L(\sigma)^{\frac{q-2}{q-1}} (\sigma-1)^{-\alpha(t,q)}.$$

Il s'ensuit que pour une constante convenable $C_4$ on a

$$-L'(\sigma) \leqq 2^{\frac{t}{q}} L(\sigma)(\sigma-1)^{-1}+C_4\, L(\sigma)^{\frac{q-2}{q-1}} (\sigma-1)^{-\alpha(t,q)}. \tag{2.13}$$

Une solution de l'équation différentielle associée à (2.13) est

$$X(\sigma) := K(\sigma-1)^{-\gamma(t,q)}$$

avec

$$\gamma(t,q):=\beta(t)+\frac{t}{q}, \qquad \text{et} \quad K:=\left\{\frac{C_4}{\gamma(t,q)-2^{t/q}}\right\}^{q-1}.$$

Par (2.12), on a $L(2)\leqq C_2\leqq X(2)=K$ si $C_4$ est assez grande. Par le *lemma* 70.2 de [6], il suit

$$L(\sigma)\leqq X(\sigma) \qquad (1<\sigma\leqq 2). \tag{2.14}$$

On a $K\leqq (C_5\, q)^q$; le résultat annoncé découle donc de (2.14), pour le choix

$$\sigma=1+\frac{1}{\log x}, \qquad q=\left[\sqrt{\frac{2t\log_2 x}{\log_3 x}}\right].$$

*Fin de la démonstration du théorème* 3. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $F(\mathbb{Z}^+)\subseteq\mathbb{Z}^+$. Nous employons la technique de crible exposée au chapitre III de Hooley [7] – voir aussi [10], § 2 – et qui est une variante de la fertile méthode d'Erdös dans [2]. Soit $h=h(t)$ un paramètre positif assez petit, et $z:=\exp\left\{h\dfrac{\log x}{\log_2 x}\right\}$. Nous décomposons, pour chaque $n$, le nombre $F(n)$ sous la forme

$$F(n)=a_n\, b_n$$

où tous les facteurs premiers de $a_n$ (resp. $b_n$) sont $\leqq z$ (resp. $>z$). Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\sum_{\substack{n\leqq x,\\ a_n>x^{\frac{1}{3}}}} \Delta(F(n))^t \leqq \Big\{\sum_{\substack{n\leqq x,\\ a_n>x^{\frac{1}{3}}}} 1\cdot\sum_{n\leqq x}\tau(F(n))^{2t}\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

On a d'une part, d'après le lemme 3.7 de [11],

$$\sum_{\substack{n\leqq x,\\ a_n>x^{\frac{1}{3}}}} 1 \ll x\exp\left\{-c_6\frac{\log x}{\log z}\right\}=x(\log x)^{-c_6/h},$$

et d'autre part, grâce au *Satz* 4 de Wolke [12],

$$\sum_{n\leqq x}\tau(F(n))^{2t}\ll x(\log x)^{4^t-1}.$$

On en déduit que pour $h<c_6/(4^t-1)$, on a

$$\sum_{\substack{n\leqq x,\\ a_n>x^{\frac{1}{3}}}} \Delta(F(n))^t\ll x. \tag{2.15}$$

Cette estimation est bien compatible avec le résultat requis (1.11). Pour traiter la somme complémentaire, nous utiliserons d'une part l'inégalité

$$\Delta(F(n))\leqq\Delta(a_n)\,\tau(b_n) \tag{2.16}$$

(qui découle de (2.7)) et d'autre part la majoration

$$\tau(m)^t \leqq C_7 \sum_{\substack{d \mid m \\ d \leqq m^{1/(3g+1)}}} \tau(d)^u \quad (m \geqq 1) \tag{2.17}$$

où $u = u(F, t)$ est une constante convenable. Cette estimation découle d'une inégalité de van der Corput [1]. Un récent résultat de Landreau [9] montre que les valeurs $u = t(3g+1)$ et $C_7 = (3g+1)^{3g(3g+1)t}$ sont admissbles. En remarquant de plus que pour $x$ assez grand

$$b_n^{1/(3g+1)} \leqq x^{\frac{1}{3}} \quad (n \leqq x)$$

puisque $F(n) \ll x^g$, on déduit de (2.16) et (2.17) que l'on a pour $x \geqq x_0(F)$

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ a_n \leqq x^{\frac{1}{3}}}} \Delta(F(n))^t \leqq C_7 \sum_{\substack{a \leqq x^{\frac{1}{3}} \\ P(a) \leqq z}} \Delta(a)^t \sum_{\substack{d \leqq x^{\frac{1}{3}} \\ p \mid d \Rightarrow p > z}} \tau(d)^u \sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, ad) \\ p \mid F(n) \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p > z}} 1. \tag{2.18}$$

La somme intérieure relève des méthodes de crible. Soit $D_F$ le discriminant de $F$, $D := D_F \cdot F(1)$. Alors $\rho(p) \leqq \min\{g, p-1\}$ lorsque $p \nmid D$, et la fonction multiplicative $\varphi_F$ définie par

$$\varphi_F(p^\nu) := \begin{cases} p^\nu & \text{si } p \mid D \\ p^\nu\left(1 - \dfrac{\rho(p)}{p}\right) & \text{si } p \nmid D \end{cases} \quad (\nu \geqq 1)$$

satisfait à

$$\varphi_F(n) \geqq c_8\, n \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^g \quad (n \geqq 1). \tag{2.19}$$

En appliquant le lemme 3.4 de [11], on obtient que la somme intérieure de (2.18) est

$$\ll \frac{x}{\log z} \cdot \frac{\rho(ad)}{\varphi_F(ad)} \ll \frac{x (\log_2 x)^{g+1}}{\log x} \cdot \frac{\rho(ad)}{ad},$$

où la seconde estimation découle de (2.19). Cela implique que le membre de gauche de (2.18) est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x (\log_2 x)^{g+1}}{\log x} \sum_{a \leqq x} \Delta(a)^t \frac{\rho(a)}{a} \prod_{z < p \leqq x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho(p^\nu) \frac{(\nu+1)^u}{p^\nu} \\ &\ll x \frac{(\log_2 x)^{c_9}}{\log x} \sum_{a \leqq x} \Delta(a)^t \frac{\rho(a)}{a}, \end{aligned}$$

avec $c_9 := g + 1 + 2^u$. La conclusion souhaitée découle donc de (2.5).

## § 3. Démonstration du théorème 1

Soit $\eta > \log 4 - 1$. Dans toute cette section nous convenons que les constantes, explicites ou implicites, peuvent dépendre au plus de $\eta$ et de $F$. L'étape liminaire du raisonnement consiste à établir que l'on a

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \Delta(F(n)) > (\log x)^\eta}} \Delta(F(n)) = o(x). \tag{3.1}$$

Nour employons à cette fin la "méthode des moments évanescents" – cf. [6], § 3.2. Posons

$$\varepsilon := \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1+\eta}{\log 4}\right) > 0$$

et appliquons le théorème 3 avec $t = 1 + \varepsilon$. Le membre de gauche de (3.1) n'excède pas

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Delta(F(n))^{1+\varepsilon}}{(\log x)^{\eta\varepsilon}} \ll x(\log x)^{\sigma + o(1)},$$

avec

$$\sigma := \beta(1+\varepsilon) - 1 - \eta\varepsilon = -2\{2^\varepsilon \log(2^\varepsilon) - 2^\varepsilon + 1\} < 0.$$

Cela achève la preuve de (3.1).

Nous pouvons maintenant compléter la démonstration du théorème 1. Posons

$$\Delta^*(F(n), y) := \operatorname{card}\{d : d \mid F(n),\, y < d \leqq 2y\}.$$

On a d'une part

$$\Delta^*(F(n), y) \leqq \Delta(F(n)) \qquad (n \geqq 1),$$

de sorte que (3.1) implique

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ \Delta^*(F(n), y) > (\log x)^\eta}} \Delta^*(F(n), y) = o(x). \tag{3.2}$$

D'autre part

$$\sum_{n \leqq x} \Delta^*(F(n), y) = \sum_{y < d \leqq 2y} \sum_{\substack{n \leqq x \\ F(n) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} d)}} 1 \geqq \frac{1}{2} x \sum_{y < d \leqq 2y} \frac{\rho(d)}{d} \gg x,$$

d'après (2.4). Il suit

$$H_F(x, y, 2y) \geqq (\log x)^{-\eta} \sum_{\substack{n \leqq x \\ \Delta^*(F(n), y) \leqq (\log x)^\eta}} \Delta^*(F(n), y) \gg x(\log x)^{-\eta}.$$

Cela établit bien l'estimation annoncée.

## Bibliographie


[1] Corput, J.G. van der: Une inégalité relative au nombre des diviseurs. Nederl. Akad. Wetensh. Proc. Ser. A **42**, 547–553 (1939)

[2] Erdös, P.: On the sum $\sum_{k=1}^{x} d\{f(k)\}$. J. Lond. Math. Soc. **27**, 7–15 (1952)

[3] Erdös, P.: On the greatest prime factor of $\prod_{k=1}^{x} f(k)$. J. Lond. Math. Soc. **27**, 379–384 (1952)

[4] Erdös, P., Schinzel, A.: On the greatest prime factor of $\prod_{k=1}^{x} f(k)$. Acta Arith. (à paraître)

[5] Hall, R.R., Tenenbaum, G.: The average orders of Hooley's $\Delta_r$-functions, II. Compos. Math. **60**, 163–186 (1986)

[6] Hall, R.R., Tenenbaum, G.: Divisors. Cambridge: Cambridge University Press 1988

[7] Hooley, C.: On a new technique and its applications to the theory of numbers. Proc. Lond. Math. Soc. **38**, 115–151 (1979)

[8] Landau, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. (Leipzig: Teubner 1927); réimpression: New York: Chelsea 1949

[9] Landreau, B.: A new proof of a theorem of van der Corput. Bull. Lond. Math. Soc. **21**, 366–368 (1989)

[10] Tenenbaum, G.: Fonctions $\Delta$ de Hooley et applications. Séminaire de théorie des nombres, Paris 1984–85, Prog. Math. **63**, 225–239 (1986)

[11] Tenenbaum, G.: Sur une question d'Erdös et Schinzel. In: Baker, A., Bollobás, B., Hajnal, A. (eds.). A Tribute to Paul Erdös. Cambridge: Cambridge University Press (à paraître)

[12] Wolke, D.: Multiplicative Funktionen auf schnell wachsenden Folgen. J. Reine Angew. Math. **251**, 54–67 (1971)


Oblatum 4–IV–1988