Invent. math. 117:531–550 (1994)

Inventiones mathematicae
© Springer-Verlag 1994

Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et condition de Thom

Joël Briançon, Philippe Maisonobe, et Michel Merle

Laboratoire de Mathématiques, (Unité associée au CNRS n° 168), Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France

Oblatum 22-III-1993 & 8-VII-1993

Introduction

Soit M un $\mathscr{D}_\Omega$ module holonome régulier sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et f une fonction analytique sur Ω. A partir de résultats de Ginsburg, nous donnons une formulation géométrique des cycles caractéristiques de $M[1/f]$, $\Psi_f(M)$ et $\Phi_f(M)$ en fonction du cycle caractéristique de M et des invariants locaux de f. Une formule équivalente est donnée par Sabbah dans le cas de $\Psi_f(M)$. Si le cycle caractéristique de M est $\sum_i m_i T^*_{X_i}(\Omega)$, le cycle caractéristique du module $M[1/f]$ est égal à:

$$\mathrm{Car}(M[1/f]) = \sum_{f(X_i)\neq 0} m_i(\Gamma_i + T^*_{X_i}(\Omega))$$

avec $\Gamma_i = \sum_j m_{i,j}\Gamma_{i,j}$. Les $\Gamma_{i,j}$ sont les composantes irréductibles du diviseur défini par f dans $T^*_{f|X_i}$ et $m_{i,j}$ est la multiplicité de l'idéal définissant $\pi(\Gamma_{i,j})$ le long de $\Gamma_{i,j}$ où π désigne la projection du fibré cotangent sur sa base.

Le cycle caractéristique du module $\Psi_f(M)$ est égal à:

$$\mathrm{Car}(\Psi_f(M)) = \sum_{f(X_i)\neq 0} m_i\,\Omega_i$$

avec $\Omega_i = \sum_j p_{i,j}\Gamma_{i,j}$ et $p_{i,j}$ est la multiplicité de l'idéal f le long de $\Gamma_{i,j}$. D'autre part on peut exprimer les multiplicités $m_{i,j}$ et $p_{i,j}$ à l'aide de multiplicités de variétés polaires relatives au morphisme $f|_{X_i}$. La variété caractéristique de Φ_f s'obtient par différence. Cette formulation généralise une formulation géométrique de Sabbah [S2, théorème 4.5], Ginsburg [Gin, Proposition 7.7.1] et Lê [Le1, théorème 4.1.2].

D'autre part, la formule donnée pour la variété caractéristique de $M[1/f]$ nous a permis de mettre en évidence des conditions suffisantes pour qu'une stratification d'un morphisme vérifie la condition de Thom. Si f: $X \to \mathbf{C}$ est une fonction analytique et $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$ une stratification de f, telle que $\mathscr{S}$ possède des propriétés de trivialité topologique locale (comme par exemple les conditions de Whitney), alors la stratification $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$ possède la propriété a_f de Thom.

On déduit à partir de résultats de [H-M-S] que si la stratification $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$ du morphisme vérifie les conditions a et b de Whitney, les multiplicités des variétés polaires relatives au morphisme f sont constantes le long des strates de $\mathscr{S}$. En particulier, cette stratification $(\mathscr{S}, \mathscr{T})$ vérifie la condition de Thom stricte w_f. Ce dernier résultat a été récemment prouvé par Parusiński [Par], par une méthode différente, lorsque X est une variété lisse.

Nous donnons enfin quelques applications de ces résultats. Par exemple, nous obtenons, pour une fonction f: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$, une formule explicite reliant les multiplicités polaires absolues de $f^{-1}(0)$ et relatives de f.

Table des matières

1 Cohomologie locale et évanescente

Soient Ω une variété analytique complexe lisse de dimension n, f une fonction holomorphe sur Ω, $Y = f^{-1}(0)$ l'hypersurface de Ω ensemble des zéros de f. Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathrm{Perv}(\Omega)$: la catégorie des faisceaux pervers sur Ω; dans [D-K] est défini le triangle:

$$\mathscr{F}|_Y \to R\Psi_f \mathscr{F} \to R\Phi_f \mathscr{F}.$$

Notons i l'inclusion fermée de Y dans Ω et j l'inclusion ouverte de $U = \Omega - Y$ dans Ω; on a également le triangle:

$$j_! j^{-1} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to i_* \mathscr{F}|_Y.$$

La correspondance de Riemann Hilbert [Meb2, K5, D2]:

$$M \mapsto \mathrm{Sol}(M) = R\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_\Omega}(M, \mathcal{O}_\Omega)$$

établit une équivalence entre la catégorie $\mathscr{D}_\Omega - \mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}$ des $\mathscr{D}_\Omega$ modules holonomes réguliers et $\mathrm{Perv}(\Omega)$. Dans [Mal2, K3, S1, Gin, Lau] sont définis deux objets $\Psi_f(M)$ et $\Phi_f(M)$ de $\mathscr{D}_\Omega - \mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}$ tels que:

$$\mathrm{Sol}(\Psi_f(M)) = R\Psi_f(\mathrm{Sol}(M)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sol}(\Phi_f(M)) = R\Phi_f(\mathrm{Sol}(M)).$$

Considérons d'autre part le localisé $M(*Y)$ (noté aussi $M[1/f]$) de M le long de Y; c'est encore un objet de $\mathscr{D}_\Omega$-$\mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}$ [K2, Meb3]. Enfin $R\Gamma_Y(M)_{\mathrm{alg}}$ est un élément de $D^b(\mathscr{D}_\Omega)_{\mathrm{hr}}$: la catégorie dérivée formée des complexes bornés de $\mathscr{D}_\Omega$ modules dont les groupes de cohomologie sont dans $\mathscr{D}_\Omega$-$\mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}$. Les deux triangles ci-dessus correspondent (voir par exemple [Meb1]) aux deux triangles ci-dessous par application du foncteur solution:

$$R\Gamma_Y(M)_{\mathrm{alg}} \leftarrow \Psi_f(M) \leftarrow \Phi_f(M)$$

$$M(*Y) \leftarrow M \leftarrow R\Gamma_Y(M)_{\mathrm{alg}}.$$

A un faisceau pervers $\mathscr{F}$ ou au $\mathscr{D}_\Omega$ module holonome M qui lui correspond, on sait associer sa variété caractéristique: $SS(\mathscr{F}) = SS(M)$. C'est un sous ensemble analytique lagrangien du fibré cotangent $T^*\Omega$. On peut définir cette variété caractéristique soit de façon algébrique à partir d'une bonne filtration de M, soit de façon topologique à partir des solutions $\mathscr{F} = \mathrm{Sol}(M)$: un covecteur non nul ξ en $x \in \Omega$ est dans $SS(\mathscr{F})$ si et seulement si il existe un germe $g: (\Omega, x) \to (\mathbf{C}, 0)$ tel que $dg(x) = \xi$ et $R\Phi_g(\mathscr{F}) \neq 0$ [L-M, B1].

La variété caractéristique est le support du cycle caractéristique que nous noterons $\mathrm{Car}(\mathscr{F}) = \mathrm{Car}(M)$; ce cycle, défini initialement de manière algébrique, se déduit par l'isomorphisme d'Euler de la fonction constructible: $x \mapsto \chi(\mathscr{F}_x)$ (indice du complexe des fibres de $\mathscr{F}$) en x [S2, par. 1.3].

2 Espaces conormaux relatifs et variétés polaires relatives

Considérons un sous espace irréductible X de Ω de dimension d sur lequel f n'est pas constante; nous désignerons par X° l'ouvert dense des points x de la partie lisse de X où $f|_X$ est une submersion; le conormal relatif $T^*_{f|_X} \subset T^*\Omega$ est l'adhérence, dans $T^*\Omega|_X$, de l'ensemble des covecteurs qui s'annulent sur l'espace tangent à la fibre de $f|_X$:

$$\{\xi \in T^*\Omega;\ x = \pi(\xi) \in X^\circ \text{ et } \xi \text{ s'annule sur } T_x(f|_X)^{-1}(f(x))\}$$

(où π: $T^*\Omega \to \Omega$ est la projection canonique). Donc si $\Lambda = T^*_X\Omega$ est le conormal à X dans Ω, la fibre de $T^*_{f|_X}$ en un point $x \in X^\circ$ est $\Lambda_x \oplus \mathbf{C}\, df(x)$. Les fibres de la restriction de f à $T^*_{f|_X}$ sont des sous variétés langrangiennes coniques de $T^*\Omega$ [K1, H-M-S, L-T, H-M2], en particulier $W_{0,f,X} = f^{-1}(0) \cap T^*_{f|X}$; donc chaque composante irréductible de $W_{0,f,X}$ est le conormal à sa projection sur X.

Notons $\mathrm{Sing}(f|_X)$ l'adhérence de l'ensemble des points x de X où $df(x)$ appartient au sous espace vectoriel engendré par la fibre Λ_x du conormal à X; on voit facilement que f est constante le long d'un petit chemin analytique tracé dans $\mathrm{Sing}(f|_X)$; donc, dans un voisinage de $f^{-1}(0)$, on a: $\mathrm{Sing}(f|_X) \subset f^{-1}(0) \cap X$. Soit $x_0 \in X \cap f^{-1}(0)$; quitte à prendre une carte locale, on peut supposer que Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, et identifier $T^*\Omega$ à $\Omega \times (\mathbf{C}^n)^*$; π désigne toujours la projection sur Ω, et π_2 la projection sur le second facteur. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, d = \dim X\}$, soit V^k un sous espace vectoriel de codimension k de $\mathbf{C}^n$ et $V_k^\vee$ le sous espace des formes linéaires nulles sur V^k. L'image

$$\pi(T^*_{f|X} \cap \pi_2^{-1}(V_k^\vee))$$

est appelée variété polaire relative locale de $f|_X$ définie par V^k et notée $P_k(f|_X, V^k)$. Il existe un ouvert de Zariski non vide de la grassmanienne des plans de codimension k dans $\mathbf{C}^n$ tel que pour V_k dans cet ouvert:

(1) $P_k(f|_X, V^k)$ est vide ou de dimension pure k.
(2) $P_k(f|_X, V^k)$ est l'adhérence de l'ensemble des points de la partie lisse X° de $f|_X$ où la fibre de $f|_X$ n'est pas transverse à V_k.
(3) La multiplicité de $P_k(f|_X, V^k)$ en x_0 est indépendante de V_k.

Nous parlerons alors de la polaire relative (générique) de $f|_X$ en x_0 de dimension k et de sa multiplicité. On pourra se réferer à [H-M-S] pour les démonstrations de ces affirmations.

3 Multiplicités polaires et multiplicités caractéristiques

3.1 *Une construction de Ginsburg*

Dans Ginsburg [Gin], après Kashiwara [K1] dans certains cas particuliers, on considère un ensemble analytique $\overline{\Lambda^\#}$ associé à une sous variété (irréductible) lagrangienne conique Λ de $T^*\Omega$ et une fonction $f: \Omega \to \mathbf{C}$ non identique à zéro sur $\pi(\Lambda)$. Comme Λ est une sous variété lagrangienne conique de $T^*\Omega$, c'est le conormal à un sous espace X de Ω. L'ensemble $\Lambda^\#$ est défini comme:

$$\left\{\left(x, \xi + s\frac{df}{f}(x), s\right) \in T^*\Omega \times \mathbf{C};\, (x, \xi) \in \Lambda, f(x) \neq 0\right\}.$$

Comme Λ est une variété homogène, $\Lambda^\#$ et $\overline{\Lambda^\#}$ admettent une action du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$ induite par:

$$\zeta, \left(x, \xi + s\frac{df}{f}(x), s\right) \mapsto \left(x, \zeta\xi + \zeta s\frac{df}{f}(x), \zeta s\right)$$

et le quotient par l'action de $\mathbf{C}^{\times}$ du complémentaire de la section nulle ($\xi = s = 0$) sera noté $\mathbf{P}\overline{\Lambda}^{\#}$.

On s'intéresse à l'adhérence $\overline{\Lambda^{\#}}$ et surtout au cycle défini dans $\overline{\Lambda^{\#}}$ par la fonction s, considéré comme un cycle de $T^*\Omega$ par la projection canonique. Ce dernier, de dimension n, admet Λ pour composante.

Ginsburg [Gin, Theorems 3.3 et 5.5] démontre les résultats suivants:

Théorème 3.1.1 (Ginsburg) *Soit M un $\mathscr{D}_{\Omega}$ module holonome régulier ayant pour cycle caractéristique* $\mathrm{Car}(M) = \sum_i m_i \Lambda_i$ *et soit $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction analytique.*

Le cycle caractéristique du module $M[1/f]$ est alors égal à:

$$\mathrm{Car}\left(M\left[\frac{1}{f}\right]\right) = \sum_{f(\Lambda_i) \neq 0} m_i \Gamma_i$$

où Γ_i est le cycle défini par $s=0$ dans $\overline{\Lambda_i^{\#}}$.

Le cycle caractéristique du module $\Psi_f(M)$ est égal à

$$\mathrm{Car}(\Psi_f(M)) = \sum_{f(\Lambda_i) \neq 0} m_i \Omega_i$$

où Ω_i est le cycle défini par $f=0$ dans $\overline{\Lambda_i^{\#}}$.

3.2 *Interprétation géométrique*

La fonction f permet de plonger X dans $\Omega \times \mathbf{C}$ de telle sorte que f soit induite par la deuxième projection $\mathrm{pr}_2\colon \Omega \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Construisons le conormal $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ à ce plongement: si nous notons (x, t) des coordonnées sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ et $(\xi; \tau)$ les coordonnées duales sur le fibré cotangent $T^*\mathbf{C}^{n+1}$ identifié à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}^*$, le conormal $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ est l'adhérence dans $T^*\mathbf{C}^{n+1}$ de

$$\{(x, f(x), \alpha(\xi + d f(x)), -\alpha); (x, \xi) \in \Lambda, \alpha \in \mathbf{C}\}.$$

Le conormal à $\mathbf{C}^n \times \{0\}$ est défini par les équations $\xi = t = 0$; son fibré normal dans $T^*\mathbf{C}^{n+1}$ s'identifie à son fibré cotangent; nous choisissons un isomorphisme de ce dernier avec $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^* \times (\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}$ et nous noterons les coordonnées correspondantes (x, τ, η, v); outre l'action du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^{\times}$ sur les fibres ce fibré hérite de l'action de $\mathbf{C}^{\times}$ sur $T^*_{\mathbf{C}^n \times \{0\}}\mathbf{C}^{n+1}$; ces actions se traduisent sur les coordonnées d'un point par les suivantes:

$$(\alpha, \beta), (x, \tau, \eta, v) \mapsto (x, \alpha\tau, \alpha\beta\eta, \beta v).$$

La déformation $\mathrm{Def}(X,f)$ de $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ sur son cône normal le long de $T^*_{\mathbf{C}^n\times\{0\}}\mathbf{C}^{n+1}$ est l'adhérence de l'ensemble suivant:

$$\{(x, \tau, \eta, \nu, \lambda)/(x, \lambda\nu, \lambda\eta, \tau)\in T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}, \lambda\neq 0\}.$$

Compte tenu de la définition de $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$, $\mathrm{Df}(X,f)$ est aussi l'adhérence de l'ensemble:

$$\{(x, -\alpha, \lambda^{-1}\alpha(\xi+df(x)), \lambda^{-1}f(x), \lambda)/(x, \xi)\in\Lambda, \alpha\in\mathbf{C}, \lambda\neq 0\}.$$

Le cône normal lui même est le cycle d'intersection de la déformation avec $\lambda=0$; il est stable par l'action de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

3.3 *Spécialisation*

D'après le théorème de spécialisation [K1, H-M-S, L-T, H-M2], ce cône normal est une variété lagrangienne (de dimension $n+1$). Chacune de ses composantes irréductibles est le conormal d'un sous espace irréductible homogène de $T^*_{\mathbf{C}^n\times\{0\}}\mathbf{C}^{n+1}$. Un tel sous espace est:

- soit contenu dans la section nulle de $T^*_{\mathbf{C}^n\times\{0\}}\mathbf{C}^{n+1}$ (définie par $\tau=0$).
- soit le produit par $\mathbf{C}^*$ d'un sous espace de $\mathbf{C}^n$.

Son conormal est donc:

- soit le produit d'une variété lagrangienne de $T^*\mathbf{C}^n$ par $\mathbf{C}$ (et par suite contenu dans $\tau=0$)
- soit contenu dans le sous espace de $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^*\times(\mathbf{C}^n)^*\times\mathbf{C}$ défini par $\nu=0$.

Nous nous intéressons plus précisement à l'espace projectif associé à $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ noté $C(X,f)$: c'est l'adhérence dans $\mathbf{P}(T^*\mathbf{C}^{n+1})$ de l'ensemble

$$\{(x, f(x), [\xi+df: -1]); (x, \xi)\in\Lambda\}$$

(nous notons $[t_0: t_1: \ldots: t_n]$ un système de coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}^n$). C'est aussi le quotient de l'ouvert $(\xi, \tau)\neq 0$ par l'action de $\mathbf{C}^\times$.

L'éclatement $E(X,f)$ de $C(\mathbf{C}^n\times 0)$ (défini par $t=\xi=0$) dans $C(X,f)$ est obtenu en faisant successivement le quotient de l'ouvert $\tau\neq 0$ de la déformation $\mathrm{Def}(X,f)$ par l'action de $\mathbf{C}^\times$ donnée par:

$$(\alpha), (x, \tau, \eta, \nu, \lambda)\mapsto(x, \alpha\tau, \alpha\eta, \nu, \lambda)$$

puis en faisant le quotient de l'ouvert $(\eta, \nu)\neq 0$, $\lambda\neq 0$ par l'action de $\mathbf{C}^\times$:

$$(\beta), (x, \tau, \eta, \nu, \lambda)\mapsto(x, \tau, \beta\eta, \beta\nu, \beta^{-1}\lambda).$$

Le diviseur exceptionnel de cet éclatement s'obtient en faisant le quotient de l'ouvert $\tau\neq 0$, $(\eta, \nu)\neq 0$ du cône normal à $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ le long de $T^*_{\mathbf{C}^n\times 0}\mathbf{C}^{n+1}$ par l'action de $(\mathbf{C}^\times)^2$.

Lemme 3.3.1 *Toute composante du diviseur exceptionnel de l'éclatement $E(X,f)$ est contenue dans le sous espace défini par $v=0$.*

Démonstration. Les composantes du diviseur exceptionnel proviennent des composantes du cône normal à $T^*_{\mathbf{C}^n\times 0}\mathbf{C}^{n+1}$ dans $T^*_{X,f}\mathbf{C}^{n+1}$ non contenues dans $\tau=0$. D'après ce qu'on a vu, les composantes du cône normal non contenues dans $\tau=0$ sont contenues dans $v=0$. □

L'éclatement de $C(\mathbf{C}^n\times 0)$ dans $C(X,f)$ est donc l'adhérence de l'ensemble suivant:

$$\{(x,f(x),[\xi+df(x):-1],[\xi+df(x):f(x)];(x,\xi)\in\Lambda,f(x)\neq 0\}.$$

Le lemme montre que, sur $E(X,f)$ on est toujours au voisinage de $v=0$, autrement dit que $[\xi+df(x):f(x)]$ ne tend jamais vers $[0,1]$ lorsque $(\xi+df(x),f(x))$ tend vers 0. L'éclatement $E(X,f)$ est donc entièrement décrit comme l'adhérence de l'ensemble:

$$\{(x,f(x),[\xi+df(x):f(x)];(x,\xi)\in\Lambda,f(x)\neq 0\}$$

et cette dernière écriture montre que $E(X,f)$ est isomorphe au projectivisé $\mathbf{P}\overline{\Lambda^{\#}}$.

Dans cet isomorphisme, la fonction homogène s sur $\mathbf{P}\overline{\Lambda^{\#}}$ induit localement une fonction égale à $f(x)/\|\xi+df(x)\|$ (par abus de langage, dans la carte $\eta_j\neq 0$ de $\mathbf{P}^{n-1}$ nous notons $\|\xi+df(x)\|$ la j-ième coordonnée de $\xi+df(x)$). Toujours à cause du lemme, la projection de $E(X,f)$ sur $X\times\mathbf{P}^{n-1}$ décrite par

$$(x,f(x),[\xi+df(x):f(x)])\mapsto(x,f(x),[\xi+df(x)])$$

est partout définie et c'est un morphisme fini. C'est d'ailleurs une bijection au voisinage du diviseur exceptionnel de $E(X,f)$. L'image de cette projection est le conormal relatif $C(f,X)$ (projectivisé) du morphisme $f\colon X\to\mathbf{C}$. Le cycle associé à $s=0$ sur $\mathbf{P}\overline{\Lambda^{\#}}$ est l'image inverse par cette projection du cycle de $C(f,X)$ localement défini par $f(x)/\|\xi+df(x)\|$. Nous voyons que les composantes du support du cycle défini par $s=0$ dans $\overline{\Lambda^{\#}}$ sont de deux types:

- les composantes du diviseur de $T^*_{f|X}$ associé à la fonction f
- la variété Λ plongée en codimension 1 dans $T^*_{f|X}$ par l'application $(x,\xi)\mapsto(x,f(x),\xi)$.

3.4 *Multiplicités*

Proposition 3.4.1 *Soit Z une composante irréductible du diviseur de $T^*_{f|X}$ associé à la fonction f.*

(1) *Z est une sous variété lagrangienne: c'est donc le conormal de sa projection* $\pi(Z)$ dans X.
(2) *La multiplicité du cycle associé à* $f(x)/\|\xi+df(x)\|$ *le long de Z est la multiplicité le long de Z de l'idéal définissant* $\pi(Z)$.
(3) *La multiplicité du cycle associé à* $f(x)/\|\xi+df(x)\|$ *le long de Z est la multiplicité de la variété polaire générale de* $f|_X$ *de dimension* $\dim(\pi(Z))+1$ *au point générique de* $\pi(Z)$.
(4) *La multiplicité du cycle associé à f le long de Z est la multiplicité, au point générique de* $\pi(Z)$, *du cycle intersection de la variété polaire générale de* $f|_X$ *de dimension* $\dim(\pi(Z))+1$ *avec l'hypersurface* $f=0$.

Démonstration. (1) C'est une conséquence du théorème de spécialisation [K1, H-M-S, L-T, H-M2].

(2) Considérons la normalisation $\overline{C(f, X)}$ et une composante irréductible $\bar{Z}$ de l'image inverse de Z dans $\overline{C(f, X)}$. Au point générique de $\bar{Z}$ on choisit un système de coordonnées sur $\bar{Z}$ obtenu en complétant un systèmes de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ sur $\pi(Z)(\dim(\pi(Z))=\mathrm{d})$; on complète en un systèmes de coordonnées de $\overline{C(f, X)}$ par une coordonnée nulle sur $\bar{Z}$ choisie de telle sorte que, au voisinage du point considéré, on ait $f=u^k$. L'image par l'application tangente à $\overline{C(f, X)}\to X$ du champ de vecteurs $u(\partial/\partial u)$ est un champ de vecteurs $\sum_i u(\partial x_i/\partial u)\,\partial/\partial x_i$ tangent à X, donc orthogonal à tout vecteur conormal à X. Nous avons donc, pour tout point $(x, \xi)\in\Lambda$:

$$\sum_{i>d} u(\partial x_i/\partial u)\,\xi_i=0.$$

D'autre part comme $k u^k=\sum_{i>d} u(\partial x_i/\partial u)\,\partial f/\partial x_i$ nous obtenons, au voisinage du point considéré de $\bar{Z}$:

$$k f=k u^k=\sum_{i>d} u(\partial x_i/\partial u)(\xi_i+\partial f/\partial x_i).$$

Pour conclure sur ce point (2), remarquons qu'au voisinage du point générique de $\bar{Z}$, l'idéal $(x_i)_{i\leqq d}$ définissant $\pi(Z)$ est principal, engendré par une puissance de u, de même que l'idéal des coordonnées d'un vecteur conormal relatif à f.
(3) découle de (2) à l'aide de la formule de projection: la multiplicité de la variété polaire relative $P_{d+1}(f, V^{d+1})$ de f au point général de $\pi(Z)$ s'obtient en coupant celle ci par V^{d+1} ([H-M1]).
(4) est un énoncé analogue à (3) où l'on doit remplacer l'idéal de $\pi(Z)$ par l'idéal principal (f). La formule de projection permet de conclure de la même manière. □

Nous pouvons maintenant énoncer sous une autre forme le théorème 3.1.1.

Théorème 3.4.2 *Soit M un $\mathscr{D}_\Omega$ module holonome régulier ayant pour cycle caractéristique* $\mathrm{Car}(M)=\sum_i m_i \Lambda_i$ *et soit $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction analytique; $X_i=\pi(\Lambda_i)$.*

Le cycle caractéristique du module $M[1/f]$ est égal à:

$$\mathrm{Car}(M[1/f]) = \sum_{f(X_i)\neq 0} m_i(\Gamma_i+\Lambda_i)$$

avec $\Gamma_i=\sum_j m_{i,j}\Gamma_{i,j}$. Les $\Gamma_{i,j}$ sont les composantes irréductibles du diviseur défini par f dans $T^*_{f|\bar{X}_i}$ et $m_{i,j}$ est la multiplicité, le long de $\Gamma_{i,j}$, de l'idéal définissant $\pi(\Gamma_{i,j})$.

Le cycle caractéristique du module $\Psi_f(M)$ est égal à:

$$\mathrm{Car}(\Psi_f(M)) = \sum_{f(\Lambda_i)\neq 0} m_i\,\Omega_i$$

avec $\Omega_i=\sum_j p_{i,j}\Gamma_{i,j}$ et $p_{i,j}$ est la multiplicité le long de $\Gamma_{i,j}$, de l'idéal f.

Exemple 3.4.3 (Fonction à singularités isolées) Soit M n $\mathscr{D}_\Omega$ module holonome régulier et $f\colon \Omega\to\mathbf{C}$ une fonction à *singularités isolées* [Le2] sur M, c'est à dire telle que le graphe de la différentielle de f ne rencontre la variété caractéristique de M qu'en des points isolés. Le faisceau des cycles évanescents $\phi_f(\mathrm{Sol}(M))$ est concentré en ces points et sa caractéristique d'Euler est égale à la multiplicité d'intersection du graphe de la différentielle de f avec le cycle caractéristique de M [S1]

$$\chi(\phi_f(\mathrm{Sol}(M))) = (\mathrm{Car}(M)\cdot \mathrm{Graphe}(\mathrm{d}f)).$$

Pour retrouver cette formule à l'aide de 3.4.2, nous remarquons qu'elle est additive par rapport aux composantes du cycle caractéristique de M. Soit donc une composante Λ de $\mathrm{Car}(M)$ conormal d'un sous espace X de Ω. L'intersection $\Lambda\cap \mathrm{Graphe}(\mathrm{d}f)$ étant de dimension 0, la multiplicité d'intersection $(\Lambda\cdot \mathrm{Graphe}(\mathrm{d}f))$ est égale à la multiplicité d'intersection de la courbe Γ définie par les équations

$$\xi_1-\partial f/\partial x_1=\ldots=\xi_{n-1}-\partial f/\partial x_{n-1}=0$$

dans Λ avec l'hypersurface d'équation $\xi_n-\partial f/\partial x_n=0$. Remarquons que sur toute branche de la courbe Γ l'ordre de la fonction $(\xi_n-\partial f/\partial x_n)$ est la différence entre les ordres de f et de x_n (3.4.1).

A cause de la formule de projection, les multiplicités d'intersection de Γ avec les hypersurfaces $f=0$ et $x_n=0$ sont respectivement égales aux multiplicités d'intersection de la courbe polaire relative de $f|_X$ avec $f=0$ et $x_n=0$.

On en déduit finalement la contribution de Λ dans la multiplicité du conormal à l'origine de la variété caractéristique de $\phi_f(M)$:

$$(P_1(f|_X, V^1)\cdot f^{-1}(0)) - (P_1(f|_X, V^1)\cdot (x_n)^{-1}(0))$$

et ceci montre la formule annoncée, en additionnant les contributions de chaque composante de $\mathrm{Car}(M)$ et en appliquant 3.4.2.

4 Stratification d'une fonction et conditions de Thom

Soit X un sous espace analytique fermé d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et f: $\Omega \to T$ un morphisme analytique. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification analytique complexe de X, $(T_\beta)_{\beta\in B}$ une stratification analytique complexe de T. On dit que c'est une stratification du morphisme f si pour tout α dans A, il existe β dans B tel que f induise une submersion de X_α dans T_β. On dit que la stratification de f vérifie la condition (a_f) de Thom si, pour tout couple de strates incidentes (X_0, X_1), $X_0 \subset \overline{X_1}$,

$$T^*_{f|\bar{X}_1}|X_0 \subset T^*_{f|X_0}.$$

C'est la traduction, sur les conormaux, de la condition bien connue sur les limités d'espaces tangents aux fibres de la restriction de f aux strates.

Pour $f(X_\alpha)$ réduit à un point, on note $T^*_{f|X_\alpha} = T^*_{X_\alpha}\Omega$.

Lorsque $f(X_0)$ et $f(X_1)$ sont dans une strate de dimension 0 la condition de Thom se réduit à la condition (a) de Whitney.

4.1 *Condition de trivialité locale stratifiée*

Soient $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification de $X \subset \Omega$ vérifiant la condition (a) de Whitney, X_α une strate, x un point de X_α, g: $(\Omega, x) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ une submersion analytique transverse à X_α. On note D_η la boule ouverte de centre 0 et de rayon η dans $\mathbf{C}^p$; $B_\varepsilon(g^{-1}(0))$ la boule ouverte de centre x et de rayon ε dans $g^{-1}(0)$.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $B_\varepsilon(g^{-1}(0))$ est naturellement stratifiée par l'intersection de $g^{-1}(0)$ avec les strates $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$; le produit $D_\eta \times B_\varepsilon(g^{-1}(0))$ est muni de la stratification produit.

Définition 4.1.1 On dit que $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, stratification de X vérifiant la condition (a) de Whitney possède la **propriété de trivialité locale stratifiée** (TLS) si, pour tout point $x\in X$, pour toute submersion g: $(\Omega, x) \to (\mathbf{C}^p, 0)$ transverse en x à la strate X_α de x ($p \leqq \dim(X_\alpha)$), il existe $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, un voisinage ouvert U de x dans Ω, et un homéomorphisme stratifié h qui fait commuter le diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \cap U \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & D_\eta \times (X \cap B_\varepsilon(g^{-1}(0))) \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & D_\eta . \end{tikzcd}$$

Remarque 4.1.2 Le premier lemme d'isotopie de Thom-Mather affirme que si $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification vérifiant les conditions (a) et (b) de Whitney elle satisfait la propriété (TLS); l'exemple de Briançon et Speder [B-S] montre que la réciproque est fausse.

4.2 Le résultat principal

Théorème 4.2.1 *Soient X un sous espace analytique irréductible d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, $f\colon X\to\mathbf{C}$ une fonction analytique, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(T_\beta)_{\beta\in B}$ des stratifications analytiques complexes de X et $T=\mathbf{C}$ respectivement, définissant une stratification de f. Si $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ vérifie la condition* (a) *de Whitney et la propriété de trivialité locale stratifiée, alors la stratification de f est une stratification* (a_f) *de Thom.*

Remarque 4.2.2 Soient $X=\Omega$ et $f\colon \Omega\to\mathbf{C}$ un germe de fonction défini au voisinage de $0\in X$, dont le lieu singulier est une courbe X_0 et tel que $W_{0,f,X}$ le conormal relatif de f coupé par $f=0$ ne contient pas le conormal au point 0. La courbe polaire générique de f est vide.

Alors d'après Lazzeri [L] le lieu singulier de f est un germe de courbe lisse et d'après Lê-Saito la stratification $(X\backslash f^{-1}(0), f^{-1}(0)\backslash X_0, X_0)$ est une stratification a_f (ce qui se démontre, heureusement dans ce cas là, sans utiliser la trivialité topologique locale qui est vraie pour $n\neq 4$ à cause du théorème de Lê-Ramanujam) [L-R].

Démonstration. (1) Cas facile: Considérons deux strates incidentes X_0 et X_1, $(X_0\subset\bar{X}_1)$, se projetant par f sur la même strate de T; pour un tel couple de strates, la condition de Thom se déduit simplement de la condition (a) de Whitney.

(2) Suite: Il reste à traiter le cas général d'un couple de strates X_0 et X_1, $(X_0\subset\bar{X}_1)$, telles que $f(X_0)=0$ et $f(X_1)=\mathbf{C}\backslash\{0\}$. On note d la dimension de X_1.

Dans [B-B-D (proposition 2.1.17, p. 63)] et [G-M], est montrée l'existence d'un faisceau pervers sur Ω, le complexe de cohomologie d'intersection $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$, qui vérifie les propriétés:

(1) $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$ est supporté par $\overline{X_1}\subset X$

(2) $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})|_{X_1}$ est le faisceau constant $\mathbf{C}_{X_1}$ placé en degré $-d$.

(3) Les faisceaux de cohomologie de $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$ sont constructibles relativement à la stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Soit j l'inclusion ouverte de $\Omega - f^{-1}(0)$ dans Ω; nous avons rappelé dans le par. 1 que $j_! j^{-1}((\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1}))$ est pervers et d'autre part il vérifie toujours les propriétés (1) (2) et (3) ci-dessus. Il résulte des propriétés (1) et (2) appliquées à $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$ que:

$$T^*_{X_1}\mathbf{C}^n \subset SS(\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1}))$$

Appliquons le théorème 3.4.2

- au $\mathcal{D}_\Omega$-module M correspondant par Riemann-Hilbert à $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$
- à la composante $T^*_{X_1}\Omega$ de sa variété caractéristique
- et à la fonction f non nulle sur X_1.

Le complexe $\mathrm{Sol}\left(M\left[\frac{1}{f}\right]\right)$ s'identifie alors à $j_! j^{-1}(\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1}))$ et on obtient

$$T^*_{f|X_1} \cap f^{-1}(0) \subset SS(j_! j^{-1}(\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1}))).$$

Le théorème résultera alors de

$$SS(j_! j^{-1}(\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1}))) \subset \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha}\Omega.$$

Mais cette inclusion est un cas particulier du résultat général suivant.

Proposition 4.2.3 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau pervers sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ dont les groupes de cohomologie sont constructibles relativement à une stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de Ω vérifiant la condition* (a) *de Whitney et la propriété de trivialité locale stratifiée; alors*

$$SS(\mathcal{F}) \subset \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha}\Omega.$$

Démonstration. Cette proposition peut se démontrer à l'aide de la caractérisation topologique de la variété caractéristique et de généralités sur les faisceaux constructibles [K4, M-N]. Soient $(x,\xi) \notin \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha}\Omega$ et $g\colon (\Omega, x) \to (\mathbf{C}, 0)$ tel que $dg(x) = \xi$; par hypothèse le morphisme g est transverse en x à sa strate X_0; $R\Psi_g(\mathcal{F})_x$ est l'hypercohomologie de la fibre de Milnor de g à valeurs dans $\mathcal{F}$; comme la stratification vérifie la propriété de trivialité locale relativement à g:

$$R\Psi_g(\mathcal{F})_x \simeq R\Gamma(B(x,\varepsilon) \cap g^{-1}(0), \mathcal{F})$$

où $B(x,\varepsilon)$ est une boule de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$, assez petit.

Or $B(x, \varepsilon) \cap g^{-1}(0)$ se rétracte sur x en respectant les strates de la stratification $(X_\alpha \cap g^{-1}(0))_{\alpha \in A}$ [G-M2], et le long de ces strates les groupes de cohomologie de $\mathscr{F}$ sont constants. Donc [K4, M-N]:

$$R\Gamma(B(x, \varepsilon) \cap g^{-1}(0), \mathscr{F}) \simeq \mathscr{F}_x .$$

Nous en déduisons $R\Phi_g(\mathscr{F})_x = 0$ et par conséquent $(x, \xi) \notin SS(\mathscr{F})$. □

Remarque 4.2.4 Une proposition analogue est démontrée par Kashiwara et Schapira [K-S, proposition 8.4.1, p. 338]; ils supposent donnée une «μ-stratification», c'est à dire, dans le cadre analytique où nous sommes placés, une stratification de Whitney (voir 4.1.2).

Remarque 4.2.5 Au lieu de $\mathbf{P}(\mathbf{C}_{X_1})$ dans la preuve du théorème, nous aurions pu utiliser, dans le cas où $(X_\alpha)_\alpha \in A$ est une stratification de Whitney, le $\mathscr{D}_\Omega$ module $R^{n-d}\Gamma_{\overline{X_1}}(\mathscr{O}_\Omega)$; on peut se reporter à ce sujet à [B-B-D, p. 8] et [B-K, p. 7, propriété 10].

4.3 *Conditions de Whitney et condition de Thom stricte*

Soient un sous espace analytique fermé X d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, une fonction analytique $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, une stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(T_\beta)_{\beta \in B}$ de $f|_X$.

Nous venons de voir que, sous la condition de trivialité locale stratifiée, plus faible que les conditions (a) et (b) de Whitney, la condition (a_f) de Thom est satisfaite. Or, on sait que les conditions de Whitney sont conservées localement par sections génériques contenant une strate: nous obtenons donc la condition (a_f) pour de telles sections génériques; nous allons en déduire la condition de Thom «stricte» ou «uniforme» notée (w_f). Rappelons la définition:

Définition 4.3.1 Le couple de strates (X_0, X_1) **satisfait la propriété ($\mathbf{w_f}$)** au point $x_0 \in X_0$ s'il existe un voisinage U de x_0 et une constante $C > 0$ tels que pour tout $x \in U \cap X_0$ et $y \in U \cap X_1$ on ait:

$$\delta(T_x X_{0,f(x)}, T_y X_{1,f(y)}) \leqq C\, d(x, y)$$

où $T_y X_{i,f(y)}$ désigne l'espace tangent à la fibre de la restriction de f à X_i ($i = 0$ ou 1), d la distance euclidienne de $\mathbf{C}^n$ et δ définie par:

$$\delta(E, F) = \sup_{u \in E - \{0\}, v \in F^\perp - \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Théorème 4.3.2 *Soient un sous espace analytique fermé X d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, un morphisme analytique $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$, une stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(T_\beta)_{\beta \in B}$ de $f|_X$. Si la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifié les conditions* (a) *et* (b) *de Whitney, alors, pour tout couple de strates (X_0, X_1), $X_0 \subset \overline{X_1}$, les variétés polaires* *relatives de* $f|_{\overline{X_1}}$ *sont équimultiples le long de* X_0. *En particulier, la stratification satisfait à la condition de Thom stricte* (w_f).

Démonstration. L'équimultiplicité des polaires relatives de f équivaut à la condition (w_f) si $f(X_0)$ est un point [H-M-S, (théorème 6.1, p. 262)], mais peut être strictement plus forte sinon, par exemple lorsque $f|_{X_0}$ est un morphisme fini.

Notons d_0 la dimension de X_0. Soit $x \in X_0$. D'après le théorème 4.2.1 le couple de strates (X_0, X_1) vérifie la condition (a_f) en x.

Premier cas. $f(X_0)=0$.

La dimension de la fibre en x de $T^*_{f|X_1}$ est inférieure ou égale à celle de $T^*_{f|X_0}$ soit $n-d_0$. Il s'ensuit que les variétés polaires relatives de $f|_{\overline{X_1}}$ définies par un sous espace V^k de codimension $k \leqq d_0$ sont vides.

Deuxième cas. $f(X_0)=\mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Comme (X_0, X_1) sont deux strates d'une stratification de Whitney, l'espace $\overline{T^*_{X_1}\mathbf{C}^n}|_{X_0}$ est équidimensionnel au dessus de X_0 (cf. [T]) et ses fibres sont de dimension au plus $n-1-d_0$.

$f|_{X_0}$ est une submersion sur $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, et la condition (a) est satisfaite par la paire (X_0, X_1). Donc, si R est la fibre en x de $\overline{T^*_{X_1}\mathbf{C}^n}$, la fibre en x de $\overline{T^*_{f|X_1}\mathbf{C}^n}$ est $R \oplus \mathbf{C}\, d_x f$. Par suite, si R est de dimension au plus $n-1-d_0$, l'espace $R+\mathbf{C}^*$ sera de dimension au plus $n-d_0$.

Les variétés polaires relatives $P_k(f_{\overline{X_1}}, V^k)$ sont donc vides au voisinage de x pour $k \leqq d_0$.

Fin de la démonstration. Supposons maintenant $k > d_0$. Soient V^k un sous-espace linéaire générique de codimension k et H un sous espace lisse général de codimension $k-d_0$ contenant X_0 et la direction V^k au voisinage de x. Nous avons:

$$\overline{(P_k(f|_{X_1}, V^k) \cap H) \cap X_1} = P_{d_0}(f|_{\overline{X_1 \cap H}}, V^k)$$

[H-M-S, preuve du lemme 4.4.4, p. 253].

Or la stratification $(X_\alpha \cap H)_{\alpha \in A}$ vérifie encore les conditions de Whitney au voisinage de x_0 [T] donc la condition de Thom; d'après ce que nous venons de voir, pour un sous espace linéaire de codimension $k-d_0$ passant par X_0 générique, $P_k(f|_{\overline{X_1}}, V^k) \cap H$ est vide. Il en résulte [H-M-S] que $P_k(f|_{\overline{X_1}}, V^k)$ est équimultiple le long de X_0. □

Remarque 4.3.3 Parusiński [Par] a prouvé le résultat précédent lorsque f est une fonction analytique sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

5 Formule de l'indice et multiplicités des variétés polaires

5.1 Variétés polaires absolues et relatives

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$, M un $\mathscr{D}_\Omega$ module holonome, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification de Whitney de Ω telle que $SS(M) \subset \bigcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha}\Omega$; nous notons m_α la multiplicité de $T^*_{X_\alpha}\Omega$ dans le cycle caractéristique de M ($\mathrm{Car}(M)=\sum_{\alpha\in A} m_\alpha T^*_{X_\alpha}\Omega$), d_α la dimension de X_α, χ_α la caractéristique d'Euler du complexe des solutions de M en un point de X_α.

Kashiwara [K4, pp. 123 et 124] a introduit les nombres d'Euler $\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\gamma})$ par récurrence décroissante sur la dimension de X_α en posant:

$\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\alpha})=1$, $\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\beta})=0$ si les strates X_α et X_β ne sont pas incidentes, et enfin:

$$\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\gamma})=\sum_{X_\alpha\prec X_\beta\preccurlyeq X_\gamma} \mathrm{Eu}(X_\beta, \overline{X_\gamma})\, c(X_\alpha, X_\beta)$$

où $c(X_\alpha, X_\beta)=\chi(B(x,\varepsilon)\cap X_\beta\cap H_\eta)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de l'intersection d'une boule centrée en $x\in X_\alpha$ de rayon ε assez petit, de la strate X_β, et d'un sous espace affine général de codimension $d_\alpha+1$, à la distance η de x ($\varepsilon\gg\eta>0$); $B(x,\varepsilon)\cap X_\beta\cap H_\eta$ est le «link» complexe de X_β en X_α en x [G-M2] et sa caractéristique est constante le long de X_α. Nous avons noté $X_\beta\precsim X_\gamma$ la relation d'incidence $X_\beta\subset\overline{X_\gamma}$ et $X_\beta\prec X_\gamma$ la relation d'incidence stricte $X_\beta\subset\overline{X_\gamma}$ et $X_\beta\neq X_\gamma$. Le théorème de l'indice s'énonce alors [K4, p. 126]:

$$\chi_\alpha=\sum_{X_\alpha\precsim X_\beta}(-1)^{n-d_\beta} m_\beta\, \mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\beta})$$

et la formule de l'indice inversée est:

$$m_\alpha=(-1)^{n-d_\alpha}\chi_\alpha+\sum_{X_\alpha\prec X_\beta}(-1)^{n-d_\alpha+1} c(X_\alpha, X_\beta)\,\chi_\beta\,.$$

Rappelons que, d'après Teissier, les multiplicités des variétés polaires absolues de $\overline{X_\beta}$ sont constantes le long de X_α; si $P_l(\overline{X_\beta}, V^{l+1})$ est la variété polaire de dimension l (relativement au sous espace linéaire générique de codimension $l+1$) nous notons $\nu_{\alpha,\beta,l}$ sa multiplicité en un point de X_α. Remarquons que si $X_\alpha\prec X_\beta$ sont deux strates incidentes, $\nu_{\alpha,\beta,l}=0$ pour $l\leqq d_\alpha$. D'après Dubson [D1, D2] les nombres d'Euler sont reliés aux multiplicités polaires par la formule:

$$\mathrm{Eu}(X_\alpha, \overline{X_\beta})=\sum_{k=d_\alpha+1}^{d_\beta}(-1)^{d_\beta-k}\nu_{\alpha,\beta,k}\,.$$

Nous supposons maintenant que $f\colon \Omega\to\mathbf{C}$ est un fonction holomorphe et que $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de Whitney de $f^{-1}(0)$; nous notons $p_x(k)$ la multiplicité en x de la variété polaire relative $P_k(f, V^k)$: nous savons en fait que cette multiplicité est constante le long de toute strate X_α (théorème 4.3.2) et nous notons $p(f,\alpha,k)$ cette valeur.

Proposition 5.1.1 *$p(f, \alpha, k)=0$ pour $k \leqq d_\alpha$, et pour $k > d_\alpha$:*

$$p(f, \alpha, k)=(-1)^{n-k}+\sum_{X_\alpha \prec X_\beta, k \leqq d_\beta} p(f, \beta, d_\beta+1)\left(\sum_{l=k}^{d_\beta}(-1)^{k-l} v_{\alpha,\beta,l}\right).$$

Cette formule permet de calculer les multiplicités des variétés polaires relatives en fonction des multiplicités des variétés polaires absolues le long des strates d'une stratification de Whitney de $f^{-1}(0)$.

Démonstration. On démontre cette formule en appliquant la formule de l'indice au $\mathscr{D}_\Omega$ module $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$, sachant que son cycle caractéristique est

$$\sum_{\alpha \in A} p(f, \alpha, d_\alpha+1)\, T^*_{X_\alpha}\Omega$$

d'après le par. 3; d'après le par. 1 l'indice des solutions en un point x de $f^{-1}(0)$ est égal à -1, d'où la formule pour $k=d_\alpha+1$.

Pour $k>d_\alpha+1$, on opère de la même manière après avoir coupé par un sous espace linéaire H assez général de codimension $k-1$, et en se restreignant à $\Omega \cap H$. □

La formule obtenue s'écrit également:

Proposition 5.1.2

$$p(f, \alpha, k)+p(f, \alpha, k+1)=\sum_{d_\beta \geqq k, X_\alpha \prec X_\beta} p(f, \beta, d_\beta+1)\, v_{\alpha,\beta,k}.$$

Remarque 5.1.3 Pour $k \geqq \dim(\mathrm{Sing}(f^{-1}(0))+1$ on trouve:

$$p(f, \alpha, k)=\mu_\alpha^{(n-k)}(f^{-1}(0))$$

nombre de Milnor en un point de X_α, de la section de $(f^{-1}(0))$ par un sous espace linéaire général de dimension $n-k$ passant par ce point.

5.2 Exemple

On suppose que le lieu singulier de $(f^{-1}(0))$ est une courbe Γ et on considère la stratification de Whitney de $(f^{-1}(0))$ au voisinage d'un point $x_0 \in \Gamma$ formée par les strates: $X_\alpha=\{x_0\}$; $(X_\beta)_{\beta \in B}$ les composantes de Γ privées de x_0, $X_\gamma=(f^{-1}(0))-\Gamma$. Le cycle caractéristique de $\mathcal{O}[1/f]/\mathcal{O}$ est au voisinage de x_0:

$$\mathrm{Car}\left(\frac{\mathcal{O}[1/f]}{\mathcal{O}}\right)=T^*_{f^{-1}(0)}\Omega+\sum_{\beta \in B}\mu_\beta^{(n-2)}\, T^*_{X_\beta}\Omega+p(f, x_0, 1)\, T^*_{x_0}\Omega$$

avec $p(f, x_0, 1)=\mu_{x_0}^{(n-1)}-\sum_{\beta \in B}\mu_\beta^{(n-1)} m_{x_0}(X_\beta)$ où $m_{x_0}(X_\beta)$ est la multiplicité à l'origine de la composante $\overline{X_\beta}$ de Γ.

On remarque en particulier que le conormal à $\{x_0\}$, $T^*_{x_0}\Omega$, n'est pas une composante de

$$W_0(f)=SS\left(\frac{\mathcal{O}[1/f]}{\mathcal{O}}\right)=f^{-1}(0)\cap T^*_f\Omega$$

si et seulement si $p(f, x_0, 1)=0$. Dans ce cas, on peut considérer $f^{-1}(0)$ comme une déformation d'hypersurfaces à «$\sum \mu_i$ constant» et le théorème de Lazzeri [L] implique que Γ est une courbe lisse en x_0 et que $f^{-1}(0)$ est une famille à nombre de Milnor constant le long de Γ. On vient donc de redémontrer que si $\Gamma=\mathrm{Sing}(f^{-1}(0))$ est une courbe, $W_0(f)$ contient le conormal à $\mathrm{Sing}(\Gamma)$ [B-L-M].

6 Applications

6.1 Intersections complètes à singularités isolées

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$: $(\mathbf{C}^n, 0)\to(\mathbf{C}^p, 0)$; on suppose que le lieu des zéros de $f_1, \ldots, f_{p-1}$ noté Z_{p-1} est à singularité isolée, ainsi que le lieu des zéros de $f_1, \ldots, f_p$ noté Z_p.

On note

$$M_{p-1}=R^{p-1}\Gamma_{Z_{p-1}}\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}=\frac{\mathcal{O}[1/f_1\ldots f_{p-1}]}{\sum_{j=1}^{p-1}\mathcal{O}[1/f_1\ldots\hat{f}_j\ldots f_{p-1}]}$$

et $M_p=R^p\Gamma_{Z_p}\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$; on a la suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}^n}$ modules au voisinage de 0:

$$0\to M_{p-1}\to M_{p-1}[1/f_p]\to M_p\to 0.$$

Par la formule de l'indice, la multiplicité du conormal à l'origine dans le cycle caractéristique de M_{p-1} (resp. M_p) est égale au nombre de Milnor de la section hyperplane générique de Z_{p-1} (resp. Z_p). D'autre part, d'après le théorème 3.4.2, la multiplicité de ce conormal dans le cycle caractéristique de $M_{p-1}[1/f_p]$ est égal à la multiplicité à l'origine de la courbe polaire de $(f_p)|_{Z_{p-1}}$. Si H est un hyperplan générique de $\mathbf{C}^n$ (d'équation $x_n=0$), on obtient la formule:

$$\mu(Z_{p-1}\cap H)+\mu(Z_p\cap H)=(P_1(f_p|_{Z_{p-1}}, V^1).H)=\mathrm{col}(f_1, \ldots, f_{p-1}, J_p^{n-1}, x_n)$$

où J_p^{n-1} est l'idéal engendré par les $p\times p$ mineurs extraits de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}.$$

C'est la formule de Greuel Lê pour la restriction à H du morphisme $f_1, \ldots, f_p$ [Gre, G-H, Le2, T2].

Considérons maintenant un cas encore plus particulier. Soit $f\colon \mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}, 0$ et l une forme linéaire sur $\mathbf{C}^n$; on a les suites exactes:

$$\begin{array}{c}
0 \to \dfrac{\mathcal{O}[1/f]}{\mathcal{O}} \to \dfrac{\mathcal{O}[1/f]}{\mathcal{O}}[1/l] \to \dfrac{\mathcal{O}[1/fl]}{\mathcal{O}[1/f]+\mathcal{O}[1/l]} \to 0 \\
\| \\
0 \to \dfrac{\mathcal{O}[1/l]}{\mathcal{O}} \to \dfrac{\mathcal{O}[1/l]}{\mathcal{O}}[1/f] \to \dfrac{\mathcal{O}[1/fl]}{\mathcal{O}[1/f]+\mathcal{O}[1/l]} \to 0.
\end{array}$$

A l'aide du théorème 3.4.2, on calcule la multiplicité du conormal à l'origine dans le cycle caractéristique de

$$\frac{\mathcal{O}[1/fl]}{\mathcal{O}[1/f]+\mathcal{O}[1/l]}$$

dans les deux suites exactes. En comparant les deux expressions de cette multiplicité, on retrouve la formule de la proposition 5.1.2 pour $k=1$ (on notera que la variété polaire relative d'une forme linéaire générale n'est autre que la variété polaire absolue).

Si $k>1$ il suffit de remplacer f par sa restriction à un sous espace linéaire de codimension $k-1$. Remarquons que la formule et sa démonstration restent valables même lorsque l n'est pas générale, mais simplement telle que sa restriction à $f^{-1}(0)$ est à singularité isolée.

6.2 *Cycles évanescents*

Toujours dans le cadre défini au 6.1, en utilisant de la même manière l'additivité des cycles caractéristiques dans le triangle

$$R\Gamma_Y(M)_{\mathrm{alg}} \leftarrow \Psi_f(M) \leftarrow \Phi_f(M),$$

on prouve la formule suivante, en prenant $M = M_{p-1}$, $f = f_p$ et $Y = Z_p$

$$\mu(Z_p \cap H) + \mu(Z_p) = (P_1(f_p|_{Z_{p-1}}, V^1) \cdot f_p^{-1}(0)) = \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_p, J_p^{n-1}).$$

C'est une formule du type Lê-Greuel [Gre, Le2], voir aussi Teissier à Cargèse [T2] et Giusti et Henry [G-H]. Les calculs permis par le théorème 3.4.2 généralisent donc les formules du type Lê-Greuel, valables pour les singularités isolées d'intersection complètes.

Références

[B1] Brylinski, J.L.: (Co)-Homologie d'intersection et faisceaux pervers. Sémin. Bourbaki **585** (1981–82)

[B2] Brylinski, J.L.: Modules holonomes à singularités régulières et filtrations de Hodge. Dans: Aroca, J.M. et al. (eds.) Actes de la Conférence sur les singularités de La Rábida. (Lect. Notes Math., vol. 961, pp. 1–21) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982

[B-B-D] Beilinson, A.A., Bernstein, J., Deligne, P.: Faisceaux Pervers. Astérisque **100** (1982)

[B-K] Brylinski, J.L., Kashiwara, M.: Kazhdan-Lustig conjecture and holonomic systems. Invent. Math. **64**, 387–410 (1981)

[B-L-M] Briançon, J., Laurent, Y., Maisonobe, Ph.: Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection. C.R. Acad Sci., Paris, Sér. I **313**, 285–288 (1991)

[B-S] Briançon, J., Speder, J.P.: La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney. Note au C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **280**, 365 (1975)

[D-K] Deligne, P., Katz, N.: Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique. (S.G.A. 71/2) (Lect. Notes Math., vol. 340) Berlin Heidelberg New York: Springer 1973

[D1] Dubson, A.S.: Calcul des invariants numériques des singularités et des applications. Prépublication S.Th. Math. Universität Bonn (1981)

[D2] Dubson, A.S.: Classes caractéristiques des variétés singulières. Note au C.R. Acad. Sci. **287**, 237 (1978)

[Gin] Ginsburg, V.: Characteristic varieties and vanishing cycles. Invent. Math. **84**, 327–402 (1986)

[G-H] Giusti, M., Henry, J.P.G.: Minorations de nombres de Milnor. Bull. Soc. Math. Fr. **108** (2) 279–282 (1980)

[G-M] Goresky, M., Macpherson, R.: Intersection homology theory 2. Invent. Math. **72** (1983)

[G-M2] Goresky, M., Macpherson, R.: Stratified Morse Theory. (Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Bd. 14) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988

[Gre] Greuel, G.M.: Der Gauss Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. Math. Ann. **214**, 235–266 (1975)

[H-M1] Henry, J.P., Merle, M.: Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires. Dans: Aroca, J.M. et al. (eds.) Actes de la Conférence sur les singularités de La Rábida. (Lect. Notes Math., vol. 961) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982

[H-M2] Henry, J.P., Merle, M.: Fronces et doubles plis. Prepublication du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique. (à paraître)

[H-M3] Henry, J.P., Merle, M.: Conormal space and jacobian module. A short dictionnary. Prepublication Université de Nice. (à paraître)

[H-M-S] Henry, J.P., Merle, M., Sabbah, C.: Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. IV. Sér. **17**, 227–268 (1984)

[K1] Kashiwara, M.: *B*. functions and Holonomic Systems. Invent. Math. **38**, 33–53 (1976)

[K2] Kashiwara, M.: On the Holonomic Systems of Linear Differential Equations. II. Invent. Math. **49** (1978)

[K3] Kashiwara, M.: Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations. In: Raynaud, M., Shioda, T. (eds.) Algebraic geometry. (Lect. Notes Math., vol. 1016, pp. 134–142) Berlin Heidelberg New York: Springer 1983

[K4] Kashiwara, M.: Systems of microdifferential equations. (Prog. Math., vol. 34) Boston: Birkhäuser 1983

[K5] Kashiwara, M.: The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20**, 319–365 (1984)

[K-S] Kashiwara, M., Schapira, P.: Sheaves on Manifolds. (Grundlehren Math. Wiss., Bd. 292) Berlin Heidelberg New York: Springer 1990

[Lau] Laurent, Y.: Vanishing cycles of $\mathscr{D}$ modules. Invent. Math. **112**, 491–539 (1993)

[L] Lazzeri, F.: A theorem on the monodromy of isolated singularities. Dans: Singularités à Cargèse. Astérisque **7–8**, 269–275 (1973)

[Le1] Lê, D.T.: Morsification of $\mathscr{D}$ modules. (Prépublication)

[Le2] Lê, D.T.: Le concept de singularité isolée d'une fonction analytique. Adv. Stud. Pure Math. **8**, 215–227 (1986)

[Le3] Lê, D.T.: Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète. Funkts. Anal. Prilozh. **8** (2), 45–52 (1974)

[L-M] Lê, D.T., Mebkhout, Z.: Variétés caractéristiques et variétés polaires. C.R. Acad. Sci., Paris **296** (17 janvier 1983)

[L-R] Lê, D.T., Ramanujam, C.P.: The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type. Am. J. Math. **98** (n° 1), 67–78 (1976)

[L-T] Lê, D.T., Teissier, B.: Limites d'espaces tangents en géométrique analytique. Comment. Math. Helv. **63**, 540–578 (1988)

[Mal] Malgrange, B.: Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente. Astérisque **101–102**, 233–267 (1983)

[Meb1] Mebkhout, Z.: Le formalisme des 6 opérations de Grothendieck pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents. Trav. Cours. **35**, Hermann (1989)

[Meb2] Mebkhout, Z.: Une équivalence de catégorie et une autre équivalence de catégorie. Compos. Math. **51**, 51–88 (1984)

[Meb3] Mebkhout, Z.: Local cohomology of analytic spaces. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12**, 247–256 (1977)

[M-N] Mebkhout, Z., Narvaez, L.: Le théorème de constructibilité de Kashiwara. Dans: Eléments sur les systèmes différentiels. Cours du C.I.M.P.A. Trav. Cours. **46**, Hermann (1993)

[Par] Parusiński, A.: Limits of tangent spaces to fibres and the w_f condition. University of Georgia, Athens, USA (Preprint 1992 Duke Math. J.); (à paraître)

[S1] Sabbah, C.: $\mathscr{D}$ modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara). Dans: Aroca, J.M. et al. (eds.) Conférence de La Rábida 1984, vol. 3, pp. 53–98. Paris: Hermann 1987

[S2] Sabbah, C.: Quelques Remarques sur la Géométrie des Espaces Conormaux dans Systèmes Différentiels et Singularités. Astérisque **130** (1985)

[T1] Teissier, B.: Variétés polaires: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney. Dans: Aroca, J.M. et al. (eds.) Actes de la conférence de géométrie algébrique. La Rábida 1981. (Lect. Notes Math., vol. 961, pp. 314–391) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982

[T2] Teissier, B.: Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Dans: Singularités à Cargèse. Astérisque **7–8**, 285–362 (1973)