Invent. math. 115, 513–538 (1994)

Inventiones mathematicae

Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis

Vincent Franjou[1], **Jean Lannes**[2], **Lionel Schwartz**[3]

[1] Université Paris-Sud, URA 1169, Bât. 425, F-91405 Orsay, France
[2] Ecole Polytechnique, URA 0196, F-91128 Palaiseau cedex, France; et Université Paris VII, URA 212, Tour 45-55, 2 place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05, France
[3] Université Paris-Nord, URA 742, Institut Galilée, F-93430 Villetaneuse, France; et Université Paris-Sud, URA 1169, Bât. 425, F-91405 Orsay, France

Oblatum 28-XI-1992 & 3-IX-1993

Summary. A new way of computing MacLane cohomology of finite fields is described. Closely related to this theory are L. Breen's "extensions du groupe additif" and M. Bökstedt's topological Hochschild homology (and so is stable K-theory, hence). Our approach makes essential use of a cancellation result for MacLane cohomology of $\mathbb{F}_p$ with coefficients in the symmetric algebra where the Frobenius has been inverted. We then proceed through an analysis of the Koszul complex and the De Rham complex in non-zero characteristic.

Résumé. Nous décrivons une nouvelle méthode de calcul de la cohomologie de MacLane des corps finis. Cette théorie est intimement reliée aux extensions du groupe additif déjà étudiées par L. Breen et à l'homologie de Hochschild topologique de M. Bökstedt (et donc à la K-théorie stable). Notre approche utilise de manière cruciale l'annulation de la cohomologie de MacLane du corps $\mathbb{F}_p$, avec pour coefficients l'algèbre symétrique où l'on a inversé le Frobenius. Nous recourons alors à l'analyse des complexes de Koszul et de De Rham en caractéristique non nulle.

0 Introduction

MacLane propose dans [ML] une définition pour l'homologie et la cohomologie d'un anneau à coefficients dans un bimodule. Cette définition fait suite aux travaux d'Eilenberg et MacLane sur l'homologie des espaces qui portent leur nom (voir [E-ML1] et [E-ML2]).

Dans un travail récent [J-P], Jibladze et Pirashvili définissent l'homologie et la cohomologie de MacLane d'un anneau R avec des coefficients plus généraux. Ils procèdent de la façon suivante. Soit $\mathscr{F}(R)$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de la catégorie des R-modules libres de type fini vers la catégorie de tous les R-modules, et soit $\mathscr{A}(R)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}(R)$ dont les objets sont les foncteurs additifs; on observe que $\mathscr{A}(R)$ s'identifie à la catégorie des R-bimodules (ou, ce qui revient au même, à la catégorie des $R \otimes R^{op}$-modules): tout foncteur additif est de la forme $M \bigotimes_R -$ avec M un R-bimodule. Soient Ad: $\mathscr{F}(R) \to \mathscr{A}(R)$ le foncteur «additivisation», c'est-à-dire l'adjoint à gauche du foncteur oubli $\mathscr{A}(R) \to \mathscr{F}(R)$, et I le foncteur inclusion de la catégorie des R-modules libres de type fini dans la catégorie de tous les R-modules (I est donc le foncteur additif correspondant au R-bimodule R); Jibladze et Pirashvili définissent les groupes d'homologie de MacLane $\mathrm{HML}_k(R; F)$ de R à coefficients dans un foncteur F comme les dérivés à gauche $L_k(R \bigotimes_{R \otimes R^{op}} \mathrm{Ad}(F))$, et les groupes de cohomologie de MacLane par:

$$\mathrm{HML}^k(R; F) = \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}(R)}(I, F).$$

En faisant $F = I$ on obtient l'homologie et la cohomologie de MacLane de l'anneau R que l'on note simplement $\mathrm{HML}_*(R)$ et $\mathrm{HML}^*(R)$.

L'un des buts de notre article est de décrire un calcul de la cohomologie de MacLane des corps finis. Le résultat s'énonce ainsi:

Théorème 0.1 *La cohomologie de MacLane d'un corps fini $\mathbb{F}$ est donnée par*:

$$\mathrm{HML}^k(\mathbb{F}) \cong \begin{cases} \mathbb{F} & \textit{pour k pair} \\ 0 & \textit{pour k impair.} \end{cases}$$

Ce résultat apparaît dans divers contextes. Notamment:

1) Homologie de Hochschild topologique [Bö 1, Bö 2, P-W].

Bökstedt définit pour tout anneau R un spectre $THH(R)$ (qui se trouve être un spectre d'Eilenberg-MacLane) et détermine ses groupes d'homotopie pour $R = \mathbb{F}_p$ et $R = \mathbb{Z}$ [Bö 1, Bö 2]. Très grossièrement, $THH(R)$ est obtenu en remplaçant, dans le complexe de Hochschild, l'anneau R par le spectre d'Eilenberg-MacLane $H(R)$ et le produit tensoriel par le smash-produit. Pirashvili et Waldhausen ont montré ensuite [P-W] qu'il existait un isomorphisme naturel:

$$\pi_k\, THH(R) \cong \mathrm{HML}_k(R).$$

Comme le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{HML}^k(\mathbb{F}_p)$ est juste le dual de $\mathrm{HML}_k(\mathbb{F}_p)$, les calculs de Bökstedt conduisent au théorème 0.1 pour $\mathbb{F}_p$. La généralisation à tous les corps finis est immédiate.

Signalons au lecteur qu'il trouvera exposée dans [P-W] la relation entre homologie de MacLane et K-théorie.

2) Extensions du groupe additif [B 1].

Soit $\mathscr{G}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres commutatives vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Le foncteur oubli est un tel foncteur; on le note G_a (pour groupe additif). Dans les années soixante-dix, Lawrence Breen a déterminé les groupes $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$. Ces groupes sont reliés à la cohomologie de MacLane par la proposition 0.2 ci-dessous.

On note S_n le foncteur qui associe à un espace vectoriel sa n-ième puissance tensorielle symétrique ($S_n(V)$ est le quotient de l'action du groupe symétrique d'ordre n sur $V^{\otimes n}$ par permutation des facteurs).

Proposition 0.2 *Il existe un isomorphisme canonique*:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{G}}(G_a, G_a) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{HML}^*(\mathbb{F}_p; S_n).$$

(La preuve de cette proposition utilise simplement que le foncteur G_a admet pour adjoint à gauche le foncteur algèbre symétrique.)

Les calculs de Breen conduisent donc eux-aussi au théorème 0.1 (observer que S_1 est dans 0.2 un avatar de I).

Notre approche du théorème 0.1 est très différente de celles de [B1] et [Bö2]. Elle est basée sur les deux lemmes 0.3 et 0.4 ci-après.

Le premier lemme est dû à Kuhn [K] et a pour origine la relation mise en évidence dans [H-L-S, Part I] entre la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p et la catégorie $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{F}_p)$. On en trouvera deux démonstrations en appendice.

Soit Φ: $S_{p^h} V \to S_{p^{h+1}} V$ l'application puissance p-ième (on considère ici $S_n V$ comme le sous-espace de l'algèbre symétrique sur V formé des polynômes homogènes de degré n). Le lemme montre que la limite inductive du système $\{S_{p^h}, \Phi; h\in\mathbb{N}\}$ n'est pas très loin d'être un objet injectif de $\mathscr{F}$.

Lemme 0.3 *Pour tout foncteur F de $\mathscr{F}$ admettant une résolution projective de type fini* (terminologie fixée au premier paragraphe) *et tout entier k non nul, la limite inductive du système*

$$\dots \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^{h+1}}) \xrightarrow{\Phi_*} \dots$$

est nulle.

Le lemme 0.3 pour $F = I$ se traduit dans le contexte des extensions du groupe additif par l'annulation du localisé $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)[\Phi^{-1}]$, Φ désignant cette fois l'endomorphisme de Frobenius de G_a. Ce résultat avait semblé suffisamment important à Breen pour qu'il lui consacre un article séparé [B2], où il n'utilise qu'une partie de la machinerie de [B1]. En effet, c'est cette annulation qui est utilisée par Artin et Milne dans [A-M] et [Mn].

Le second lemme que nous utilisons (plus immédiat que le premier) vient de [P; J-P, proposition 2.15].

Lemme 0.4 *Soient A, F et G trois foncteurs de $\mathscr{F}$; on suppose que A est additif, et que F et G sont sans terme constant (c'est-à-dire que $F(0)$ et $G(0)$ sont nuls). Alors, pour tout entier k*:

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(A, F \otimes G) = 0.$$

Notre démonstration du théorème 0.1 pour $\mathbb{F}_p$ consiste alors à exhiber des complexes dans $\mathscr{F}$ impliquant la transformation Φ: $S_{p^h} \to S_{p^{h+1}}$ et des produits tensoriels de foncteurs sans terme constant, puis à mettre en œuvre les lemmes 0.3 et 0.4. Pour $p = 2$ (le cas le plus facile, comme dans [B1] et [Bö1]), on a, par exemple, une suite exacte dans $\mathscr{F}$ de la forme:

$$\text{(E)} \qquad 0 \to S_{2^{h-1}} \xrightarrow{\Phi} S_{2^h} \to S_{2^h-1} \otimes S_1 \to \dots S_{2^h-i} \otimes S_i \to \dots S_{2^h} \to 0.$$

Le lemme 0.4 donne alors une longue suite exacte:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k-2^h}(I, S_{2^h}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k}(I, S_{2^{h-1}}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k}(I, S_{2^h}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k-2^h+1}(I, S_{2^h}) \to \ldots,$$

et, à l'aide du lemme 0.3, on obtient par récurrence descendante sur h:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k}(I, S_{2^h}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } k \text{ est multiple de } 2^{h+1} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui est le résultat de Breen (observer que 0.4 implique aisément l'annulation de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k}(I, S_n)$ quand n n'est pas une puissance de 2).

Pour $p > 2$ l'intervention de (E) est remplacée par celle des complexes de De Rham et de Koszul (en fait, pour $p = 2$ la suite exacte (E) provient du complexe de De Rham des formes différentielles antisymétriques alors que le complexe de De Rham habituel est celui des formes différentielles alternées).

Signalons pour terminer cette introduction que notre travail permet de régler deux questions restées en suspens dans [B1]. En effet, la démonstration que nous donnons du théorème 0.1 fournit le produit de Yoneda sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{*}(I, I)$. Il est facile d'en déduire le produit de Yoneda sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}^{*}(G_a, G_a)$ qui est bien en accord avec la conjecture faite par Breen dans [B1]. On peut alors, toujours en suivant Breen, déterminer les extensions du groupe additif dans la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres commutatives vers la catégorie de tous les groupes abéliens.

1 La catégorie $\mathscr{F}$

On fixe un nombre premier p. Soit $\mathscr{V}_f$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{V}$ la catégorie de tous les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. On désigne par $\mathscr{F}$ la catégorie des foncteurs covariants de $\mathscr{V}_f$ vers $\mathscr{V}$. Les morphismes sont les transformations naturelles; les $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(F, G)$ sont bien des ensembles puisque la catégorie $\mathscr{V}_f$ a un petit squelette (par exemple, la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $(\mathbb{F}_p)^n$).

On dispose dans $\mathscr{F}$, comme dans $\mathscr{V}$, de suffisamment de projectifs et d'injectifs, ce qui nous permet d'y faire de l'algèbre homologique ordinaire. Explicitement, la formule:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E, -)], F) = F(E)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(F, \mathbb{F}_p^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(-, E)}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(F(E), \mathbb{F}_p)$) montre que les foncteurs $\mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E, -)]$ (resp. $\mathbb{F}_p^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(-, E)}$) fournissent un système de générateurs projectifs (resp. cogénérateurs injectifs) dans $\mathscr{F}$.

Notation. Dans la suite, on notera respectivement P_E et J_E les foncteurs $\mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E, -)]$ et $\mathbb{F}_p^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(-, E)}$.

Définition 1.1 Un foncteur de $\mathscr{F}$ est dit *de type fini* s'il est quotient d'une somme directe finie de générateurs projectifs P_E.

Nous ne savons pas si un sous-foncteur d'un foncteur de type fini est encore de type fini, ou, ce qui revient au même, si un foncteur de type fini admet une résolution projective de type fini (on entend par là de type fini en chaque degré).

Définition 1.2 On dit qu'un foncteur de $\mathcal{F}$ est *engendré en dimension finie* (resp. *en dimension n*) s'il existe un espace vectoriel E de dimension finie (resp. de dimension n) tel que le morphisme canonique $F(E)\otimes P_E \to F$ est un épimorphisme.

Il est clair qu'un foncteur de type fini est engendré en dimension finie. Réciproquement:

Proposition 1.3 *Un foncteur de $\mathcal{F}$ est de type fini si et seulement si il est engendré en dimension finie et prend des valeurs de dimension finie.*

Exemples. On note I le foncteur inclusion de $\mathcal{V}_f$ dans $\mathcal{V}$. Pour tout entier n, on note $\Lambda^n V$ la puissance extérieure n-ième sur V et $S_n V$ la composante de degré n de l'algèbre symétrique sur V, à savoir les coïnvariants $(V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui permute les facteurs de $V^{\otimes n}$. On définit de même $S^n V$ comme les invariants $(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$.

Tous ces foncteurs, et en particulier le foncteur I, admettent des résolutions de type fini: ceci sera démontré au par. 10.

L'élévation à la puissance p-ième de S_n dans S_{pn} est un exemple de morphisme de $\mathcal{F}$; ces morphismes seront notés Φ et appelés transformation de Frobenius.

Notre première tâche est d'établir l'énoncé 0.4, que nous rappelons ci-dessous (comparer avec [D-P, Korollar 5.20]):

Lemme 0.4 [J-P, proposition 2.15] *Si A est un foncteur additif, et si F et G sont sans terme constant* (*c'est-à-dire* $F(0)=G(0)=0$), *alors, pour tout entier k*:

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{F}}(A, F\otimes G)=0.$$

Démonstration. La démonstration se fait par passage à la catégorie $bi-\mathcal{F}$ des foncteurs covariants de $\mathcal{V}_f\times\mathcal{V}_f$ vers $\mathcal{V}$. On dispose pour ce faire des foncteurs Δ et Π définis par:

$$\begin{array}{ll} \Delta: \mathcal{V}_f \to \mathcal{V}_f\times\mathcal{V}_f & \Pi: \mathcal{V}_f\times\mathcal{V}_f \to \mathcal{V}_f \\ U \mapsto (U,U) & (U,V)\mapsto U\oplus V. \end{array}$$

Le couple (Δ,Π) est un couple de foncteurs adjoints; nous entendons par là que Δ est adjoint à gauche de Π et que Π est adjoint à droite de Δ. Les compositions à droite avec Π et Δ forment de ce fait un couple de foncteurs adjoints entre $\mathcal{F}$ et $bi-\mathcal{F}$. Ces foncteurs sont de plus exacts.

On écrit alors: $F\otimes G=(F\boxtimes G)\circ\Delta$, $F\boxtimes G$ désignant le produit tensoriel extérieur de F par G:

$$(F\boxtimes G)(U,V)=F(U)\otimes G(V).$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{F}}(A, F\otimes G)&=\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{F}}(A,(F\boxtimes G)\circ\Delta)\\ &=\mathrm{Ext}^k_{bi-\mathcal{F}}(A\circ\Pi, F\boxtimes G).\end{aligned}$$

Le caractère additif de A se traduit par: $A \circ \Pi = A \circ \mathrm{pr}_1 \oplus A \circ \mathrm{pr}_2$, pr_1 et pr_2 désignant les foncteurs projection de $\mathscr{V}_f \times \mathscr{V}_f$ vers $\mathscr{V}_f$. On revient à la catégorie $\mathscr{F}$ en remarquant que la composition à droite par pr_i et la composition à droite par le foncteur «i-ième coordonnée» de $\mathscr{V}_f$ vers $\mathscr{V}_f \times \mathscr{V}_f$ forment un couple de foncteurs adjoints; d'où:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(A, F \otimes G) &= \mathrm{Ext}^k_{bi-\mathscr{F}}(A \circ \mathrm{pr}_1, F \boxtimes G) \oplus \mathrm{Ext}^k_{bi-\mathscr{F}}(A \circ \mathrm{pr}_2, F \boxtimes G) \\ &= \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(A, F \otimes G(0)) \oplus \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(A, F(0) \otimes G). \end{aligned}$$

Il est commode de disposer, à coté de la catégorie $\mathscr{F}$, de la «catégorie» $\hat{\mathscr{F}}$ des endofoncteurs de $\mathscr{V}$ (les guillemets sont l'amende à payer pour ne pas avoir pris les précautions ensemblistes habituelles). On note i le foncteur «extension» évident de $\mathscr{F}$ vers $\hat{\mathscr{F}}$: $(iF)(V)$ est la limite inductive des $F(W)$ quand W décrit les sous-espaces vectoriels finis de V. Comme i est exact et adjoint à gauche de la composition à droite par I, on a:

Proposition 1.4 *Pour tous foncteurs F dans $\mathscr{F}$ et F' dans $\hat{\mathscr{F}}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\hat{\mathscr{F}}}(iF, F') \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(F, F' \circ I).$$

En particulier, $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre pour le produit de Yoneda, à $\mathrm{Ext}_{\hat{\mathscr{F}}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$. Nous allons montrer maintenant que l'algèbre $\mathrm{Ext}_{\hat{\mathscr{F}}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ est commutative (au sens gradué).

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathscr{C} - \mathbb{F}_p$ la «catégorie» des foncteurs de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{V}$. Soit F un objet de $\mathscr{C} - \mathbb{F}_p$; la composition à droite par F induit une application de $\mathrm{Ext}^n_{\hat{\mathscr{F}}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ vers $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C} - \mathbb{F}_p}(F, F)$ que l'on note $- \circ F$.

Proposition 1.5 *Soient u un élément de* $\mathrm{Ext}^n_{\hat{\mathscr{F}}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ *et e un élément de* $\mathrm{Ext}^q_{\mathscr{C} - \mathbb{F}_p}(F, F')$. *On a dans* $\mathrm{Ext}^{n+q}_{\mathscr{C} - \mathbb{F}_p}(F, F')$ *l'égalité*:

$$(u \circ F') \smile e = (-1)^{nq} e \smile (u \circ F)$$

(le signe $\smile$ désigne le produit de Yoneda).

Démonstration. Il est clair que l'on peut se ramener au cas $q = 1$. On représente u et e par des extensions $0 \to \mathrm{Id} \to U^0 \to \ldots \to U^{n-1} \to \mathrm{Id} \to 0$ et $0 \to F' \to E \to F \to 0$, et on considère les trois bicomplexes du premier quadrant C_0, C_1 et C_2 suivants:

$$\begin{array}{ccccccc} U^0 \circ F & \to & U^1 \circ F & \to \ldots \to & U^{n-1} \circ F & \to & F \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U^0 \circ E & \to & U^1 \circ E & \to \ldots \to & U^{n-1} \circ E & \to & E \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & 0 & \to \ldots \to & 0 & \to & F \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U^0 \circ F' & \to & U^1 \circ F' & \to \ldots \to & U^{n-1} \circ F' & \to & E \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} U^0 \circ F & \to & U^1 \circ F & \to \ldots \to & U^{n-1} \circ F & \to & F \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ E & \to & 0 & \to \ldots \to & 0 & \to & 0; \end{array}$$

on note v_i: $C_i \to C_0$, $i = 1, 2$, les homomorphismes de bicomplexes évidents. Soit T_i, $i = 0, 1, 2$, le complexe total de C_i. La proposition résulte alors des points suivants:

– $\mathrm{H}^0 T_i = F'$, $\mathrm{H}^q T_i = 0$ pour $q > 0$, $T_i^{n+1} = F$, $T_i^r = 0$ pour $r > n+1$;
– v_i induit des isomorphismes $\mathrm{H}^0 T_i \cong \mathrm{H}^0 T_0$ et $T_i^{n+1} \cong T_0^{n+1}$;
– l'extension $0 \to F' \to T_i^0 \to T_i^1 \to \ldots \to T_i^n \to F \to 0$ représente $(-1)^n(u \circ F') \smile e$ pour $i = 1$, et $e \smile (u \circ F)$ pour $i = 2$.

Corollaire 1.6 *L'algèbre graduée* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ *est commutative.*

2 Calcul de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ pour $p = 2$

Nous avons déjà expliqué dans l'introduction notre méthode de calcul des groupes $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$. Avant de développer le cas général (ceci sera fait au par. 6), nous présentons dans le cas $p = 2$ une variante plus simple utilisant les mêmes ingrédients.

On considère le foncteur bigradué $S \otimes S = \{S_i \otimes S_j\}_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$. On définit sur $S \otimes S$ une différentielle d par la composition suivante:

$$d\colon\; S_i \otimes S_j \to (S_{i-1} \otimes S_1) \otimes S_j = S_{i-1} \otimes (S_1 \otimes S_j) \to S_{i-1} \otimes S_{j+1},$$

où les flèches de gauche et de droite sont respectivement induites par le coproduit et le produit de l'algèbre symétrique. Comme on est en caractéristique 2, d est bien de carré nul.

On note C^i la somme $\bigoplus_n S_{n-i} \otimes S_i$ et on considère le complexe:

$$C^0 \xrightarrow{d} C^1 \xrightarrow{d} \ldots C^i \xrightarrow{d} \ldots$$

(il faut voir $(C^\bullet, d)$ comme le complexe de De Rham des formes différentielles antisymétriques). L'homologie de ce complexe est facile à déterminer, parce qu'on dispose d'un isomorphisme naturel de complexes: $C^\bullet(V \oplus W) \cong C^\bullet(V) \otimes C^\bullet(W)$ qui permet de se ramener au cas d'un espace vectoriel de dimension un. En particulier, on obtient des suites exactes dans $\mathscr{F}$:

$$\text{(E)} \qquad 0 \to S_{2^{h-1}} \xrightarrow{\Phi} S_{2^h} \xrightarrow{d} S_{2^h-1} \otimes S_1 \ldots \xrightarrow{d} S_{2^h-i} \otimes S_i \ldots \to S_{2^h} \to 0$$

(on observera que l'exactitude en début de (E) signifie qu'un polynôme est un carré si et seulement si sa différentielle est nulle). A cause du lemme 0.4, les suites exactes (E) induisent des longues suites exactes:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k-2^h}(I, S_{2^h}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^{h-1}}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^h}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{k-2^h+1}(I, S_{2^h}) \to \ldots .$$

Celles-ci, et le lemme 0.3, permettent de montrer par récurrence descendante sur l'entier h que l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^h})$ est de dimension un si k est multiple de 2^{h+1} et qu'il est nul sinon. Voici comment procéder. On observe tout d'abord que l'application $\Phi_*\colon \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^{h-1}}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^h})$ est injective pour $k < 2^h$, si bien que le lemme 0.3 implique: $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^h}) = 0$ pour $0 < k < 2^{h+1}$. On montre ensuite que $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^k(I, S_{2^h})$ est nul si k n'est pas un multiple de 2^{h+1}. Soit A un entier positif fixé; on montre en fait, par récurrence descendante sur h, que $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h})$ est nul pour $k \leqq A$ et k non multiple de 2^{h+1}. Ce qui précède montre en particulier que les longues suites exactes (E) se coupent en suites exactes courtes:

$$0 \to \mathrm{Ext}^{k-2^h}_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h}) \to \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h-1}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h}) \to 0.$$

Ces suites exactes, l'annulation des $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h})$ pour k fixé et h grand, et l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(I, I) \cong \mathbb{F}_2$ montrent enfin que la série de Poincaré des $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{2^h})$ est bien celle annoncée.

3 Les complexes de De Rham et de Koszul

On considère ici les foncteurs $\Omega^i_n := S_{n-i} \otimes \Lambda^i$. Dans cette notation, on appellera *degré* l'entier i, et *degré total* l'entier n. On note Ω^i la somme $\bigoplus_n \Omega^i_n$; Ω est une algèbre commutative (au sens gradué, pour le degré). On la munit classiquement de deux différentielles, la différentielle de De Rham, notée d, et la différentielle de Koszul, notée κ; d est de degré 1 et κ de degré -1. On peut encore les définir à partir des produits et coproduits, comme suit:

$$d\colon\ S_j \otimes \Lambda^i \to S_{j-1} \otimes S_1 \otimes \Lambda^i = S_{j-1} \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^i \to S_{j-1} \otimes \Lambda^{i+1}$$
$$\kappa\colon\ S_j \otimes \Lambda^i \to S_j \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^{i-1} = S_j \otimes S_1 \otimes \Lambda^{i-1} \to S_{j+1} \otimes \Lambda^{i-1}.$$

Elles respectent le degré total, on peut donc considérer les complexes $(\Omega^\bullet_n, d)$ et $(\Omega^\bullet_n, \kappa)$. Rappelons que κ est l'unique dérivation de degré -1 sur $\Omega(V)$ telle que $\kappa(dx) = x$ pour tout x de V.

Proposition 3.1 (formule d'Euler) *Le commutant $d\kappa + \kappa d$ est la multiplication par le degré total.*

Démonstration. Comme $d\kappa + \kappa d$ est une dérivation, une vérification en degré total un suffit. Quand le degré est nul, on trouve la formule d'Euler pour les polynômes homogènes.

Remarque. Quand p ne divise pas n, on obtient ainsi une homotopie à zéro du complexe de De Rham $(\Omega^\bullet_n, d)$ ou du complexe de Koszul $(\Omega^\bullet_n, k)$.

En fait:

Proposition 3.2 *Le complexe de Koszul $(\Omega^\bullet, \kappa)$ est acyclique.*

Le complexe de De Rham, lui, n'est pas acyclique en caractéristique non nulle.

Proposition 3.3 [Ct] *Pour chaque entier n, il existe un isomorphisme (isomorphisme de Cartier):*

$$\Omega_n \cong \mathrm{H}(\Omega^\bullet_{pn}, d).$$

Démonstration. Les applications linéaires de $\Omega^0_1(V)$ dans $\mathrm{H}^0(\Omega^\bullet_p(V), d)$ et de $\Omega^1_1(V)$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega^\bullet_p(V), d)$ qui associent respectivement la classe de x^p à x et la classe de $x^{p-1}dx$ à dx se prolongent en une application d'algèbre de $\Omega(V)$ dans $\mathrm{H}(\Omega^\bullet(V), d)$, qui multiplie le degré total par p.

Pour montrer que l'on obtient ainsi un isomorphisme, il suffit de le vérifier quand V est de dimension 1, et d'utiliser comme au paragraphe précédent les isomorphismes naturels de complexes: $\Omega^\bullet(V \oplus W) \cong \Omega^\bullet(V) \otimes \Omega^\bullet(W)$.

A cause de la formule d'Euler (proposition 3.1), la différentielle de Koszul induit une différentielle sur $\mathrm{H}(\Omega^\bullet_{pn}, d)$. En utilisant que κ est une dérivation, que l'isomorphisme de Cartier est multiplicatif, et qu'on a: $\kappa(x^{p-1}dx) = x^p$, on obtient:

Proposition 3.4 *L'isomorphisme de Cartier est compatible aux différentielles de Koszul.*

On définit maintenant K^i_n, pour tous entiers n et i, comme noyau dans Ω^i_n de la différentielle de Koszul. Quand le degré total n est divisible par p, $(K^\bullet_n, d)$ est un sous-complexe du complexe de De Rham.

Proposition 3.5 *Pour chaque entier n, il existe un isomorphisme:*

$$K_n \cong \mathrm{H}(K^\bullet_{pn}, d)$$

compatible à l'isomorphisme de Cartier.

Démonstration. On raisonne sur les complexes de Koszul en tant que modules sur l'anneau $D := \mathbb{F}_p[X]/X^2$, où l'opération de X est donnée par κ. Prendre le noyau de κ, c'est calculer les applications D-linéaires de source $\mathbb{F}_p$, considéré comme un D-module via l'augmentation. L'acyclicité des complexes de Koszul $\Omega^\bullet$ et $\mathrm{H}(\Omega^\bullet, d)$ signifie que ce sont des D-modules libres, et donc injectifs. Avec ce formalisme, on a bien:

$$\mathrm{H}(K^\bullet, d) = \mathrm{H}(\mathrm{Hom}_D(\mathbb{F}_p, \Omega^\bullet)) = \mathrm{Hom}_D(\mathbb{F}_p, \mathrm{H}(\Omega^\bullet, d)).$$

4 Des isomorphismes de décalage

Les suites exactes courtes

$$0 \to K^i_n \hookrightarrow \Omega^i_n \xrightarrow{\kappa} K^{i-1}_n \to 0$$

et le lemme 0.4 impliquent:

Proposition 4.1 *Pour tous entiers n et i, avec $0 \leqq i < n$, il existe des isomorphismes de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$-modules à droite:*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{F}}(I, S_n) \cong \mathrm{Ext}^{*+i}_{\mathscr{F}}(I, K^i_n) \cong \mathrm{Ext}^{*+n-1}_{\mathscr{F}}(I, \Lambda^n).$$

5 Hypercohomologie

Pour fixer les notations, nous rappelons dans ce paragraphe ce dont nous avons besoin du chap. XVII de Cartan et Eilenberg [C-E].

Soit C: $C^0 \to C^1 \to \dots C^i \to \dots$ un complexe d'une catégorie abélienne (avec assez d'injectifs) $\mathscr{A}$, et A un objet de $\mathscr{A}$. On considère une résolution injective du complexe C: c'est un bicomplexe du premier quadrant X avec une augmentation: $C^\bullet \to X^{\bullet,0}$, tel que pour chaque ligne p, $X^{p,\bullet}$ est une résolution injective de C^p et que, de plus, les cycles, les bords et la cohomologie de $X^{\bullet,q}$ par rapport à la première différentielle sont aussi des résolutions injectives. Si on applique à X le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -)$, on obtient un bicomplexe (de groupes abéliens). Les deux suites spectrales associées, $\{\mathbf{I}_r\}_{r \geqq 1}$ et $\{\mathbf{II}_r\}_{r \geqq 2}$, sont alors indépendantes du choix de la résolution injective X; elles sont obtenues en prenant l'homologie successivement suivant lignes et colonnes, et vice-versa; leurs termes initiaux sont de la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{s,t} &= \mathrm{Ext}^t_{\mathscr{A}}(A, C^s), \\ \text{et} \quad \mathbf{II}_2^{s,t} &= \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{A}}(A, \mathrm{H}^t(C^\bullet)) \end{aligned}$$

(notez que notre indexation de $\mathbf{II}$ diffère de [C-E], de manière à ce que les différentielles d_r soient dans les deux cas de bidegré $(r, 1-r)$). Ce sont des suites spectrales de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(A, A)$-modules à droite.

Comme le complexe C est nul en degrés strictement négatifs, ces deux suites spectrales ont pour aboutissement commun la cohomologie totale, que l'on note $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(A, C)$. On vérifie que la composition des homomorphismes de bord:

$$\mathbf{II}_2^{k,0} \to \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(A, C) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(A, C) \to \mathbf{I}_1^{0,k}$$

est l'application

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(A, \mathrm{H}^0(C^\bullet)) \to \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(A, C^0)$$

induite par l'inclusion de $\mathrm{H}^0(C^\bullet)$ dans C^0.

6 Calcul de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$

Nous calculons, en fait, les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n)$ pour tout n. On remarque d'abord que ces groupes sont nuls si i n'est pas une puissance de p; c'est une conséquence du lemme 0.4 et de la proposition suivante:

Proposition 6.1 *Si n n'est pas une puissance de p, alors S_n est facteur direct dans un produit tensoriel de foncteurs sans terme constant.*

Démonstration. Si n n'est pas une puissance de p, il existe deux entiers non nuls a et b de somme n tels que le groupe $\mathfrak{S}_a \times \mathfrak{S}_b$ est d'indice premier à p dans $\mathfrak{S}_n$, ce qui entraîne que S_n est facteur direct dans $S_a \otimes S_b$.

On est donc ramené au calcul des groupes $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$. On procède par récurrence descendante sur h en utilisant les complexes de De Rham (en degré total p^h) $\Omega^\bullet_{p^h}$ et $K^\bullet_{p^h}$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^\bullet_{p^h}\colon S_{p^h} \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & S_{p^h-1} \otimes \Lambda^1 \arrow[r] \arrow[dl, "\kappa"'] & \cdots \arrow[r] & S_1 \otimes \Lambda^{p^h-1} \arrow[r] \arrow[dll, "\kappa"'] & \Lambda^{p^h} \arrow[r] \arrow[dl, "\kappa"'] & 0 \\
K^\bullet_{p^h}\colon S_{p^h} \arrow[r, "d"'] & K^1_{p^h} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r] & K^{p^h-1}_{p^h} \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook, "\sim"'] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Nous commençons par étudier les grandes valeurs de h. Pour cela, on précise le passage à la limite du lemme 0.3 pour $F = I$:

Proposition 6.2 *La transformation de Frobenius Φ: $S_{p^{h-1}} \to S_{p^h}$ induit un isomorphisme*:

$$\Phi_*\colon \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k \leqq 2p^{h-1} - 2.$$

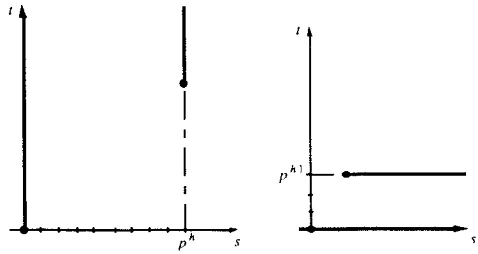
Corollaire 6.3 (i) *Les groupes* $\operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ *sont nuls pour* $0 < k \leqq 2p^h - 2$.
(ii) *Le* $\mathbb{F}_p$*-espace vectoriel* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ *est de dimension un, engendré par l'itérée de la transformation de Frobenius* Φ^h: $I \to S_{p^h}$.

Démonstration du corollaire. Le point (i) résulte de la proposition et du lemme 0.3 que l'on applique pour $F = I$ (qui admet bien une résolution de type fini d'après la proposition 10.1). La proposition montre aussi que Φ^h induit un isomorphisme de $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}}(I, I)$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$, ce qui donne le point (ii) (que l'on peut évidemment obtenir plus directement).

Démonstration de la proposition 6.2 Compte tenu du lemme 0.4 et des propositions 3.3 et 4.1, les termes initiaux des deux suites spectrales convergeant vers $\operatorname{Ext}_{\mathscr{F}}(I, \Omega_{p^h})$ prennent la forme suivante:

$$_{\Omega}\mathrm{I}_1^{s,t} = \begin{cases} \operatorname{Ext}^t_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) & \text{pour } s = 0 \\ \operatorname{Ext}^{t-p^h+1}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) & \text{pour } s = p^h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$_{\Omega}\mathrm{II}_2^{s,t} = \begin{cases} \operatorname{Ext}^s_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) & \text{pour } t = 0 \\ \operatorname{Ext}^{s-p^{h-1}+1}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) & \text{pour } t = p^{h-1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$_{\Omega}\mathrm{I}_1$ $\quad$ $_{\Omega}\mathrm{II}_2$

Les morphismes de bord considérés au paragraphe 5:

$$_{\Omega}\mathrm{II}_2^{k,0} \to \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, \Omega_{p^h}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, \Omega_{p^h}) \to {}_{\Omega}\mathrm{I}_1^{0,k}$$

sont des isomorphismes pour $k \leqq 2p^{h-1} - 2$; il en est de même pour leur composition:

$$\operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) \to \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}).$$

Nous ne pouvons poursuivre sans connaître la différentielle de $_{\Omega}\mathrm{II}$. Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons les deux suites spectrales associées au complexe

$(K^{\bullet}_{p^h}, d)$. Compte tenu des propositions 3.5 et 4.1, les termes initiaux prennent cette fois la forme suivante:

$$ {}_K\mathbf{I}_1^{s,t} = \begin{cases} \operatorname{Ext}^{t-s}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) & \text{pour } 0 \leqq s \leqq p^h - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} $$

$$ {}_K\mathbf{II}_2^{s,t} = \begin{cases} \operatorname{Ext}^{s-t}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) & \text{pour } 0 \leqq t \leqq p^{h-1} - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} $$

Proposition 6.4 *Les suites spectrales ${}_K\mathbf{I}$ et ${}_K\mathbf{II}$ dégénèrent en ${}_K\mathbf{I}_1$ et ${}_K\mathbf{II}_2$.*

Cette proposition est conséquence du lemme suivant, que l'on démontrera plus loin:

Lemme 6.5 *Pour tout entier h, $\operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ est nul si k est un entier impair.*

En effet, ce lemme montre que les termes de ${}_K\mathbf{I}_1$ et ${}_K\mathbf{II}_2$ en degré total impair sont alors nuls, ce qui exclut toute différentielle.

Notons $P_h(X)$ la série de Poincaré (à coefficients dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$):

$$ \sum_{k \geqq 0} \dim_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) X^k, $$

l'égalité des aboutissements des deux suites spectrales ${}_K\mathbf{I}$ et ${}_K\mathbf{II}$ fournit la relation:

$$ \sum_{\alpha=0}^{p^h-1} X^{2\alpha} P_h(X) = \sum_{\alpha=0}^{p^{h-1}-1} X^{2\alpha} P_{h-1}(X). $$

On en déduit que pour tout entier h:

$$ P_0(X) = \sum_{\alpha=0}^{p^h-1} X^{2\alpha} P_h(X). $$

Le corollaire 6.3 entraîne que la partie de $P_h(X)$ de degré inférieur à un entier N vaut 1 dès que $2p^h$ est plus grand que $N+2$. Il en résulte que $P_0(X)$ coïncide avec $\sum_{\alpha \geqq 0} X^{2\alpha}$ à tout ordre N, autrement dit ces séries sont égales. On en déduit:

Théorème 6.6 *Pour tout entier h, le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ est de dimension un si k est multiple de $2p^h$, et il est nul sinon.*

Démonstration du lemme 6.5 On fixe un entier A, et on montre par récurrence descendante sur h:

$$ (\mathscr{P}_A(h)) \qquad \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) = 0 \quad \text{pour } k \text{ impair et } k \leqq A. $$

D'après le corollaire 6.3(i), $(\mathscr{P}_A(h))$ est vrai dès que: $2p^h \geqq A+2$.

La suite spectrale ${}_K\mathbf{I}$ montre que la condition $(\mathscr{P}_A(h))$ implique:

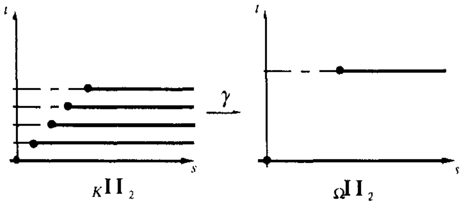
$$ \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, K_{p^h}) = 0 \quad \text{pour } k \text{ impair et } k \leqq A. $$

Pour montrer que $(\mathscr{P}_A(h))$ implique $(\mathscr{P}_A(h-1))$, on vérifie que $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}}) = {}_K\mathbf{II}_2^{s,0}$ s'injecte dans $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{F}}(I, K_{p^h})$, autrement dit que le terme ${}_K\mathbf{II}_2^{s,0}$ persiste à l'infini. Pour cela, on compare les suites spectrales ${}_K\mathbf{II}$ et ${}_\Omega\mathbf{II}$. L'inclusion:

$$K_{p^h} \hookrightarrow \Omega_{p^h}$$

induit un morphisme de suites spectrales

$$\gamma:\ {}_K\mathbf{II}_r^{s,t} \to {}_\Omega\mathbf{II}_r^{s,t}$$



On observe qu'au niveau des lignes $t=0$, $\gamma_2^{s,0}$ est l'identité de $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h-1}})$.

Il résulte de la nullité de ${}_\Omega\mathbf{II}_2^{s,t}$ pour $1 \leqq t \leqq p^{h-1}-1$ que la ligne $t=0$ de ${}_K\mathbf{II}_2$ persiste à l'infini. En effet, si $d_2 x \in {}_K\mathbf{II}_2^{s,0}$, on a $\gamma(x)=0$, d'où: $d_2\gamma(x) = \gamma(d_2 x) = 0$ et donc $d_2 x = 0$ puisque γ est l'identité sur $\mathbf{II}_2^{s,0}$. On raisonne de même, par récurrence sur r, pour les différentielles d_r.

7 Le produit de Yoneda sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$

On reprend l'étude des suites spectrales convergeant vers $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, \Omega_{p^{h+1}})$ comme suites spectrales de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$-modules à droite, afin de déterminer le produit de Yoneda dans $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$.

Il résulte des calculs qui précèdent que ${}_\Omega\mathbf{I}$ dégénère en ${}_\Omega\mathbf{I}_1$; quant aux différentielles de la suite spectrale ${}_\Omega\mathbf{II}$, elles sont toutes nulles, pour des raisons de degré, sauf une, à savoir la différentielle d_{p^h+1}; plus précisément:

Lemme 7.1 *La différentielle d_{p^h+1} de la suite spectrale ${}_\Omega\mathbf{II}$ est un isomorphisme de* $\mathrm{Ext}^{k-2p^h}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ *sur* $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ *quand le degré k n'est pas multiple de $2p^{h+1}$, elle est nulle sinon.*

Les suites spectrales ${}_\Omega\mathbf{I}$ et ${}_\Omega\mathbf{II}$ se réduisent donc à une suite exacte de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$-modules à droite:

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h+1}}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) \xrightarrow{d_{p^h+1}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h+1}}) \to 0.$$

On définit maintenant un générateur canonique dans $\mathrm{Ext}^{2p^h}_{\mathscr{F}}(I, I)$.

Proposition et définition 7.2 *Il existe une unique classe e_h dans* $\mathrm{Ext}^{2p^h}_{\mathscr{F}}(I, I)$ *telle que le produit de Yoneda à gauche par cette classe, $e_h \smile -$, rende commutatif le diagramme suivant:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) & \xrightarrow{e_h \smile -} & \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*^h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_*^h} \\
\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}) & \xrightarrow{d_{p^h+1}} & \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}).
\end{array}$$

Cette classe est non nulle.

Démonstration. Les applications du diagramme étant $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$-linéaires à droite, la classe e_h est nécessairement définie par: $d_{p^h+1}(\Phi^h) = \Phi_*^h(e_h)$. Elle est non nulle parce que, d'après le lemme 7.1, d_{p^h+1} n'est pas nulle pour le degré considéré.

On peut alors énoncer:

Théorème 7.3 *L'algèbre* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ *est une* $\mathbb{F}_p$*-algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes* e_h *définies ci-dessus et admet la présentation suivante*:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \cong \mathrm{Sym}(e_0, e_1, \ldots, e_h, \ldots)/\langle (e_h)^p; h \in \mathbb{N} \rangle$$

$\langle (e_h)^p; h \in \mathbb{N} \rangle$ *désignant l'idéal engendré par les puissances p-ièmes.*

Corollaire 7.4 *Pour tout entier h, le* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$*-module (à droite)* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ *est le quotient de* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ *par l'idéal (à gauche) engendré par les classes* e_i, $i < h$.

Démonstration. Nous savons déjà que l'algèbre $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ est commutative au sens gradué (corollaire 1.6); puisqu'elle est concentrée en degrés pairs, elle est commutative. Le lemme 7.1 et la proposition 7.2 montrent ensuite que le produit par la classe e_h est un isomorphisme de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{2p^h(k-1)}(I, I)$ sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}^{2p^h k}(I, I)$ quand p ne divise pas k, et qu'il est nul sinon. Il en résulte que les classes qui ne sont pas en degré $2p^h$, pour un entier h, sont décomposables, et que les classes $(e_h)^p$ sont nulles. On en déduit que les classes e_h engendrent $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$. Le théorème en résulte par un argument de dimension.

Remarques 7.5 On peut montrer que la classe e_0 est représentée par:

$$0 \to I \to S_p \xrightarrow{N} S^p \to I \to 0,$$

où N désigne la «norme». Si notre méthode permet d'expliciter un représentant pour $\Phi^h e_h$, nous ne possédons pas de représentant pour la classe e_h elle-même.

Signalons enfin que Smith [Sm] a montré que la sous-algèbre de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ engendrée par les classes e_i, $i < h$, est isomorphe à l'algèbre $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}_n}(I, I)$ des extensions entre foncteurs de degré $\leqq n$, pour $2p^{h-1} \leqq n < 2p^h$.

8 Extensions du groupe additif

Dans ce paragraphe, qui doit beaucoup à Breen, nous montrons que le calcul des $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n)$ effectué au par. 6 (voir aussi le par. 2 pour $p = 2$) est équivalent au calcul des extensions du groupe additif de [B1].

On note $\mathscr{R}$ la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres commutatives et $\mathscr{G}$ la «catégorie» des foncteurs covariants de $\mathscr{R}$ vers $\mathscr{V}$; on note G_a (pour groupe additif) le foncteur oubli de $\mathscr{R}$ vers $\mathscr{V}$.

On se convainc d'abord que les groupes d'extensions de [B1] ne sont autres que les $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}^k(G_a, G_a)$ et on vérifie ensuite la proposition suivante:

Proposition 8.1 *Il existe un isomorphisme canonique*:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n).$$

Démonstration. Notons Sym le foncteur algèbre symétrique de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{R}$, défini par: $\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n(V)$; on a donc: $G_a \circ \mathrm{Sym} \circ I = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Les foncteurs Sym et G_a forment un couple de foncteurs adjoints. Il en résulte que les compositions à droite par G_a et par Sym forment aussi un couple de foncteurs adjoints; ces foncteurs sont exacts. On en déduit un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(F \circ G_a, G) = \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(F, G \circ \mathrm{Sym}),$$

en particulier:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a) = \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(\mathrm{Id}, G_a \circ \mathrm{Sym}).$$

Et d'après la proposition 1.4:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(\mathrm{Id}, G_a \circ \mathrm{Sym}) = \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, G_a \circ \mathrm{Sym} \circ I).$$

Enfin, la proposition 10.1 nous assure que le foncteur I admet une résolution projective de type fini, ce qui entraîne:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n).$$

Remarques. 1) La composition de l'isomorphisme $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ et de l'application évidente $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ s'identifie à l'inclusion via l'isomorphisme de la proposition 8.1. On observe que cette application $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ préserve le produit de Yoneda. On identifiera $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ et son image dans $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$.
2) Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre. On note φ_R l'endomorphisme de Frobenius de R et Φ la transformation naturelle de G_a dans G_a défini par: $\Phi_R = G_a(\varphi_R)$. Le produit de Yoneda à gauche par Φ sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ correspond via l'isomorphisme de la proposition 8.1 aux applications $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{pn})$ induites par la transformation Φ: $S_n \to S_{pn}$.

Il résulte de la proposition 7.2 et du théorème 6.5 que les images de e_h par $(\Phi^h)_*$: $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$ et par $(\Phi^{h+1})_*$: $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^{h+1}})$ sont respectivement non nulle et nulle. Compte tenu de l'identification décidée au 1), ceci se traduit dans $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ par les relations $\Phi^h e_h \neq 0$ et $\Phi^{h+1} e_h = 0$.
3) On vérifie plus généralement que le produit de Yoneda de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ correspond via l'isomorphisme de la proposition 8.1 aux applications $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_m) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{mn})$ induites par:
– l'application $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_m) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(S_n, S_m \circ S_n)$ otenue par composition à droite avec S_n
– la transformation naturelle $S_m \circ S_n \to S_{mn}$
– le produit de Yoneda $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(S_n, S_{mn}) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{mn})$.
4) Les actions de Φ par produit de Yoneda à gauche et à droite sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ coïncident.

Il s'agit en fait d'un phénomène plus général. Pour tout foncteur G de $\mathscr{G}$, on dispose d'une transformation naturelle de G dans G, notée ${}_G\Phi$, définie par $({}_G\Phi)_R = G(\varphi_R)$. Soient maintenant deux foncteurs G et G' dans $\mathscr{G}$; les deux applications linéaires de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G, G')$ dans lui-même données respectivement par produit de Yoneda à gauche par ${}_{G'}\Phi$ et à droite par ${}_G\Phi$ coïncident. En effet, pour toute suite exacte dans $\mathscr{G}$:

$$0 \to G' \to E^0 \to \ldots \to E^{k-1} \to G \to 0,$$

on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] \arrow[d, "{}_{G'}\Phi"'] & E^0 \ldots \arrow[r] \arrow[d, "{}_{E^0}\Phi"'] & E^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "{}_{E^{k-1}}\Phi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "{}_G\Phi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & G' \arrow[r] & E^0 \ldots \arrow[r] & E^{k-1} \arrow[r] & G \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

5) Rappelons que $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_n)$ est nul si n n'est pas une puissance de p, si bien que la somme directe dans la proposition 8.1 se réduit à $\bigoplus_{h \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h})$.

Les remarques précédentes conduisent aux énoncés suivants:

Théoréme 8.2 *L'algèbre* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ *est une algèbre commutative qui admet la présentation suivante. Elle possède un générateur* Φ *en degré* 0 *et un générateur* e_h *en degré* $2p^h$ *pour chaque entier* h, *soumis aux relations*: $(e_h)^p = 0$, $\Phi^{h+1} e_h = 0$, $h \in \mathbb{N}$.

La détermination de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ comme $\mathbb{F}_p[\Phi]$-module se trouve dans [B1]. L'énoncé ci-dessus établit la conjecture qui y est émise quant à la structure d'algèbre de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$.

Scholie 8.3 *Le gradué de la filtration de l'algèbre* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ *par les idéaux* $\Phi^h \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, I)$ *est donné par*:

$$\Phi^h \mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)/\Phi^{h+1} \mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I, S_{p^h}).$$

La détermination des produits dans $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)$ permet de calculer par la méthode proposée dans [B1] les extensions du groupe additif dans la «catégorie» des foncteurs de $\mathscr{R}$ vers la catégorie de tous les groupes abéliens. C'est l'un des objets du prochain paragraphe.

9 Extensions de foncteurs en groupes abéliens

9.1 Suites exactes à la Bockstein

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathscr{C} - \mathbb{F}_p$ (resp. $\mathscr{C} - \mathbb{Z}$) la «catégorie» des foncteurs de $\mathscr{C}$ vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels (resp. de tous les groupes abéliens); on dispose d'un foncteur oubli de $\mathscr{C} - \mathbb{F}_p$ vers $\mathscr{C} - \mathbb{Z}$ que l'on note i. Soient F et F' deux foncteurs de $\mathscr{C} - \mathbb{F}_p$; les $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, iF')$ sont reliés aux $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, F')$ par l'énoncé 9.1 ci-dessous. Cette relation est bien connue dans le cas où $\mathscr{C}$ est «la» catégorie avec un seul objet et un seul morphisme. Soient en effet V et V' deux $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels et $0 \to iV' \to E \to iV \to 0$ une extension dans la catégorie des groupes abéliens. La multiplication par p de E dans E

induit un morphisme de V dans V'; l'application δ: $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(iV, iV') \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, V')$ ainsi obtenue est un isomorphisme.

Compte tenu de la proposition 1.4 et de la remarque 7.5, on note encore e_0 l'élément de $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ représenté par l'extension $0 \to \mathrm{Id} \to S_p \xrightarrow{N} S^p \to \mathrm{Id} \to 0$.

Proposition 9.1 *Il existe une longue suite exacte naturelle:*

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, iF') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, F') \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, F') \xrightarrow{i} \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, iF') \to \ldots$$

qui vérifie les propriétés suivantes.

(i) *Les applications δ, π, et i commutent au produit de Yoneda à droite par* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(-, F)$ *et au produit de Yoneda à gauche par* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F', -)$.

(Il s'agit de commutation au sens gradué si bien que la commutation de δ et du produit de Yoneda à gauche avec $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F', -)$ fait intervenir le signe $(-1)^k$.)

(ii) *L'application π est à la fois le produit de Yoneda à gauche par $e_0 \circ F'$ et le produit de Yoneda à droite par $e_0 \circ F$.*

(iii) *L'application δ:* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, iF') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, F')$ *est induite par le «produit», indexé par les objets c de $\mathscr{C}$, des applications δ:* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(iF(c), iF'(c)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(F(c), F'(c))$.

Démonstration. Soit E un objet de $\mathscr{C}-\mathbb{Z}$; on note respectivement $\underline{E}$ et $\bar{E}$ le noyau et le conoyau de la multiplication par p de E dans E; on les considère comme des objets de $\mathscr{C}-\mathbb{F}_p$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, -)$ est le composé du foncteur $E \mapsto \underline{E}$ et du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, -)$; la suite spectrale des foncteurs composés donne ici une longue suite exacte:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, E) \xrightarrow{\delta_E} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, \bar{E}) \xrightarrow{\pi_E} \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, \underline{E}) \to \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, E) \to \ldots$$

où π_E est le produit de Yoneda à gauche par un élément «canonique», disons η_E, de $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(\bar{E}, \underline{E})$. Cet élément η_E est caractérisé par la propriété suivante. Soit $0 \to E \to E^0 \to E^1 \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{C}-\mathbb{Z}$ telle que l'épimorphisme $\bar{E}^0 \to \bar{E}^1$ est un isomorphisme, alors η_E est la classe de l'extension $0 \to \underline{E} \to \underline{E}^0 \to \underline{E}^1 \to \bar{E} \to 0$. *Mutatis mutandis*, on obtient une longue suite exacte:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(E, iF') \xrightarrow{{}_E\delta} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(\underline{E}, F') \xrightarrow{{}_E\pi} \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(\bar{E}, F') \to \mathrm{Ext}^{n+2}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(E, iF') \to \ldots$$

où ${}_E\pi$ est cette fois le produit de Yoneda à droite par un élément ${}_E\eta$ de $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(\underline{E}, \bar{E})$ qui admet une caractérisation analogue à celle de η_E.

Nous explicitons maintenant $\eta_{iF'}$ et ${}_{iF}\eta$. Soit V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel; on note $X(V)$ le groupe abélien défini de la façon suivante ($X(V)$ est «une version additive des vecteurs de Witt de longueur deux»). L'ensemble sous-jacent à $X(V)$ est $V \times S_p V$ et la loi de groupe est donnée par:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y' - L(x, x')),$$

L désignant le polynôme $\frac{(T+T')^p - T^p - T'^p}{p}$ de $\mathbb{Z}[T,T']$. On a par construction une suite exacte naturelle: $0 \to S_p V \to X(V) \to V \to 0$. On dispose également d'une suite exacte naturelle: $0 \to V \to X(V) \to S^p V \to 0$ où $V \to X(V)$ (resp. $X(V) \to S^p V$) est le morphisme $x \mapsto (0, x^p)$ (resp. $(x,y) \mapsto N(y) - x^{\otimes p}$). On vérifie que $\underline{X}(V)$ et $\bar{X}(V)$ s'identifient respectivement à $S_p V$ et $S^p V$. La contemplation des suites exactes de $\mathscr{C}-\mathbb{Z}$: $0 \to iF' \to X \circ F' \to i(S^p \circ F') \to 0$ et $0 \to i(S_p \circ F) \to X \circ F \to iF \to 0$ montre alors $\eta_{iF'} = e_0 \circ F'$ et ${}_{iF}\eta = e_0 \circ F$.

A ce point de la démonstration nous savons grâce à la proposition 1.5 que les applications $\pi_{iF'}$ et ${}_{iF}\pi$ coïncident. Nous achevons en montrant qu'il en est de même pour les applications $(-1)^n \delta_{iF'}$ et ${}_{iF}\delta$, et en posant $\delta = {}_{iF}\delta$.

Pour $n=0$, ces applications coïncident parce qu'elles satisfont toutes deux la propriété (iii) («par naturalité en $\mathscr{C}$»). On se convainc ensuite qu'elles coïncident pour tout n en vérifiant qu'à F fixé (resp. F' fixé), les $\delta_{iF'}$ (resp. ${}_{iF}\delta$) sont compatibles avec les structures de ∂-foncteurs en F' (resp. en F) des $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{Z}}(iF, iF')$ et $\mathrm{Ext}_{\mathscr{C}-\mathbb{F}_p}(F, F')$.

9.2 *Calcul de* HML*$(\mathbb{Z};\mathbb{Z}/p)$

On spécialise 9.1 au cas $\mathscr{C} = \mathscr{V}_f$. On note encore I, par abus, le foncteur iI. Du fait de l'annulation de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I,I)$ en degrés impairs, la longue suite exacte de (9.1) se réduit en des suites exactes à quatre termes:

$$0 \to \mathrm{Ext}^{2k-1}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{2k-2}_{\mathscr{F}}(I,I) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ext}^{2k}_{\mathscr{F}}(I,I) \xrightarrow{i} \mathrm{Ext}^{2k}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I) \to 0;$$

les flèches δ, π et i sont des morphismes de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I,I)$-bimodules, et π est le produit par la classe e_0. Notons ξ la classe de $\mathrm{Ext}^{2p-1}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I)$ dont l'image par δ est $(e_0)^{p-1}$ (rappelons que $(e_0)^p$ est nul); ξ^2 est nul, puisque $\mathrm{Ext}^{4p-2}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I)$ est nul. En conclusion, $\mathrm{Ext}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I)$ est une algèbre commutative (au sens gradué ou non), et si l'on note $\Lambda(\xi)$ l'algèbre extérieure sur ξ, l'application canonique:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}}(I,I)/e_0 \otimes \Lambda(\xi) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I)$$

est un isomorphisme.

Il reste à expliquer le titre du sous-paragraphe. Un raisonnement formel d'adjonction montre d'abord que l'on a un isomorphisme: $\mathrm{Ext}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I,I) \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}b-\mathbb{Z}}(\mathrm{Id}, \mathbb{Z}/p \otimes -)$. On montre ensuite que l'on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}b-\mathbb{Z}}(\mathrm{Id}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}(\mathbb{Z})}(I, -)$. On utilise pour cela que le foncteur Id admet une résolution projective dans $\mathscr{A}b-\mathbb{Z}$ où n'apparaissent que des projectifs du type $\mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}b}(L,-)]$ avec L un groupe abélien libre de rang fini (voir [ML; J-P, théorème A]).

9.3 *Extensions du groupe additif dans la catégorie des foncteurs des $\mathbb{F}_p$-algèbres commutatives vers les groupes abéliens*

On spécialise 9.1 au cas où $\mathscr{C} = \mathscr{R}$. On note simplement G_a pour iG_a.

Comme au par. 8, on a: $\mathrm{Ext}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{V}_f-\mathbb{Z}}(I, S_n)$. On obtient à nouveau des suites exactes à quatre termes:

$$0 \to \mathrm{Ext}^{2k-1}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{2k-2}_{\mathscr{R}}(G_a, G_a) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ext}^{2k}_{\mathscr{R}}(G_a, G_a) \xrightarrow{i} \mathrm{Ext}^{2k}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a) \to 0;$$

On note w la classe de l'extension $0 \to G_a \to W_2 \to G_a \to 0$, W_2 désignant le groupe des vecteurs de Witt de longueur deux. La classe w correspond, via l'identification ci-dessus, à la classe de l'extension $0 \to S_2 \to X \to I \to 0$; son image par δ est l'endomorphisme de Frobenius Φ. La classe w^2 est nulle puisque $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a)$ est nul.

La sous-algèbre de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a)$ formée des éléments de degré pair est centrale et s'identifie au quotient $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)/e_0$. En tant que module sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{G}}(G_a, G_a)/e_0$, $\mathrm{Ext}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a)$ est la somme directe des sous-modules respectivement engendrés par 1, w et ξ; le sous-module engendré par 1 est libre, l'idéal annulateur de w est engendré par les $\Phi^h e_h$, $h \in \mathbb{N} - \{0\}$, et celui de ξ est engendré par Φ.

Pour achever la détermination du produit de Yoneda sur $\mathrm{Ext}_{\mathscr{R}-\mathbb{Z}}(G_a, G_a)$, il suffit de calculer les produits $w\xi$ et ξw. Si le produit ξw est nul, il semble que le produit $w\xi$ soit égal à Φe_1.

10 Les foncteurs polynomiaux prenant des valeurs de dimension finie ont des résolutions de type fini

Jibladze et Pirashvili observent dans [J-P] que la construction de MacLane [ML] fournit une résolution projective pour le foncteur I dans la catégorie $\mathscr{F}$. Par inspection, cette résolution est de type fini. Ce résultat de finitude est ici démontré sans faire appel à [ML]; il apparaît comme un cas particulier de la proposition suivante:

Proposition 10.1 *Tout foncteur polynomial prenant des valeurs de dimension finie admet dans la catégorie $\mathscr{F}$ une résolution projective de type fini.*

Rappelons d'abord ce que polynomial veut dire [E-ML2, II, § 9; Md; H-L-S].

Soient F un foncteur de $\mathscr{F}$ et V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. On note r_V la projection de $V \oplus \mathbb{F}_p$ sur V et $\Delta F(V)$ le noyau de $F(r_V)$; on a une décomposition en somme directe naturelle: $F(V \oplus \mathbb{F}_p) \cong F(V) \oplus \Delta F(V)$. Le foncteur ΔF s'appelle le foncteur différence de F. Le foncteur Δ: $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est exact. On note Δ^k le k-ième itéré de Δ.

Définition 10.2 Un foncteur F de $\mathscr{F}$ est dit *polynomial* s'il existe un entier d tel que $\Delta^{d+1} F$ est le foncteur nul. Le degré d'un foncteur polynomial F est le plus grand entier d tel que $\Delta^d F$ n'est pas le foncteur nul.

Exemples 10.3 – On a $\Delta \Lambda^n = \Lambda^{n-1}$, si bien que Λ^n est un foncteur polynomial de degré n.
– Pour un espace vectoriel de dimension finie E, on a:
$\mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E, V \oplus \mathbb{F}_p)] \simeq \mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E, V)] \otimes \mathbb{F}_p[E^*]$, si bien que le foncteur différence de P_E est une somme directe d'un nombre fini de copies de lui-même. En particulier, P_E n'est pas polynomial.

Au vu de la proposition 1.3, la proposition 10.1 découle de la proposition suivante:

Proposition 10.4 *Tout foncteur polynomial admet dans la catégorie $\mathscr{F}$ une résolution par des projectifs engendrés en dimension finie.*

Lemme 10.5 *Soit F un foncteur. Si son foncteur différence ΔF est engendré en dimension n, alors F est engendré en dimension $n+1$.*

Démonstration. Notons $\pi_{F,E}$ les transformations naturelles canoniques $F(E)\otimes P_E \to F$. On dispose d'un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} F(E\oplus \mathbb{F}_p)\otimes \Delta P_{E\oplus \mathbb{F}_p} \arrow[r, "\Delta(\pi_{F,E\oplus \mathbb{F}_p})"] & \Delta F \\ \Delta F(E)\otimes P_E \arrow[u, "i\otimes j"] \arrow[ur, "\pi_{\Delta F,E}"'] & \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion canonique $\Delta F(E)\to F(E\oplus \mathbb{F}_p)$ et où j correspond via la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(P_E, \Delta P_{E\oplus\mathbb{F}_p}) = \Delta P_{E\oplus\mathbb{F}_p}(E)$ et l'inclusion $\Delta P_{E\oplus\mathbb{F}_p}(E)\subset P_{E\oplus\mathbb{F}_p}(E\oplus\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(E\oplus\mathbb{F}_p, E\oplus\mathbb{F}_p)]$ à la différence formelle de l'identité et du projecteur sur E. On voit donc que si $\pi_{\Delta F,E}$ est un épimorphisme, il en est de même pour $\Delta(\pi_{F,E\oplus\mathbb{F}_p})$. Le conoyau de $\pi_{F,E\oplus\mathbb{F}_p}$ est alors un foncteur constant. Comme l'application $F(E\oplus\mathbb{F}_p)\otimes P_{E\oplus\mathbb{F}_p}(0)\to F(0)$ est surjective, ce conoyau est nul.

Scholie 10.6 *Tout foncteur dont la k-ième différence itérée est engendrée en dimension n est engendré en dimension $n+k$.*

Scholie 10.7 *Tout foncteur polynomial est engendré en dimension finie.*

On montre alors la proposition suivante, qui entraîne la proposition 10.4:

Proposition 10.8 *Tout foncteur engendré en dimension finie, et ayant une différence itérée projective admet une résolution par des projectifs engendrés en dimension finie.*

Démonstration. Supposons que F est un foncteur engendré en dimension n et que $\Delta^k F$ est projectif. Posons $E=(\mathbb{F}_p)^n$ et notons K le noyau de l'épimorphisme $\pi_{F,E}\colon F(E)\otimes P_E\to F$. Par exactitude de Δ et projectivité de $\Delta^k F$, $\Delta^k F$ est facteur direct dans $F(E)\otimes \Delta^k P_E$; c'est donc aussi le cas de $\Delta^k K$. Le foncteur $\Delta^k P_E$ est projectif, et engendré en dimension n (exemple 10.3). Il en résulte que $\Delta^k K$ a encore ces deux mêmes propriétés. Le scholie 10.6 montre alors que K est engendré en dimension $n+k$. Ceci permet de construire par récurrence la résolution projective cherchée.

11 Le cas d'un corps fini quelconque

Dans ce paragraphe, nous expliquons comment établir l'énoncé 0.1 pour tout corps fini quand on sait qu'il est vérifié pour les corps $\mathbb{F}_p$.

Posons $q=p^d$. Comme dans l'introduction, nous notons $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie de tous les $\mathbb{F}_q$-espaces vectoriels; nous notons I_q le foncteur inclusion. Un raisonnement formel d'adjonction nous donne:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)}(\mathbb{F}_q\otimes_{\mathbb{F}_p} I_q, I_q)\cong \mathbb{F}_q\otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Ext}_{\mathscr{F}(\mathbb{F}_p)}(I_p, I_p).$$

Soit φ le foncteur qui associe à un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel V le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel φV obtenu en faisant agir $\mathbb{F}_q$ sur V via l'endomorphisme de Frobenius $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $\lambda \mapsto \lambda^p$. Le foncteur $\mathbb{F}_q \otimes_{\mathbb{F}_p} I_q$ se décompose en:

$$\mathbb{F}_q \otimes_{\mathbb{F}_p} I_q \cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \varphi^i \circ I_q.$$

Il nous suffit donc de montrer que $\mathrm{Ext}_{\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)}(\varphi^i \circ I_q, I_q)$ est nul pour $0<i<d$. Désignons par $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)$ des foncteurs F tels que $F(\lambda . id_V) = \lambda^k . id_{F(V)}$ pour tout λ de $\mathbb{F}_q$ ($\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)_0$ est la catégorie des foncteurs constants). La catégorie $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)$ est équivalente (comme catégorie abélienne) au produit des catégories $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)_k$ pour $0 \leq k < q$. Or $\varphi^i \circ I_q$ est dans $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)_{p^{d-i}}$, alors que I_q est dans $\mathscr{F}(\mathbb{F}_q)_1$.

Appendice

L'objet de l'appendice est de démontrer le lemme 0.3 dont nous rappelons l'énoncé:

Lemme 0.3 *Pour tout foncteur F de $\mathscr{F}$ admettant une résolution projective de type fini et tout entier k non nul, la limite inductive du système*

$$\ldots \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h}) \xrightarrow{\Phi_*} \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^{h+1}}) \xrightarrow{\Phi_*} \ldots$$

est nulle.

Nous notons ci-dessous $\operatorname{colim}_h \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h})$ cette limite inductive et $\operatorname{colim}_h S_{p^h}$ la limite inductive dans $\mathscr{F}$ du système $\{\ldots \to S_{p^h} \xrightarrow{\Phi} S_{p^{h+1}} \to \ldots; h \in \mathbb{N}\}$.

Nous donnons deux démonstrations du lemme 0.3. La seconde exploite la relation entre la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p et la catégorie $\mathscr{F}$ [H-L-S, Part I]. La première est interne à $\mathscr{F}$; elle est cependant fortement influencée par un travail de Campbell et Selick concernant certains modules instables sur l'algèbre de Steenrod [C-S].

A.1 Première démonstration

Comme l'application canonique de $\operatorname{colim}_h \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h})$ vers $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, \operatorname{colim}_h S_{p^h})$ est un isomorphisme si F admet une résolution projective de type fini, le lemme 0.3 est impliqué par l'énoncé légèrement plus précis que voici.

Proposition A.1.1 *Pour tout foncteur F et tout entier $k>0$, l'application canonique* $\operatorname{colim}_h \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h}) \to \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, \operatorname{colim}_h S_{p^h})$ *est nulle.*

Celui-ci est équivalent à:

Proposition A.1.2 *Pour tout foncteur F, tout entier h et tout entier $k>0$, l'application canonique* $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{p^h}) \to \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, \operatorname{colim}_h S_{p^h})$ *est nulle.*

Ou encore à:

Proposition A.1.3 *Pour tout entier h, l'application canonique $S_{p^h} \to \operatorname{colim}_h S_{p^h}$ se factorise à travers un objet injectif de $\mathscr{F}$.*

C'est ce dernier énoncé que nous allons vérifier. Il est clair que l'on peut supposer $h \geqq 1$.

On note $B_h(V)$ la $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative quotient de $\mathrm{Sym}(V)$ par l'idéal engendré par les $x^{p^h}-x$, x parcourant V. On va montrer que B_h est un objet injectif de $\mathscr{F}$ et que l'application canonique $S_{p^h} \to \operatorname{colim}_h S_{p^h}$ est la composée de l'inclusion $S_{p^h} \hookrightarrow \mathrm{Sym}$, du passage au quotient $\mathrm{Sym} \to B_h$, et d'une certaine application $\theta\colon B_h \to \operatorname{colim}_h S_{p^h}$.

Lemme A.1.4 *Le foncteur B_h est un objet injectif de $\mathscr{F}$ (plus précisément B_h est isomorphe à l'injectif standard $J_{\mathbb{F}_{p^h}} = \mathbb{F}_p^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(-,\mathbb{F}_{p^h})}$).*

Démonstration. Faisons tout d'abord $h=1$. Dans ce cas, $B_1(V)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des fonctions définies sur V^* et à valeurs dans $\mathbb{F}_p$. On a donc $B_1 \cong J_{\mathbb{F}_p}$.

Dans le cas général, $\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} B_h(V)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des fonctions définies sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{p^h}}(\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} V, \mathbb{F}_{p^h}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_{p^h})$ et à valeurs dans $\mathbb{F}_{p^h}$, alors que $J_{\mathbb{F}_{p^h}}(V)$ est l'algèbre des fonctions définies sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_{p^h})$ et à valeurs dans $\mathbb{F}_p$. On a donc un isomorphisme de $\mathbb{F}_{p^h}$-algèbres, fonctoriel en V

$$\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} B_h(V) \cong \mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} J_{\mathbb{F}_{p^h}}(V).$$

Puisque $\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} B_h$ (resp. $\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} J_{\mathbb{F}_{p^h}}$) est juste la somme directe de h copies de B_h (resp. $J_{\mathbb{F}_{p^h}}$), B_h est bien un objet injectif de $\mathscr{F}$.

Pour obtenir un isomorphisme $B_h \cong J_{\mathbb{F}_{p^h}}$, on peut procéder comme suit. Soit Γ le groupe de Galois de $\mathbb{F}_{p^h}$ sur $\mathbb{F}_p$. La $\mathbb{F}_p$-algèbre $B_h(V)$ est celle des invariants de l'action de Γ sur $\mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} B_h(V)$, produit tensoriel de l'action tautologique sur $\mathbb{F}_{p^h}$ et de l'action triviale sur $B_h(V)$; il en résulte que $B_h(V)$ s'identifie à la $\mathbb{F}_p$-algèbre des fonctions Γ-équivariantes $f\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_{p^h}) \to \mathbb{F}_{p^h}$ (Γ opérant sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_{p^h})$ «au but»). Soit $s\colon \mathbb{F}_{p^h} \to \mathbb{F}_p$ une forme linéaire, alors l'application $B_h(V) \to J_{\mathbb{F}_{p^h}}(V)$, $f \mapsto s \circ f$, est un isomorphisme si s engendre le $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_{p^h}, \mathbb{F}_p)$ (qui est libre de rang 1). On observera qu'on ne peut avoir pour $h>1$ d'isomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $B_h(V) \cong J_{\mathbb{F}_{p^h}}(V)$ puisque le Frobenius n'est pas l'identité dans $B_h(V)$.

Construction de l'application $\theta\colon B_h \to \operatorname{colim}_h S_{p^h}$

Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative. Par construction, la donnée d'un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $B_h(V) \to R$ est équivalente à celle d'une application linéaire $\sigma\colon V \to R$ vérifiant $\varphi^h \circ \sigma = \sigma$, φ désignant le Frobenius de R. Nous allons utiliser cette propriété «universelle» de $B_h(V)$ pour construire θ.

On note $\mathbb{N}[1/p]$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}[1/p]$ formé des éléments $i \geqq 0$. On pose:

$$L_i = \operatorname*{colim}_h \{ \ldots \to S_{p^h i} \xrightarrow{\Phi} S_{p^{h+1} i} \to \ldots ; h \in \mathbb{N} \text{ et } p^h i \in \mathbb{N} \},$$

Φ désignant toujours «l'élévation à la puissance p-ème»; par définition on dispose, pour tout i dans $\mathbb{N}[1/p]$ et tout n dans $\mathbb{Z}$, d'un isomorphisme canonique $L_i \xrightarrow{\sim} L_{p^n i}$ que l'on note Φ^n. Le produit de $\operatorname{Sym}(V)$ induit un produit $\mu_{i,j}$: $L_i(V) \otimes L_j(V) \to L_{i+j}(V)$ qui fait de la somme directe $L(V) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}[1/p]} L_i(V)$ une $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative parfaite. (En fait $L(V)$ est la $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative parfaite librement engendrée par V, que l'on peut voir encore comme l'algèbre symétrique dans laquelle on a inversé le Frobenius, c'est-à-dire la limite inductive, dans la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres commutatives, du système $\{\operatorname{Sym}(V) \xrightarrow{\Phi} \operatorname{Sym}(V) \xrightarrow{\Phi} \ldots\}$.)

Pour construire θ, nous avons besoin d'introduire une sur-algèbre $M(V)$ de $L(V)$ que nous définissons de la façon suivante. Soit $\alpha: \mathbb{N}[1/p] \to \mathbb{N}$ la fonction qui associe à i la somme des chiffres de son écriture p-adique; on note $M(V)$ le sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de $\prod_{i \in \mathbb{N}[1/p]} L_i(V)$ formé des éléments $(y_i)_{i \in \mathbb{N}[1/p]}$ vérifiant $y_i = 0$ pour $\alpha(i)$ assez grand; en d'autres termes, $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\prod_{\alpha(i)=n} L_i)$. Soient m et n deux entiers et k un élément de $\mathbb{N}[1/p]$; le fait que le sous-ensemble de $\mathbb{N}[1/p] \times \mathbb{N}[1/p]$ formé des couples (i,j) vérifiant: $i+j=k$, $\alpha(i) \leqq m$ et $\alpha(j) \leqq n$, est fini en général et vide pour $k > m+n$, permet d'étendre à $M(V)$ le produit de $L(V)$. Notons symboliquement $\sum_{i \in \mathbb{N}[1/p]} y_i$ l'élément $(y_i)_{i \in \mathbb{N}[1/p]}$ de $M(V)$, nous définissons le produit $M(V) \otimes M(V) \to M(V)$ par:

$$\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}[1/p]} y_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j \in \mathbb{N}[1/p]} z_j\Big) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}[1/p]} \Big(\sum_{i+j=k} \mu_{i,j}(y_i \otimes z_j)\Big).$$

On vérifie que $M(V)$ est encore une $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative parfaite.

On note ι l'inclusion $V \hookrightarrow L_1(V)$ et σ l'application linéaire $V \to M(V)$ définie par

$$\sigma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Phi^{nh} \circ \iota)(x)$$

(on pourra observer que $\Phi^{nh} \circ \iota$ n'est rien d'autre que l'inclusion naturelle $V \hookrightarrow L_{p^{nh}}(V)$). Par construction, σ vérifie $\varphi^h \circ \sigma = \sigma$, φ désignant le Frobenius de $M(V)$, et s'étend donc en un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $B_h(V) \to M(V)$ que l'on note τ.

On note enfin θ la composée de τ, de la projection $M(V) \to L_{p^h}(V)$ et de l'isomorphisme Φ^{-h}: $L_{p^h}(V) \xrightarrow{\sim} L_1(V)$.

Le lemme ci-dessous achève la démonstration de la proposition A.1.3.

Lemme A.1.5 *Pour tout entier $h \geqq 1$, l'application canonique $S_{p^h} \to \operatorname*{colim}_h S_{p^h}$ est la composée de l'inclusion $S_{p^h} \hookrightarrow \operatorname{Sym}$, du passage au quotient $\operatorname{Sym} \to B_h$, et de l'application θ: $B_h \to \operatorname*{colim}_h S_{p^h}$.*

Démonstration. Elle résulte du point suivant: une équation de la forme

$$\sum_{1 \leq \ell \leq p^h} p^{n_\ell h} = p^h,$$

avec n_ℓ dans $\mathbb{Z}$, force tous les n_ℓ à être nuls.

A.2 Seconde démonstration

Par souci de clarté, nous développons nos arguments dans le seul cas où p vaut 2. Dans le cas où p est impair, il suffit de remplacer ci-dessous la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod par la sous-catégorie pleine des modules instables concentrés en degrés pairs pour pouvoir utiliser des arguments identiques.

Commençons par rappeler un peu la théorie de [H-L-S, Part I]. On note A l'algèbre de Steenrod et $\mathscr{U}$ la catégorie des A-modules instables. Soit V un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie, on note $H^* V$ la cohomologie modulo 2 du groupe V; $H^* V$ est un objet de $\mathscr{U}$. On note f le foncteur de $\mathscr{U}$ vers $\mathscr{F}$ qui à un A-module instable M associe le foncteur $V \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^* V))'$, $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^* V))'$ désignant le dual continu du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel profini $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^* V)$. Le foncteur f possède notamment les propriétés suivantes:
- Le foncteur f est exact (cette exactitude est équivalente à la $\mathscr{U}$-injectivité de $H^* V$ [Cs; Ml; L-Z]).
- Pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie E, on a

$$f(H^* E) = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{V}_f}(-, E)} = J_E$$

(il s'agit là d'une reformulation d'un théorème d'Adams-Gunawardena-Miller).
- Un A module instable est nilpotent si et seulement si $f(M)$ est nul [L-S].

Rappelons qu'un A-module instable M est dit *nilpotent* si *l'élévation au carré*, Sq_0: $M^n \to M^{2n}$, $x \mapsto Sq^n x$, est localement nilpotente, autrement dit si pour tout x il existe un entier n tel que $(Sq_0)^n x$ est nul.

Le foncteur f: $\mathscr{U} \to \mathscr{F}$ admet un adjoint à droite que l'on note m: $\mathscr{F} \to \mathscr{U}$. Soit F un foncteur de $\mathscr{F}$, il n'est pas difficile d'expliciter $m(F)$. On a par exemple:

$$(m(F))^n = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(n), mF) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(f(F(n)), F) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(S^n, F).$$

$(m(F))^n$ désignant le sous-espace des éléments de degré n de $m(F)$ et $F(n)$ le A-module instable librement engendré par un générateur de degré n. Soit D le foncteur contravariant de $\mathscr{F}$ vers $\mathscr{F}$, défini par:

$$(DF)(V) := (F(V^*))^*$$

où $(-)^*$ désigne le passage au dual dans les espaces vectoriels; si F prend des valeurs de dimension finie, on peut réécrire l'expression de $(m(F))^n$ sous la forme:

$$(m(F))^n = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(DF, DS^n) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(DF, S_n).$$

On vérifie que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(DF, S_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(DF, S_{2n})$ induite par Φ correspond à l'élévation au carré dans le module instable $m(F)$. On observera enfin que l'on a par définition: $m(J_E)=H^*E$, si bien qu'un injectif J_E est inchangé par $f\circ m$.

Nous sommes maintenant prêts pour la démonstration du lemme 0.3.

Soit $P_\cdot$ une résolution projective de F. Si $P_\cdot$ est de type fini en chaque degré, alors $DP_\cdot$ est une résolution injective de F (observer: $DP_E=J_{E*}$). On a:

$$\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{F}}(F, S_{2^h})=\mathrm{H}^k(\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(P_\cdot, S_{2^h}))=\mathrm{H}^k((m(DP_\cdot))^{2^h})=(\mathrm{H}^k(m(DP_\cdot)))^{2^h}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{H}^k(m(DP_\cdot))$ est un A-module instable nilpotent pour $k>0$. Pour cela, il faut vérifier que $f(\mathrm{H}^k(m(DP_\cdot)))$ est nul. Or, on a: $f(\mathrm{H}^k(m(DP_\cdot)))=\mathrm{H}^k(f\circ m(DP_\cdot))=\mathrm{H}^k(DP_\cdot)$, qui est bien nul quand k est non nul.

Commentaire. N. Kuhn est quant à lui arrivé à l'énoncé 0.3 en constatant que $\operatorname{colim}_h S_{2^h}$ est l'image par f de l'injectif de Carlsson $K(1)$ (pour une définition de $K(1)$, voir par exemple [L-S, 2.2]).

Remerciements. Nous remercions L. Breen de nous avoir initiés à ses travaux. Nous remercions aussi J. MacClure et N. Kuhn pour avoir attiré notre attention sur [Bö 1], [Bö 2] et [J-P].

Références

[A-M] Artin, M., Milne, J.S.: Duality in the flat cohomology of curves. Invent. Math. **35**, 111–129 (1976)

[Bö 1] Bökstedt, M.: Topological Hochschild homology. (à paraître)

[Bö 2] Bökstedt, M.: The topological Hochschild homology of $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}/p$. (à paraître)

[B 1] Breen, L.: Extensions du groupe additif. Publ. Sci., Inst. Hautes Etud. Sci. **48**, 39–125 (1978)

[B 2] Breen, L.: Extensions du groupe additif sur le site parfait. In: Giraud, J., Illusie, L., Raynaud, M. (éds.), Surfaces algébriques. (Lect. Notes Math., vol. 868, pp. 238–262) Berlin Heidelberg New-York: Springer 1981

[Ct] Cartier, P.: Une nouvelle opération sur les formes différentielles. C.R. Acad. Sci. Paris **244**, 426–428 (1957)

[C-S] Campbell, H.E.A., Selick, P.S.: Polynomial algebras over the Steenrod algebra. Comment. Math. Helv. **65**, 171–180 (1990)

[Cs] Carlsson, G.: G.B. Segal's Burnside ring conjecture for $(\mathbb{Z}/2)^k$. Topology **22-1**, 83–103 (1983)

[C-E] Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological Algebra. Princeton: Princeton University Press 1956

[D-P] Dold, A., Puppe, D.: Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier **11**, 201–312 (1961)

[E-ML 1] Eilenberg, S., MacLane, S.: Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory I, II. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **36**, 443–447, 657–663 (1950)

[E-ML 2] Eilenberg, S., MacLane, S.: On the groups $H(\pi, n)$ I, II. Ann. Math. **58**, 55–106 (1953); Ann. Math. **60**, 49–139 (1954)

[H-L-S] Henn, H.-W., Lannes, J., Schwartz, L.: The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects. Am. J. Math. (à paraître 1993)

[J-P] Jibladze, M., Pirashvili, T.: Cohomology of algebraic theories. J. Algebra **137**, 253–296 (1991)

[K] Kuhn, N.J.: Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra, I. Am. J. Math. (à paraître); II (à paraître); III. Prépublications, Charlottesville (1990, 1992, 1993)

[L-S] Lannes, L., Schwartz, L.: Sur la structure des A-modules instables injectifs. Topology **28-2**, 153–169 (1989)

[Md] Macdonald, I.G.: Symmetric Functions and Hall Polynomials. (Oxf. Math. Monogr.) Oxford: Clarendon 1979

[ML] MacLane, S.: Homologie des anneaux et des modules. In: CBRM, Colloque de topologie algébrique, pp. 55–80. Louvain: Librairie universitaire 1957

[Ml] Miller, H.R.: The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces. Ann. Math. **120**, 39–87 (1984)

[Mn] Milne, J.S.: Duality in the flat cohomology of a surface. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. **9**, 171–202 (1976)

[P] Pirashvili, T.: Higher additivisations. Proc. Math. Inst. Tbilissi **91**, 44–54 (1988)

[P-W] Pirashvili, T., Waldhausen, F.: MacLane homology and topological Hochschild homology. J. Pure Appl. Algebra **82-1**, 81–98 (1992)

[S] Schwartz, L.: Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Conjecture. (Chicago Lect. Notes) (à paraître)

[Sm] Smith, J.H.: Homotopy additive simplicial functors. (Prépublication 1992)