Invent math 115, 81–149 (1994)

Inventiones mathematicae

Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local

Bernadette Perrin-Riou

Mathématique, Université Pierre et Marie Curie, LMF, UFR 21, Tour 45–46, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Oblatum 3-VIII-1992 & 21-VI-1993

Soit p un nombre premier impair. Soient H une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, W l'anneau des entiers de H et σ l'endomorphisme de Frobenius de H; soient $\bar{H}$ une clôture algébrique de H, $H_n = H(\mu_{p^{n+1}})$, $H_\infty = UH_n$ la $\mathbb{Z}_p^\times$-extension cyclotomique et $G_\infty = \mathrm{Gal}(H_\infty/H)$. Posons $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![G_\infty]\!]$. Coleman [C1] construit un homomorphisme canonique de Λ-modules de la limite projective U_∞ des unités des H_n dans $W[\![G_\infty]\!]$ dont le noyau et le conoyau sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p(1)$. Ce type de construction est un des ingrédients essentiels de l'une des constructions de la fonction de Kubota-Leopoldt et de la fonction L p-adique d'une courbe elliptique à multiplication complexe. Elle permet de la construire à partir d'un système d'unités globales que fournit la nature (unités cyclotomiques, unités elliptiques) et qui se trouve être intimement lié à la fonction L de la situation.

Dans ce texte, nous définissons la généralisation de l'homomorphisme de Coleman pour toute représentation p-adique cristalline V du groupe de Galois G_H de $\bar{H}/H$. Expliquons rapidement de quoi il s'agit (toutes les notations seront de nouveau introduites dans la suite du texte). Soit $\mathscr{H}_r$ le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}_p[\![X]\!]$ formé des séries entières qui sont $o(\log(1+X))^r)$ sur le disque unité (voir 1.1). Notons $\mathscr{H}_r(G_\infty) = \mathscr{H}_r(\Gamma) \underset{\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]}{\otimes} \Lambda$ où $\mathscr{H}_r(\Gamma)$ est l'algèbre des $h(\gamma-1)$ pour $h \in \mathscr{H}_r$ et γ un générateur topologique de $\Gamma = \mathrm{Gal}(H_\infty/H(\mu_p))$ et $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$ la réunion des $\mathscr{H}_r(G_\infty)$.

Soit V une représentation p-adique cristalline de G_H. On note $V(j)$ le j-ième twist à la Tate de V. On fixe une famille $\varepsilon = (\zeta_n)$ de racines p^{n+1}-ièmes de l'unité telles que $\zeta_{n+1}^p = \zeta_n$, $\zeta_{-1} = 1$, $\zeta_0 \neq 1$. Si $\underline{\mathrm{T}}$ est un réseau de V stable par G_H, notons $Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})$ la limite projective des $H^1(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ relativement aux applications de corestriction. Alors, $Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})$ est muni d'une structure de Λ-module de type fini. Le choix de ε permet de définir un isomorphisme $Tw^\varepsilon_{j,V}\colon Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}}) \to Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}}(j))$ donné par $x \mapsto x \otimes \varepsilon^{\otimes j}$. D'autre part, soit $\underline{D}(V)$ le φ-module filtré admissible associé à V sur H. Notons $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ le sous-W-module de $W[\![T]\!]$ formé des séries formelles f telles que $\sum_{\zeta \in \mu_p} f(\zeta(1+T)-1) = 0$. Il est muni d'une unique action linéaire et continue de G_∞ telle que $\tau(1+T) = (1+T)^{\chi(\tau)}$ (où χ est le caractère cyclotomique) qui en fait un $W[\![G_\infty]\!]$-module libre de rang 1. On pose $\mathscr{D}_\infty(V)=W[\![T]\!]^{\psi=0}\bigotimes_W \underline{D}(V)$. L'opérateur différentiel $D=(1+T)/(d/dT)$ est inversible sur $W[\![T]\!]^{\psi=0}$. On note $\tilde{\Delta}$: $\mathscr{D}_\infty(V)\to\oplus\underline{D}(V)/(1-p^r\cdot\varphi)\,\underline{D}(V)$ l'application définie par

$$\tilde{\Delta}(f\otimes d)=(D^r(f)(0)\cdot d \operatorname{modulo}(1-p^r\cdot\varphi)\,\underline{D}(V))_{r\in\mathbb{Z}}.$$

Soit $\exp_{H_n,V}: H_n\bigotimes_H \underline{D}(V)\to H^1(H_n,V)$ l'application exponentielle de Bloch-Kato.

Théorème. *Il existe une unique famille d'homomorphismes de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-modules $\Omega^\varepsilon_{V(j),h}$ pour $h\geqslant 0$ et $j\in\mathbb{Z}$*

$$\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\mathscr{D}_\infty(V(j))^{\Delta=0}\to\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_{\Lambda}Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}(j))/\underline{\mathbf{T}}(j)^{G_{H_\infty}}$$

vérifiant

(i) *pour $j\geqslant 0$ et $h\geqslant 0$, le diagramme suivant est commutatif pour tout entier n*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_{\Lambda}\mathscr{D}_\infty(V(j))^{\tilde{\Delta}=0} \arrow[r, "\Omega^\varepsilon_{V(j),h}"] \arrow[d, "\Xi_{n,V(j)}"'] & \mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_{\Lambda}Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}(j))/\underline{\mathbf{T}}(j)^{G_{H_\infty}} \arrow[d] \\
H_n\bigotimes_W \underline{D}(V(j)) \arrow[r, "(h-1)!\cdot\exp_{H_n,V(j)}"'] & H^1(H_n,V(j))
\end{tikzcd}$$

où $\Xi_{n,V(j)}(g)=(p\cdot(\sigma\otimes\varphi))^{-(n+1)}(G)(\zeta_n-1)$ *avec* $(1-\varphi)\,G=g$ *(ici φ agit de manière σ-linéaire sur $H[\![T]\!]$ par $(1+T)^p-1$ et sur $\underline{D}(V(j))$ par φ);*

(ii) $Tw^\varepsilon_{1,V(j)}\circ\Omega^\varepsilon_{V(j),h}\circ D=-\Omega^\varepsilon_{V(j+1),h+1}$.

Les $\Omega^\varepsilon_{V,h}$ qui sont injectifs peuvent être vus comme une application «période». On contrôle la dépendance en h. Plus précisément, on montre que si $\ell_h=h-\log\gamma/\log\chi(\gamma)$ où γ est un élément non trivial de Γ, on a

$$\Omega^\varepsilon_{V,h+1}=\ell_h\cdot\Omega^\varepsilon_{V,h}.$$

D'autre part, on peut calculer la «partie avec log» du déterminant de $\Omega^\varepsilon_{V,h}$ calculé dans des bases de Λ-modules. Malheureusement, je ne sais pas calculer exactement l'idéal engendré par $\det(\Omega^\varepsilon_{V,h})$ sauf dans le cas ordinaire où la partie difficile avait déjà été faite par Coleman. Pour un résumé plus complet sur les conjectures que l'on fait au par. 3.4, voir [P3].

Donnons quelques applications de ces homomorphismes.

Regardons d'abord le cas de $\mathbb{Q}_p(r)$ où r est un entier positif. Pour $r=1$, $\Omega_{\mathbb{Q}_p(1),1}$ est l'«inverse» de l'isomorphisme de Coleman. Lorsque $r>1$ et $h=r$, le théorème donne une interprétation du r-ième twist de l'isomorphisme de Coleman en termes de la théorie cristalline de $\mathbb{Q}_p(r)$. Cela nous permet

– de donner une nouvelle démonstration du théorème de Bloch-Kato calculant les nombres de Tamagawa locaux de $\mathbb{Q}_p(r)$ (ce qui peut ainsi se faire sans utiliser de loi explicite de réciprocité);

– de montrer que toute représentation p-adique, extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(r)$ sur $H(\mu_n)$ où H est un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique p et non ramifié est cristalline (une partie de ce qui a été décrit précédemment est en effet vraie plus généralement pour un tel corps H);

– de démontrer à partir des résultats de Coleman pour $r=1$ une loi de réciprocité explicite sur H_∞ et d'en déduire le résultat de Kato concernant le lien entre l'application de Coates-Wiles et celle de Fontaine-Messing.

Il est alors tentant d'essayer de généraliser ces lois de réciprocité explicites en termes de théorie d'Iwasawa à toute représentation p-adique cristalline de G_H. Nous donnons une conjecture utilisant les homomorphismes $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$.

Cependant l'application fondamentale qui était la motivation de ce travail est la construction des fonctions L p-adiques. Nous laissons cela pour d'autres articles ([P4] pour le cas des courbes elliptiques, [P5] pour le cas général).

Donnons le plan du texte. Dans la première partie qui peut n'être lue qu'au fur et à mesure des besoins, on a regroupé des rappels sur les fonctions sur le disque unité, sur l'interpolation p-adique, des rappels sur les anneaux B_{cris} et B_{dR} (qu'on espère nettement suffisants pour la compréhension du texte) et des résultats de convergence ou d'«intégralité» dans ces anneaux nécessaires à la construction de l'homomorphisme Ω^{ε}_V. Dans la seconde partie, on construit des familles de points et on étudie leurs propriétés d'intégralité. Dans la partie 3, on construit l'application de périodes et on étudie quelques-unes de ces propriétés: calcul du déterminant par exemple, conjectures s'y rapportant, lien avec les nombres de Tamagawa. On utilise cette application de périodes pour énoncer la conjecture concernant une loi explicite de réciprocité dans cette situation tout à fait générale. Dans la partie 4, on traite le cas des représentations $\mathbb{Q}_p(r)$. Cette partie a été rédigée de manière relativement indépendante de la précédente, au moins dans l'énoncé des résultats.

Dans toute la suite, H est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique p et absolument non ramifié, W l'anneau des entiers de H (qui est aussi l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k), σ l'homomorphisme de Frobenius. On note $\bar{H}$ une clôture algébrique de H et $\bar{k}$ son corps résiduel. Soient $\mathbb{C}_p$ le complété de $\bar{H}$ et $|\ |$ la valeur absolue de $\mathbb{C}_p$ normalisée par $|p|=p^{-1}$. Si K est une extension algébrique de H contenue dans $\bar{H}$, on note G_K le groupe de Galois de $\bar{H}/K$.

Si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, on note $V^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V,\mathbb{Q}_p)$. Si M est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, on pose $M^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M,\mathbb{Z}_p)$.

Plan

1 Préliminaires

1.1 Fonctions sur le disque unité

1.1.1 Soit $B(0,1^-)$ la boule unité de $\mathbb{C}_p$ formée des $x\in\mathbb{C}_p$ tels que $|x|<1$. Soit $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ le sous-espace de $\mathbb{C}_p[\![T]\!]$ formé des éléments de $\mathbb{C}_p[\![T]\!]$ qui admettent un développement en série convergent en tout point de $B(0,1^-)$. Ce sont aussi les limites de fractions rationnelles n'ayant pas de pôles dans $B(0,1^-)$, limites pour la topologie de la convergence uniforme sur les boules $B(0,\rho)=\{x\in\mathbb{C}_p$ tel que $|x|\leqq\rho\}$ pour $\rho<1$. L'espace $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ est complet pour cette topologie. De plus, si une suite $(f_n)_n$ converge vers f dans cet espace, elle converge aussi vers f dans $\mathbb{C}_p[\![T]\!]$ coefficient par coefficient. Pour $\rho<1$, on pose

$$\|f\|_\rho=\operatorname*{Sup}_{x\in B(0,\rho)}|f(x)|.$$

Le principe du maximum implique que ce maximum est atteint sur $\{x\in\mathbb{C}_p$ tel que $|x|=\rho\}$.

Si f et g sont deux éléments de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$, on dit que $f=o(g)$ (resp. $O(g)$) si

$$\|f\|_\rho=o(\|f\|_\rho)\qquad(\text{resp. } \|f\|_\rho=O(\|f\|_\rho))$$

lorsque $\rho\to1^-$. En particulier, on notera $\mathscr{H}_{h,\mathbb{C}_p}$ le sous-ensemble des fonctions de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ qui sont $o(\log^h)$ (c'est-à-dire $o(\log^h(1+T))$). Si n est un entier $\geqq1$, posons $\rho_n=p^{-1/p^{n-1}\cdot(p-1)}$. On déduit de

$$\|(\log(1+T))^i\|_{\rho_n}=p^{n\cdot i}\cdot p^{-p/(p-1)\cdot i}$$

qu'une fonction f est $o(\log^h)$(resp. $O(\log^h)$) si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty}p^{-n\cdot h}\|f\|_{\rho_n}=0\qquad(\text{resp. } \operatorname*{Sup}_n(p^{-n\cdot h}\|f\|_{\rho_n})<\infty)$$

[H]. Si $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot T^n$, cela est encore équivalent à ce que

$$\lim_{n\to\infty}n^{-h}\cdot|a_n|=0\qquad(\text{resp. } \operatorname*{Sup}_{n>0}(n^{-h}\cdot|a_n|)<\infty).$$

Enfin, il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que

$$C_1\cdot\operatorname*{Sup}_n(n^{-h}\cdot|a_n|)\leqq\operatorname*{Sup}_n(p^{-n\cdot h}\|f\|_{\varrho_n})\leqq C_2\cdot\operatorname*{Sup}_n(n^{-h}\cdot|a_n|).$$

Si K est un corps contenu dans $\mathbb{C}_p$, on pose $\mathscr{H}_K = \mathscr{H}_{\mathbb{C}_p} \cap K[\![T]\!]$ et $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathbb{Q}_p}$.

1.1.2 On définit un opérateur φ continu σ-semi-linéaire sur $\mathscr{H}_H$ par

$$\varphi(f) = f^\sigma((1+T)^p - 1)$$

où $f^\sigma(T) = \sum \sigma(a_n) \cdot T^n$ si $f(T) = \sum a_n \cdot T^n$: cela a un sens dans $H[\![T]\!]$ car $(1+T)^p - 1 = p \cdot T + \dots$. La relation $\|\varphi(f)\|_\rho = \|f\|_{\rho^p}$ pour $\rho > p^{-1/(p-1)}$ montre que φ est à valeurs dans $\mathscr{H}_H$ et continue. Lorsque $\rho < p^{-1/(p-1)}$, on a $\|\varphi(f)\|_\rho = \|f\|_{\varrho/p}$.

1.1.3 Considérons ensuite l'opérateur ψ σ^{-1}-semi-linéaire défini sur $H[\![T]\!]$ par

$$\varphi \circ \psi(f) = p^{-1} \cdot \sum_\zeta f(\zeta \cdot (1+T) - 1)$$

où ζ parcourt les racines p-ièmes de l'unité. Il est bien défini car φ admet un inverse dans $H[\![T]\!]$. On vérifie facilement que pour $p^{-1/(p-1)} < \rho < 1$, on a

$$\|\varphi \circ \psi(f)\|_\rho = \|\psi(f)\|_{\rho^p} \leqq p \cdot \|f\|_\rho.$$

On en déduit que ψ est un opérateur continu de $\mathscr{H}_H$. On a enfin $\psi \circ \varphi = 1$.

1.1.4 Soit $H_\infty = H(\mu_{p^\infty})$. Soient $G_\infty = \mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ et χ: $\mathrm{Gal}(\bar{H}/H) \to G_\infty \to \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(H_\infty/H_0)$. On peut faire agir G_∞ sur $\mathscr{H}_H$ de manière continue par $\tau(f)(T) = f((1+T)^{\chi(\tau)} - 1)$ (on a clairement $\|\tau(f)\|_\rho = \|f\|_\rho$).

1.1.5 On définit un opérateur différentiel sur $\mathscr{H}$ par

$$D(f) = (1+T) \cdot f'(T).$$

On a donc $D(f)(e^Z - 1) = h'(Z)$ où $h(Z) = f(e^Z - 1)$. L'opérateur D vérifie pour tout entier p-adique α

$$D(f((1+T)^\alpha - 1)) = \alpha \cdot D(f)((1+T)^\alpha - 1).$$

En particulier, $D(\varphi f) = p \cdot \varphi(D(f))$ et $D(\tau f) = \chi(\tau) \cdot \tau D(f)$. Si f est un élément de $H[\![T]\!]$ et j un entier, posons

$$\Delta_j(f) = D^j(f)(0).$$

L'utilisation de ces opérateurs remonte à Kummer et a été développée par Coates et Wiles.

On vérifie facilement les propriétés suivantes:

(i) $(j!)^{-1} \cdot \Delta_j(f)$ est le coefficient de Z^j dans le développement de $f(e^z - 1)$;
(ii) Si $j < p$ et si f est un élément de $W[\![T]\!]$, $(j!)^{-1} \cdot \Delta_j(f)$ appartient à W;
(iii) $\Delta_j(\varphi(f)) = p^j \cdot \Delta_j(f)$, $\Delta_j(\tau(f)) = \chi(\tau)^j \cdot \Delta_j(f)$ pour $\tau \in G_\infty$;
(iv) $\Delta_j(\log^i(1+T)) = 0$ si $i \neq j$ et $j!$ si $i = j$.

1.1.6 Le noyau $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ de ψ sur $W[\![T]\!]$ est un W-module stable par G_∞ et par D.

Lemme. (i) *L'action de G_∞ sur le W-module $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ en fait un $W[\![G_\infty]\!]$-module compact libre de rang* 1 *dont une base est* $1+T$.

(ii) *D est un isomorphisme de W-modules de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ sur lui-même vérifiant $D(\tau f)=\chi(\tau)\cdot D(f)$.*

La *démonstration* se trouve dans [P1]. L'action de $W[\![G_\infty]\!]$ sur $(1+T)$ prolonge de manière continue l'action de $W[G_\infty]$ donnée par

$$(\sum_n a_n\cdot\gamma^n)\cdot(1+T)=\sum_n a_n\cdot(1+T)^{\chi(\gamma)^n}$$

pour γ générateur topologique de G_∞. Pour montrer (ii), on remarque que $D(h(\gamma-1)\cdot(1+T))=h(\chi(\gamma)\cdot\gamma-1)\cdot(1+T)$ et que $h(\gamma-1)\mapsto h(\chi(\gamma)\cdot\gamma-1)$ est un isomorphisme de $W[\![G_\infty]\!]$ sur lui-même.

Si $g\in W[\![T]\!]^{\psi=0}$, on note $\mathrm{Mel}(g)$ l'unique élément de $W[\![G_\infty]\!]$ tel que $\mathrm{Mel}(g)\cdot(1+T)=g$.

1.2 Interpolation

1.2.1 Posons $\omega_m(X)=(1+X)^{p^m}-1$. Soit $\rho<1$ et t un entier tel que $\rho<\rho_t=p^{-1/p^{t-1}\cdot(p-1)}$. On a alors $\|\omega_m\|_\rho\leqq\|\omega_t\|_\rho\cdot p^{-(m-t)}$ pour $m\geqq t$. En particulier, on a $\|\omega_m\|_\rho\leqq p^{-m}\cdot C_\rho$ avec par exemple $C_\rho=p^t$.

Soit u un générateur de $1+p\mathbb{Z}_p$. Si r est un entier $\geqq 1$, on pose

$$\Omega_{m,r}(X)=\prod_{j=0}^{r-1}\omega_m(u^{-j}\cdot(1+X)-1).$$

Si P est un polynôme, on pose $\|P\|=\|P\|_1$. On a le lemme suivant [AV].

Lemme. *Soit P_m une suite de polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$. On suppose qu'il existe un entier r tel que*

(i) $\lim_{m\to\infty}\|p^{r\cdot m}\cdot P_m\|=0$

(ii) $P_{m+1}-P_m\equiv 0$ modulo $\Omega_{m,r}(X)\,\mathbb{C}_p[X]$.

Alors, la suite P_m converge vers un élément de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$. Si $\lim_{m\to\infty}\|p^{r'\cdot m}\cdot P_m\|=0$ pour $r'<r$, la limite f ne dépend que des P_m modulo $\Omega_{m,r'}$. Enfin, f est l'unique élément de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ vérifiant pour tout m

$$f\equiv P_m \text{ modulo } \Omega_{m,r}(X)\,\mathbb{C}_p[X].$$

Démonstration. Dans ce qui suit, $\varepsilon(m)$ désigne une suite tendant vers 0 lorsque $m\to\infty$. Le polynôme $\Omega_{m,r}$ étant unitaire, on a

$$P_{m+1}-P_m=\Omega_{m,r}(X)\cdot R_m \quad \text{avec} \quad \|R_m\|\leqq\mathrm{Sup}(\|P_m\|,\|P_{m+1}\|)\leqq\varepsilon(m)\cdot p^{r\cdot m}.$$

Soit ρ un réel vérifiant $|1-u^j|<\rho<1$ pour tout j compris entre 0 et $r-1$ et soit t un entier tel que $\rho<p^{-1/p^{t-1}\cdot(p-1)}$. On déduit de la majoration $\|\Omega_{m,r}\|_\rho<C_\rho\cdot p^{-m\cdot r}$ (avec par exemple $C_\rho\leqq p^{r\cdot t}$) que, pour $m>t$,

$$\|P_{m+1}-P_m\|_\rho\leqq\varepsilon(m)\cdot p^{r\cdot m}\,\|\Omega_{m,r}\|_\rho\leqq C_\rho\cdot\varepsilon(m)$$

et que $\|P_{m+1}-P_m\|_\rho$ tend vers 0 lorsque $m\to\infty$. La suite P_m converge vers un élément f de $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$. Si $\lim_{m\to\infty}\|p^{r'\cdot m}\cdot P_m\|=0$ pour $r'<r$, la limite ne dépend que

des polynômes $\tilde{P}_m$ de degré $r' \cdot p^m$ congrus à P_m modulo $\Omega_{m,r'}(X)$. En effet, on montre comme précédemment que $\tilde{P}_m - P_m$ tend vers 0 dans $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ lorsque $m \to \infty$. Montrons que $\lim_{n \to \infty} \|p^{n \cdot r} \cdot f\|_{\rho_n} = 0$. On a pour $m \geqq n$,

$$\|P_{m+1} - P_m\|_{\rho_n} \leqq \varepsilon(m) \cdot p^{r \cdot m} \|\Omega_{m,r}\|_{\rho_n} \leqq \varepsilon(m) \cdot p^{r \cdot m - (m-n) \cdot r} \cdot \|\Omega_{n,r}\|_{\rho_n} \leqq \varepsilon(m) \cdot p^{n \cdot r}.$$

D'autre part, on a $\|P_n\|_{\rho_n} \leqq \varepsilon(n) \cdot p^{r \cdot n}$. On en déduit que $\|p^{r \cdot n} \cdot f\|_{\rho_n}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. L'unicité de f vient de ce que les éléments de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ sont caractérisés par leur valeur sur $u^j \zeta - 1$ pour $j = 0, \ldots, r-1$ et ζ racine p^n-ième de l'unité pour tout entier n ([AV], voir aussi le lemme 1.3.1).

1.2.2 Lemme. *Soit pour tout entier positif $j < r$ une suite de polynômes $Q_{m,j}(X)$ vérifiant*

(i) $\lim_{m \to \infty} \|p^{r \cdot m} \cdot Q_{m,j}\| = 0$ *pour* $j < r$;

(ii) $Q_{m+1,j} - Q_{m,j} \equiv 0$ modulo $\omega_m(X)\, \mathbb{C}_p[X]$ *pour tout m et pour $j < r$*;

(iii) $\lim_{m \to \infty} \left(\left\| p^{(r-j) \cdot m} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \cdot Q_{m,k}(u^{-k} \cdot (1+X) - 1) \right\| \right) = 0$ *pour* $j < r$.

Alors, les polynômes P_m de $\mathbb{C}_p[X]$ de degré $< r \cdot p^m$ tels que pour tout $0 \leqq j < r$ on ait

$$P_m(X) \equiv Q_{m,j}(u^{-j}(1+X) - 1) \text{ modulo } \omega_m(u^{-j}(1+X) - 1),$$

vérifient les hypothèses du lemme 1.2.1. *Autrement dit, il existe un unique élément f de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ tel que*

$$f \equiv Q_{m,j}(u^{-j}(1+X) - 1) \text{ modulo } \omega_m(u^{-j}(1+X) - 1)$$

pour tout m et pour tout $j = 0, \ldots, r-1$.

Démonstration. Il est clair que l'on a $P_{m+1} - P_m \equiv 0$ modulo $\Omega_{m,r}(X)\, \mathbb{C}_p[X]$. Il reste à montrer que l'on a $\lim_{m \to \infty} \|p^{r \cdot m} \cdot P_m\| = 0$. Pour cela, on utilise les techniques de [AV, H]. Rappelons-en les étapes. On se donne r polynômes $Q_0, \ldots, Q_{r-1}$ de degré $< p^m$ et on note P l'unique polynôme de degré $< r \cdot p^m$ tel que $P(X) \equiv Q_j(u^{-j} \cdot (1+X) - 1)$ modulo $\omega_m(u^{-j} \cdot (1+X) - 1)$. Il s'agit de comparer la norme de P à celles des

$$\delta_i(X) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \cdot \binom{i}{k} \cdot Q_k(u^{-k} \cdot (1+X) - 1)$$

pour $0 \leqq i < r$. Posons $H(Z, X) = \sum_{i=0}^{r-1} \delta_i(X) \cdot \binom{Z}{i}$. On a alors:

$$H(j, X) = Q_j(u^{-j} \cdot (1+X) - 1) \quad \text{pour tout entier} \quad 0 \leqq j < r.$$

Soit d'autre part l'unique polynôme S en Y et X de degré $< r$ en Y et de degré $< p^m$ en X tel que $S(u^{j \cdot p^m} - 1, X) = Q_j(u^{-j} \cdot (1+X) - 1)$. On vérifie facilement que

$P(X)=S((1+X)^{p^m}-1, X)$ et $\|P\|=\|S\|$. Ecrivons $S=\sum_{k=0}^{r-1} S_k(X)\cdot Y^k$. On a donc $S(u^{j\cdot p^m}-1, X)=H(j, X)$. On a pour tout réel α avec $|u^{p^m}-1|<\alpha<p^{-1/(p-1)}$

$$\operatorname*{Sup}_{0\leq k<r}(\|S_k(X)\|\,\alpha^k)\leq C\cdot \operatorname*{Sup}_{0\leq i<r}(\|\delta_i(X)\|\cdot\alpha^i/|u^{p^m}-1|^i)$$

où C ainsi que les constantes C', C'' qui suivent ne dépendent que de α [AV, proposition IV.4]. On en déduit que $\|P\|\leq C'\cdot \operatorname*{Sup}_{0\leq i<r}(\|p^{-m\cdot i}\cdot\delta_i(X)\|)$. En appliquant cela aux polynômes $Q_{j,m}$ de l'énoncé, on en déduit que

$$\|p^{m\cdot r}\cdot P_m\|\leq C''\cdot \operatorname*{Sup}_{0\leq i<r}(\|p^{m\cdot(r-i)}\cdot\delta_i(X)\|),$$

ce qui tend vers 0 lorsque $m\to\infty$.

Si le degré de P_m (resp. $Q_{j,m}$) est strictement inférieur à $r\cdot p^m$ (resp. p^m), P_m (resp. $Q_{j,m}(u^{-j}\cdot(1+X)-1)$) est le polynôme d'interpolation de f modulo $\Omega_{m,r}$ (resp. $\omega_m(u^{-j}(1+X)-1)$). Par un argument analogue, on peut montrer que réciproquement, si $f\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$, ses polynômes d'interpolation modulo $\Omega_{m,r}$ (resp. modulo $\omega_m(u^{-j}(1+X)-1)$) vérifient les conditions du lemme 1.2.1 (resp. du lemme 1.2.2) [AV, H].

1.2.3 Notons $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(\Gamma)$ l'algèbre des $h(\gamma-1)$ avec $h\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ et γ un générateur topologique de Γ. Elle contient $\Lambda_\Gamma=\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]$. Posons comme dans l'introduction $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)=\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(\Gamma)\bigotimes_{\Lambda_\Gamma}\Lambda$. On définit un homomorphisme

$$\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(1+T)=\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)\bigotimes_{\Lambda}\mathbb{Z}_p[\![T]\!]^{\psi=0}\to\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$$

prolongeant l'application

$$\mathbb{Z}_p[\![\Gamma]\!]\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(1+T)\to\mathbb{Z}_p[\![T]\!]^{\psi=0}$$

définie en 1.1.6, de la manière qui suit (voir 1.2.4 pour son interprétation en termes de transformée de Mellin). Il suffit de le faire pour $F\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(\Gamma)$. Soit donc $F=f(\gamma-1)$ avec $f\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ et soit $P_m(f)$ le polynôme d'interpolation de f modulo $\Omega_{m,r}$ comme en 1.2.1.

Lemme. *La limite de $P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)\in\mathbb{C}_p[T]$ existe dans $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ et ne dépend que de f et non de r. On la note $f(\gamma-1)\cdot(1+T)$. On a les propriétés suivantes*

(i) $$D^j(f(\gamma-1)\cdot(1+T))=f(\chi(\gamma)^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T);$$

(ii) *pour tout caractère η de Γ d'ordre fini d'ordre p^m, on a en posant* $g(T)=f(\gamma-1)\cdot(1+T)$

$$G(\eta^{-1},\zeta)\cdot\eta(f(\gamma-1))=\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(H_m/H_0)}\eta(\tau)^{-1}\cdot g(\tau(\zeta)-1)$$

où ζ est une racine de l'unité d'ordre p^{m+1} et

$$G(\eta^{-1},\zeta)=\sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\zeta).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que $P_{m+1}(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)-P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)$ tend vers 0 dans $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$ lorsque $m\to\infty$, c'est-à-dire que si ρ est un réel inférieur à 1, $\|P_{m+1}(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)-P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_\rho\to 0$. On a $P_{m+1}(f)-P_m(f)=R_m\cdot\Omega_{m,r}$ avec $\lim\limits_{m\to\infty}\|p^{r\cdot m}R_m\|=0$ ([A, lemme 2.5.5], continuité de la division euclidienne par un polynôme unitaire). D'autre part, écrivons $\Omega_{m,r}(X)=\sum\limits_k a_{k,m}\cdot[(1+X)^{k\cdot p^m}-1]$ (avec $a_{k,m}$ entier). On a alors avec $u=\chi(\gamma)$,

$$\begin{aligned}\Omega_{m,r}(\gamma-1)\cdot(1+T)&=\left(\sum_{0<j}\left(\sum_k a_{k,m}\cdot\binom{u^{k\cdot p^m}-1}{j}\right)\cdot T^j\right)\cdot(1+T)\\&=(\sum_{j>0}(\sum_k a_{k,m}\cdot(u^{k\cdot p^m}-1)\,\lambda_{k,m,j})\cdot T^j/j)\cdot(1+T)\end{aligned}$$

avec les $\lambda_{k,m,j}$ entiers. On en déduit que

$$\begin{aligned}\|\Omega_{m,r}(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_\rho&\leqq \operatorname{Sup}_j(\rho^j/|j|)\cdot(\operatorname{Sup}_k|a_{k,m}\cdot(u^{k\cdot p^m}-1)|)\\&\leqq \operatorname{Sup}_j(\rho^j/|j|)\cdot\|\Omega_{m,r}\|_{p^{-1}}.\end{aligned}$$

On a donc $\|p^{-m\cdot r}\cdot\Omega_{m,r}(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_\rho\leqq C_\rho$. On en déduit facilement que

$$\|R_m(\gamma-1)\cdot\Omega_{m,r}(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_\rho\leqq C_\rho\cdot\|p^{r\cdot m}R_m\|\to 0$$

et que la suite des $P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)$ converge. Notons $f(\gamma-1)\cdot(1+T)$ sa limite. Elle ne dépend pas de r: en effet si $P_{m,r'}(f)$ est le polynôme d'interpolation de f modulo $\Omega_{m,r'}$, avec $r'>r$, on a $P_{m,r'}(f)-P_m(f)=S_m\cdot\Omega_{m,r}$ avec toujours $\lim\limits_{m\to\infty}\|p^{r\cdot m}\cdot S_m\|=0$ et donc

$$\lim_{m\to\infty}P_{m,r'}(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)=\lim_{m\to\infty}P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T).$$

Montrons que $f(y-1)\cdot(1+T)$ appartient à $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$. Par passage à la limite on a

$$\|(f(\gamma-1)\cdot(1+T)-P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_\rho\leqq C_\rho\cdot\|p^{r\cdot m}R_m\|\leqq C_\rho\cdot\|p^{r\cdot m}P_m(f)\|.$$

En remplaçant ρ par ρ_m et en utilisant le fait que $C_{\rho_m}\leqq p^{m\cdot r}$, on en déduit que

$$\|p^{m\cdot r}\cdot f(\gamma-1)\cdot(1+T)\|_{\rho_m}\leqq \operatorname{Sup}(\|p^{r\cdot m}\cdot P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T)\|,\|p^{r\cdot m}\cdot P_m(f))\|),$$

ce qui tend vers 0 lorsque $m\to\infty$.

Remarquons que l'on peut en fait définir $f(\gamma-1)\cdot(1+T)$ à partir des polynômes d'interpolation de f modulo un produit de $\omega_m(u^j\cdot(1+X)-1)$ pour r valeurs distinctes de j.

Montrons (i). Si Q est un polynôme, on vérifie facilement que $D^j(Q(\gamma-1)\cdot(1+T))=Q(u^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T)$ (avec toujours $u=\chi(\gamma)$. On en déduit que

$$D^j(f(\gamma-1)\cdot(1+T))=\lim_{m\to\infty} P_m(f)(u^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T).$$

Comme $P_m(f)(u^j\cdot(1+X)-1)$ est un polynôme d'interpolation de $f(u^j\cdot(1+X)-1)$ modulo $\Omega_{m,r}(u^j\cdot(1+X)-1)$, on a $D^j(f(\gamma-1)\cdot(1+T))=f(u^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T)$. D'où (i).

Montrons (ii). On a

$$f(\gamma-1)\cdot(1+T)\equiv P_m(f)(\gamma-1)\cdot(1+T) \text{ modulo } \omega_{m+1}(T),$$

puisque

$$\omega_m(\gamma-1)\cdot(1+T)=(1+T)\cdot((1+T)^{u^{p^m}-1}-1)\equiv 0 \text{ modulo } \omega_{m+1}(T)$$

avec $u=\chi(\gamma)$. On a

$$\sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot g(\tau(\zeta)-1)=\sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot P_m(f)(\gamma-1)\cdot\tau(\zeta).$$

Ecrivons $P_m(f)=\sum a_r(1+X)^r$. On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot g(\tau(\zeta)-1)&=\sum a_r\cdot \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot(\gamma^r\cdot\tau)(\zeta)\\ &=\sum a_r\cdot\eta(\gamma^r)\cdot \sum_{\tau\in \mathrm{Gal}(H_m/H_0)} \eta(\tau)^{-1}\cdot\tau(\zeta)\\ &=G(\eta^{-1},\zeta)\cdot\eta(P_m(f)(\gamma-1))=G(\eta^{-1},\zeta)\cdot\eta(f(\gamma-1)),\end{aligned}$$

d'où (ii).

1.2.4 On définit ainsi un homomorphisme de Λ-modules

$$\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(1+T)\to\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}.$$

Montrons qu'il est injectif. Soit f un élément de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(\Gamma)$ tel que $f(\gamma-1)\cdot(1+T)=0$. On déduit du lemme 1.2.3 que $f(u^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T)=0$ pour tout entier j puis que pour tout caractère d'ordre fini η, $\eta(f(u^j\cdot\gamma-1))=0$. Donc f est nul.

1.2.5 Ce qui précède est bien connu et s'interprète en termes de distributions d'ordre $<r$ ou r-admissible. Bien que l'on n'en ait pas besoin dans la suite, indiquons cette interprétation. Rappelons d'abord le cas des mesures. Si G est un groupe profini, notons $\mathrm{Mes}(G,\mathbb{C}_p)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des mesures sur G à valeurs dans $\mathbb{C}_p$. Il existe un isomorphisme canonique de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels entre $\mathrm{Mes}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{C}_p)$ et $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{C}_p$ donné par la formule

$$\mu\mapsto P_\mu(T)=\int_{\mathbb{Z}_p}(1+T)^\alpha\, d\mu(\alpha).$$

On note $g\mapsto\mu_g$ l'application réciproque. La signification de l'opérateur ψ est dans ce contexte la suivante:

Lemme. *Une mesure μ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ est à support dans $\mathbb{Z}_p^\times$ si et seulement si $\psi(P_\mu)=0$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que la mesure restriction de μ à $p\mathbb{Z}_p$ est nulle, c'est-à-dire que $\int_{p\mathbb{Z}_p} (1+T)^\alpha \, d\mu(\alpha)=0$. Or, on a

$$0=p\cdot\varphi\circ\psi(P_\mu)(T)=\sum_{\zeta^p=1}\int_{\mathbb{Z}_p}\zeta^\alpha\cdot(1+T)^\alpha\, d\mu(\alpha)$$
$$=\int_{\mathbb{Z}_p}\Big(\sum_{\zeta^p=1}\zeta^\alpha\Big)\cdot(1+T)^\alpha\, d\mu(\alpha)=p\cdot\int_{p\mathbb{Z}_p}(1+T)^\alpha\, d\mu(\alpha).$$

On déduit du lemme et de 1.1.6 que si μ est à support dans $\mathbb{Z}_p^\times$, on peut écrire $P_\mu(T)=f_\mu\cdot(1+T)$ où $f_\mu=\mathrm{Mel}(P_\mu)\in\Lambda$. La transformée de Mellin L_μ de μ est définie classiquement de la manière suivante: si η est un caractère continu de G_∞ dans $\mathbb{C}_p^\times$, on pose

$$L_\mu(\eta)=\int_{G_\infty}\eta(g)\cdot d\chi^*(\mu)\in\mathbb{C}_p,$$

où $\chi^*(\mu)$ est la mesure sur G_∞ transformée de μ par le caractère cyclotomique $\chi\colon G_\infty\to\mathbb{Z}_p^\times$ (i.e. on a

$$\int_{G_\infty}\eta(\chi(g))\cdot d\chi^*(\mu)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\eta(\alpha)\cdot d\mu).$$

On vérifiera en 1.2.7 (dans un cas plus général) que l'on a $L_\mu(\eta)=\eta(f_\mu)$ $=\eta(\mathrm{Mel}(P_\mu))$.

1.2.6 Lorsque $r>0$, soit $\mathscr{S}_r$ le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel des fonctions sur $B(0,1)$ qui sont localement égales à un polynôme de degré $<r$. Une distribution μ sur $\mathbb{Z}_p^\times$ d'ordre $<r$ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}_r$ telle

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Sup}_{a\in\mathbb{Z}_p^\times}\Big(\Big|p^{(r-j)\cdot n}\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x-a)^j\, d\mu\Big|\Big)=0$$

pour tout entier j avec $0\leqq j<r$. Notons $\mathscr{D}_r$ l'ensemble des distributions d'ordre $<r$ sur $\mathbb{Z}_p^\times$. La donnée d'une distribution d'ordre $<r$ est équivalente à la donnée de r distributions μ_j avec $0\leqq j<r$ (c'est-à-dire de r formes linéaires sur les fonctions localement constantes) vérifiant la condition

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Sup}_{a\in\mathbb{Z}_p^\times}\left|p^{(r-j)\cdot n}\sum_{0\leqq k\leqq j}\binom{j}{k}(-a)^k\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}d\mu_k\right|=0,$$

le lien étant donné par $\int_U d\mu_j=\int_U x^j\cdot d\mu$ pour tout ouvert U de $\mathbb{Z}_p^\times$. Il est montré [MTT, V] qu'une telle distribution se prolonge de manière unique à l'espace des fonctions sur $B(0,1)$ ayant localement en tout point de $B(0,1)$ un développement en série entière convergent. On peut donc alors associer à une distribution d'ordre $<r$ deux fonctions: la première fonction est sa transformée de Mellin. Vu comme fonction sur l'espace analytique des caractères de G_∞ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^\times$, c'est

$$L_\mu(\eta\chi^j)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\eta(\chi^{-1}(x))\cdot x^j\cdot d\mu(x)=\int_{G_\infty}\eta(g)\cdot\chi^j(g)\cdot\chi^*(d\mu)(g).$$

On montre [AV, V, MTT] qu'il existe un unique élément f_μ de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)$ telle que $L_\mu(\xi)=\xi(f_\mu(\gamma-1))$ pour tout caractère ξ de G_∞ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^\times$. La deuxième fonction est

$$g_\mu(T)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times}(1+T)^x\cdot d\mu(x)=\sum_{n\geq 0}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\binom{x}{n}\cdot d\mu(x)\right)\cdot T^n\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}.$$

1.2.7. Proposition. *L'application $\mu\mapsto f_\mu$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}_r$ sur $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)$. L'application $\mu\mapsto g_\mu$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}_r$ sur $(\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p})^{\psi=0}$. L'application de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)$ sur $(\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p})^{\psi=0}$ qui s'en déduit est l'application construite en 1.2.4 et est un isomorphisme.*

Démonstration. On montre successivement que
(i) $f\mapsto f(\gamma-1)\cdot(1+T)$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}(G_\infty)$ sur $(\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p})^{\psi=0}$;
(ii) si $g\in(\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p})^{\psi=0}$ et si, pour $0\leqq j<r$, on définit

$$\mu_j(a,p^n)=p^{-n}\sum_{\zeta}\zeta^{-a}D^j(g)(\zeta-1)$$

où ζ parcourt les racines p^n-ièmes de l'unité, μ_j est une distribution sur $\mathbb{Z}_p^\times$ et μ définie par $\int_U x^j\cdot d\mu=\int_U d\mu_j$ est une distribution d'ordre $<r$ telle que $g_\mu(T)=g(T)$, ce qui implique la bijectivité de l'application $\mu\mapsto g_\mu$;
(iii) $f_\mu(\gamma-1)\cdot(1+T)=g_\mu(T)$.

La proposition s'en déduit.

Montrons (i). Soit $g\in(\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p})^{\psi=0}$. Ecrivons $g=R_m+\omega_{m+1}\cdot h_m$ où $\deg(R_m)<p^{m+1}$. Comme $\psi(\omega_{m+1}\cdot h_m)=\omega_m\cdot\psi(h_m)$ et que $\psi(R_m)$ est de degré $<p^m$, la condition $\psi(g)=0$ implique que $\psi(R_m)=0$. On en déduit que R_m appartient à $\mathbb{C}_p[\gamma-1]\cdot(1+T)$. Plus précisément notons $Q_{m,0}$ le polynôme de degré $<p^m$ tel que $g(T)\equiv R_m(T)\equiv Q_{m,0}(\gamma-1)\cdot(1+T)$ modulo $\omega_{m+1}(T)$. De même, notons $Q_{m,j}$ le polynôme de degré $<p^m$ tel que $D^j(g)(T)\equiv Q_{m,j}(\gamma-1)\cdot(1+T)$ modulo $\omega_{m+1}(T)$. Notons P_m le polynôme de degré $<r\cdot p^m$ tel que

$$P_m(X)\equiv Q_{m,j}(u^{-j}\cdot(1+X)-1)\text{ modulo }\omega_m(u^{-j}\cdot(1+X)-1).$$

Montrons que P_m converge vers un élément f de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$. Il s'agit de vérifier la condition (ii) de 1.2.1. On a

$$D^j(g)(T)\equiv P_m(u^j\cdot\gamma-1)\cdot(1+T)=D^j(P_m(\gamma-1)\cdot(1+T))\text{ modulo }\omega_{m+1}(T).$$

On en déduit que $g\equiv P_m(\gamma-1)\cdot(1+T)$ modulo $\omega_{m+1}(T)^r$. Si T_m est le polynôme d'interpolation de g modulo $\omega_{m+1}(T)^r$, on a donc $P_m(\gamma-1)\cdot(1+T)\equiv T_m$ modulo $\omega_{m+1}(T)^r$. Comme le degré de P_m est strictement inférieur à $p^m\cdot r$, on en déduit facilement que

$$\|P_m(X)\|=\|P_m(\gamma-1)\cdot(1+T)\|=\|T_m\|.$$

On a d'autre part

$$(\rho_m)^{p^m}\|p^{r\cdot m}T_m\|\leqq\|p^{r\cdot m}T_m\|_{\rho_m}\leqq\|p^{r\cdot m}g\|_{\rho_m}\to 0$$

lorsque $m \to \infty$. Comme $(\rho_m)^{p^m}$ est indépendant de m, on en déduit que $\lim_{m \to \infty} \|p^{m \cdot r} \cdot P_m\| = 0$. Donc P_m converge vers un élément f de $\mathscr{H}_{r \cdot \mathbb{C}_p}$. On a alors

$$D^j(f(\gamma-1)\cdot(1+T)) = f(u^j \cdot \gamma - 1)\cdot(1+T) \equiv D^j(g(T)) \text{ modulo } \omega_{m+1}(T)$$

pour tout m et tout $0 \leqq j < r$. D'où l'égalité $f(\gamma-1)\cdot(1+T) = g(T)$.

Montrons (ii). On vérifie facilement que μ_j ainsi défini est une distribution sur $\mathbb{Z}_p$. Le fait que $\psi(g)=0$ implique comme en 1.2.5 qu'elle est à support dans $\mathbb{Z}_p^\times$. Il reste à vérifier que

$$\lim_{m \to \infty} p^{(r-j)\cdot n} \cdot \sum_{0 \leqq k \leqq j} \binom{j}{k} \cdot (-a)^k \int_{B(a,p^n)} d\mu_k = 0.$$

Un calcul facile montre que

$$\sum_{0 \leqq k \leqq j} \binom{j}{k} \cdot (-a)^k \int_{B(a,p^n)} d\mu_k = p^{-n} \cdot \sum \zeta^{-a} \sum_{0 \leqq k \leqq j} (-1)^k \cdot \binom{j}{k} \cdot D^k(g_a)(\zeta^b - 1)$$

où $g_a(T) = g((1+T)^a - 1)$, où b est l'inverse de a dans $\mathbb{Z}_p^\times$ et où ζ parcourt les racines p^n-ièmes de l'unité. On a alors

$$\left\| \sum_{0 \leqq k \leqq j} \binom{j}{k} \cdot (-a)^k \int_{B(a,p^n)} d\mu_k \right\| \leqq \left\| \sum_{0 \leqq k \leqq j} (-1)^k \cdot \binom{j}{k} \cdot D^k(g_a) \right\|_{\rho_n} \leqq C \cdot p^{(r-j)\cdot n}$$

où C est une constante.

Montrons (iii). Ecrivons $g_\mu(T) = f(\gamma-1)\cdot(1+T)$ avec $f \in \mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$. Pour montrer que $f_\mu = f$, il suffit de montrer que $\eta(f(u^{-j}\gamma - 1)) = \eta(f_\mu(u^{-j}\gamma - 1))$ pour $0 \leqq j < r$ et η caractère d'ordre fini. Faisons le calcul pour $j=0$, le calcul pour j quelconque étant le même en remplaçant μ_0 par μ_j et g par $D^j(g)$. Soit η un caractère d'ordre p^m de Γ et $\tilde{\eta}$ le caractère de $\mathbb{Z}_p^\times$ déduit de η: $\tilde{\eta} = \eta \circ \chi^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\eta(f_\mu(\gamma-1)) &= \int \tilde{\eta} \cdot d\mu_0 = \sum_{a \bmod p^m} \tilde{\eta}(a) \cdot \mu_0(a, p^m) = \dots \\
&= p^{-m} \cdot G(\eta, \zeta_m^{-1}) \cdot \sum_{b \bmod p^m} \tilde{\eta}(b)^{-1} \cdot g(\zeta_m^b - 1) \\
&= G(\eta^{-1}, \zeta_m)^{-1} \cdot \sum_{b \bmod p^m} \tilde{\eta}(b)^{-1} \cdot g(\zeta_m^b - 1).
\end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que si P est un polynôme, $P(X) = \sum a_r \cdot (1+X)^r$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{b \bmod p^m} \tilde{\eta}(b)^{-1} \cdot P(\gamma-1)\cdot(\zeta_m^b) &= \sum_{b \bmod p^m} \tilde{\eta}(b)^{-1} \cdot \sum a_r \cdot \zeta_m^{b \cdot u^r} \\
&= G(\eta^{-1}, \zeta_m) \cdot \sum a_r \cdot \tilde{\eta}(u^r) = G(\eta^{-1}, \zeta_m) \cdot \sum a_r \cdot \eta(\gamma^r) = G(\eta^{-1}, \zeta_m) \cdot \eta(P(\gamma-1)).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\eta(f_\mu(\gamma-1)) = \eta(f(\gamma-1))$, ce qui termine la démonstration de (iii).

1.3 Divisibilité de fonctions de $\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ *par* $\log(1+X)$

Dans la suite, si $f\in\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$, on note $Q_{m,j}(f)(u^{-j}(1+X)-1)$ le polynôme d'interpolation de f modulo $\omega_m(u^{-j}(1+X)-1)$: on a donc $f(u^j\cdot\zeta-1)=Q_{m,j}(f)(\zeta-1)$ pour toute racine p^m-ième de l'unité ζ.

1.3.1 Le lemme suivant m'a été indiqué par D. Barsky. Rappelons que pour $|\alpha|<p^{1-1/(p-1)}$, u^α a un sens.

Lemme. *Soit* $f\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ *avec* $r\geqq 1$. *Supposons qu'il existe* $\alpha\in\mathbb{C}_p$ *avec* $|\alpha|<p^{1-1/(p-1)}$ *tel que* $f(u^\alpha\cdot\zeta-1)=0$ *pour toute racine de l'unité* ζ *d'ordre une puissance de* p. *Alors il existe un élément* g *de* $\mathscr{H}_{r-1,\mathbb{C}_p}$ *tel que*

$$f=(\alpha-\log(1+X)/\log(u))\cdot g$$

et on a pour tout entier j

$$Q_{m,j}(f)=(\alpha-j)\cdot Q_{m,j}(g).$$

Remarque. On utilisera ce lemme essentiellement dans le cas où α est un entier k. La condition est alors équivalente à ce que $Q_{m,k}(f)=0$ pour tout entier m.

Démonstration. On se ramène d'abord au cas où $\alpha=0$. Soit $\tilde{\omega}_m(X)=\omega_m(X)/p^m$. Soit ρ un réel avec $\rho_m<\rho<1$. Par le théorème de continuité de la division euclidienne [A, lemme 4.4.2], it existe un unique couple (g_m, R_m) avec R_m un polynôme de degré $<p^m$ et g_m une série entière convergente sur $B(0,1^-)$ tel que

$$f=g_m\cdot\tilde{\omega}_m+R_m,\ \|R_m\|_\rho\leqq\|f\|_\rho,\ \|g_m\|_\rho\leqq\|f\|_\rho/\|\tilde{\omega}_m\|_\rho.$$

Comme $f(\zeta-1)=0$ pour toute racine ζ d'ordre une puissance de p, les polynômes R_m sont identiquement nuls. Montrons que la suite des g_m converge dans $\mathscr{H}_{\mathbb{C}_p}$. On a

$$0=g_{m+1}\cdot\tilde{\omega}_{m+1}-g_m\cdot\tilde{\omega}_m=g_{m+1}\cdot(\tilde{\omega}_{m+1}-\tilde{\omega}_m)+\tilde{\omega}_m\cdot(g_{m+1}-g_m).$$

Pour m tel que $\rho\leqq\rho_m$, on a $\|g_{m+1}\|_\rho\leqq C^{te}\cdot\|f\|_\rho$. On a d'autre part $\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{\omega}_{m+1}-\tilde{\omega}_m=0$ et $\|\tilde{\omega}_m\|_\rho$ reste borné lorsque $m\to\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{m\to\infty}\|g_{m+1}-g_m\|_\rho=0$. Posons $g=-\log(u)\cdot\lim\limits_{m\to\infty}g_m$. Comme $\log(1+X)=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{\omega}_m(X)$, on a bien

$$f=-\log(1+X)\cdot g/\log(u).$$

Il est alors clair que si $f\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ avec $r\geqq 1$, on a $g\in\mathscr{H}_{r-1,\mathbb{C}_p}$ et que pour tout j, on a $Q_{m,j}(f)=-j\cdot Q_{m,j}(g)$.

1.3.2. Lemme. *Soient* $f\in\mathscr{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ *et* $g\in\mathscr{H}_{s,\mathbb{C}_p}$ *avec* $s\leqq r$. *On suppose qu'il existe un polynôme* $q(X)$ *tel que*

$$Q_{m,j}(f)=q(j)\cdot Q_{m,j}(g)$$

pour j *assez grand (une infinité de* j*). Alors, on a*

$$f=q(\log(1+X)/\log(u))\cdot g.$$

De plus, $Q_{m,j}(f)=q(j)\cdot Q_{m,j}(g)$ *pour tout entier* j *et le degré du polynôme* q *est égal à* $r-s$ *si* r *et* s *ont été choisis minimaux.*

Démonstration. La fonction $G=q(\log(1+X)/\log(u))\cdot g$ appartient à $\mathcal{H}_{r',\mathbb{C}_p}$ avec $r'=s+\deg(q)$ et on a $Q_{m,j}(G)=q(j)\cdot Q_{m,j}(g)$ pour tout entier j. Donc, $Q_{m,j}(G)=Q_{m,j}(f)$ pour une infinité de j et donc pour au moins $\mathrm{Sup}(r',r)$ valeurs de j. On en déduit que $G=f$. Le lemme s'en déduit.

1.3.3. Lemme. *Soit $f\in\mathcal{H}_{r,\mathbb{C}_p}$. Il existe un entier $s>0$ minimal et $g\in\mathcal{H}_{s,\mathbb{C}_p}$ (unique à une constante multiplicative près) tels que, pour j assez grand*

$$Q_{m,j}(f)=\lambda_j\cdot Q_{m,j}(g)$$

avec $\lambda_j\in\mathbb{C}_p$. De plus, pour tout j, $(Q_{m,j}(g))_m$ est non identiquement nul.

Démonstration. L'existence de g est claire. Montrons-en l'unicité. Remarquons d'abord que les λ_j sont nuls sauf peut-être pour un nombre fini. Soient g_1 et g_2 deux telles fonctions: $Q_{m,j}(f)=\lambda_j\cdot Q_{m,j}(g_1)$ et $Q_{m,j}(f)=\mu_j\cdot Q_{m,j}(g_2)$. Il existe un entier j_0 tel que $\lambda_{j_0}\neq 0$ et $\mu_{j_0}\neq 0$. Alors, $\lambda_{j_0}\cdot g_2-\mu_{j_0}\cdot g_1$ vérifie les conditions du lemme 1.3.1 pour $\alpha=j_0$ et on a

$$\lambda_{j_0}\cdot g_2-\mu_{j_0}\cdot g_1=(j_0-\log(1+X)/\log(u))\cdot g$$

avec $g\in\mathcal{H}_{s-1,\mathbb{C}_p}$. De plus, pour $j\gg 0$, on a encore

$$Q_{m,j}(g)=(j+j_0)\,Q_{m,j}(\lambda_{j_0}\cdot g_2-\mu_{j_0}\cdot g_1)=(j+j_0)(\lambda_{j_0}/\mu_j-\mu_{j_0}/\lambda_j)\cdot Q_{m,j}(f).$$

La condition de minimalité implique que $g=0$. D'où l'unicité à constante près. S'il existait un entier j tel que $(Q_{m,j}(g))_m=0$, on aurait une contradiction avec la minimalité de g d'après le lemme 1.3.1.

1.3.4 Lemme. *Soit $J=[j_0,\ldots,j_1]$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant r éléments. Il existe des constantes absolues $\alpha_{J,j,k}$ pour $j\in J$, $k\in\mathbb{Z}$ telles que, pour tout $f\in\mathcal{H}_{r,\mathbb{C}_p}$, on ait*

$$f(u^k\zeta-1)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j\in J}\alpha_{J,j,k}\cdot Q_{m,j}(f)(u^{k-j}\cdot\zeta-1)$$

pour tout entier k et toute racine ζ d'ordre une puissance de p.

Démonstration. Montrons-le pour $J=\{0,\ldots,r\}$ et $k=r+1$. L'égalité

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left\|p^{(r-(r+1))\cdot m}\cdot\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{j-r-1}\cdot\binom{r+1}{j}\cdot Q_{m,j}(f)(u^{r+1-j}\cdot(1+X)-1)\right\|\right)=0$$

est encore vraie. Comme pour $m>0$, on a $f(u^{r+1}\zeta-1)=Q_{m,k}(f)(\zeta-1)$, on en déduit que

$$f(u^{r+1}\zeta-1)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j-r}\cdot\binom{r+1}{j}\cdot Q_{m,j}(f)(u^{r+1-j}\cdot(1+X)-1).$$

Le cas général s'en déduit.

1.3.5. Remarque. Soit $(\lambda_j)_j$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Il existe un élément f de $\mathcal{H}_{r,\mathbb{C}_p}$ tel que $Q_{m,j}(f)=\lambda_j$ pour j suffisamment grand si et seulement s'il existe un polynôme q de degré $\leq r$ tel que $q(j)=\lambda_j$. En effet, l'existence de f est équivalente à ce que $\sum_{k=0}^{j}(-1)^{i-k}\cdot\binom{i}{k}\cdot\lambda_k=0$ pour $j\geqq r$, ce qui est équivalent à l'existence d'un polynôme q de degré $\leqq r$ tel $q(j)=\lambda_j$.

1.4 Rappels sur B_{cris}

1.4.1 Rappelons brièvement la définition des anneaux R, $A_{\mathrm{cris}}=W^{\mathrm{DP}}(R)$, B^+_{cris}, B_{cris}, B_{dR} ([F, Bu], ...).

Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$. L'anneau R est défini comme l'ensemble des suites $x=(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments $x^{(n)}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ vérifiant $x^{(n+1)\cdot p}=x^{(n)}$ muni des lois d'addition et de multiplication définies par

$$(x\,y)^{(n)}=x^{(n)}y^{(n)} \quad \text{et} \quad (x+y)^{(n)}=\lim_{m\to\infty}(x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m}.$$

Muni de la valuation $v_R(x)=v(x^{(0)})$ où v est la valuation de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ normalisée par $v(p)=1$, R est un anneau de valuation complet et de caractéristique p. On munit l'anneau des vecteurs de Witt $W(R)$ à coefficients dans R de la topologie p-adique naturelle. Soit θ l'homomorphisme $W(R)\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ défini par

$$\theta((x_0,\ldots,x_n,\ldots)=\sum p^n\cdot x_n^{(n)}.$$

Son noyau est principal. Soit ξ un générateur. On définit alors $A_{\mathrm{cris}}=W^{\mathrm{DP}}(R)$ comme le séparé complété du $W(R)$-sous-module de $W(R)[p^{-1}]$ engendré par $W(R)$ et par les $\gamma_n(\xi)=\xi^n/n!$ pour $n\geqq 0$. Il contient $W(\bar{k})$. Rappelons que l'on démontre que si $W_1(R)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in W(R)$ tel que $v_R(x_0)\geqq 1\}$, il est aussi égal à $\ker\theta+p\cdot W(R)$ et que si $x\in W_1(R)$, $\gamma_n(x)=x^n/n!$ appartient à A_{cris}. Si $[\alpha]$ est le représentant de Teichmüller de $\alpha\in R$ avec $\alpha^{(0)}=1$ et $\alpha^{(1)}\neq 1$,

$$t=\log([\alpha])=\sum(-1)^{n+1}\cdot([\alpha]-1)^n/n$$

est un élément de A_{cris} vérifiant $gt=\chi(g)\cdot t$ si χ est le caractère cyclotomique. On pose $B^+_{\mathrm{cris}}=A_{\mathrm{cris}}[1/p]$ et $B_{\mathrm{cris}}=B^+_{\mathrm{cris}}[t^{-1}]$.

On pose $\mathrm{Fil}^m W(R)=(\ker\theta)^m$. On définit B^+_{dR} comme la limite projective des $W(R)[p^{-1}]/\mathrm{Fil}^m W(R)[p^{-1}]$ et on le munit de la topologie de la limite projective avec la topologie p-adique sur les quotients. Il contient $\bar{H}$. Si l'on pose $W_m(R)=W_1(R)^m$, un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les

$$\begin{aligned}&W_m(R)+\mathrm{Fil}^{m+1}W(R)[p^{-1}]\\&\quad=p^m W(R)+p^{m-1}\mathrm{Fil}^1 W(R)+\ldots+\mathrm{Fil}^m W(R)+\mathrm{Fil}^{m+1}W(R)[p^{-1}].\end{aligned}$$

On montre que B^+_{cris} est contenu dans B^+_{dR}. On vérifie que $W_{p\cdot m}(R)$ est contenu dans $p^m A_{\mathrm{cris}}$ (on a en effet

$$W_p(R)=\sum_{0\leqq j\leqq p}p^{p-j}\cdot\mathrm{Fil}^j W(R);$$

si $x\in\mathrm{Fil}^1 W(R)$, $\gamma_j(x)$ appartient à A_{cris}, donc $p^{p-j}\cdot\mathrm{Fil}^j W(R)\subset p^{p-j}\cdot j!\,A_{\mathrm{cris}}\subset pA_{\mathrm{cris}}$. On en déduit que $W_p(R)$ est contenu dans pA_{cris} et donc que $W_{p\cdot m}(R)=W_p(R)^m\subset p^m A_{\mathrm{cris}}$).

L'homomorphisme θ s'étend à B^+_{dR}. Son noyau est alors égal à tB^+_{dR}. On pose enfin $B_{\mathrm{dR}}=B^+_{\mathrm{dR}}[t^{-1}]$ et $\mathrm{Fil}^m B_{\mathrm{dR}}=t^m B^+_{\mathrm{dR}}$ pour m entier positif ou négatif.

On note $\mathrm{Fil}^m B_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{Fil}^m A_{\mathrm{cris}}$) la filtration induite sur B_{cris} (resp. sur A_{cris}). En fait, $\mathrm{Fil}^m A_{\mathrm{cris}}$ est aussi l'adhérence de $\mathrm{Fil}^m W(R)=(\ker\theta)^m$ dans A_{cris}.

On a les isomorphismes

$$B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^m B_{\mathrm{dR}} \simeq B_{\mathrm{cris}}/\mathrm{Fil}^m B_{\mathrm{cris}}$$
$$\mathrm{Fil}^m B_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^{m+1} B_{\mathrm{dR}} = \mathrm{Fil}^m \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}/\mathrm{Fil}^{m+1} B_{\mathrm{cris}} \simeq \mathbb{C}_p t^m \simeq \mathbb{C}_p(m).$$

Enfin, l'homomorphisme de Frobenius φ défini sur R par $\varphi(x)=x^p$ s'étend à $W(R)$ puis à A_{cris} et à B_{cris} en un homomorphisme σ-linéaire.

1.5 Quelques morphismes de spécialisation à valeurs dans B_{cris}

Rappelons que H est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k de caractéristique p et absolument non ramifié; on pose $H_0=H(\mu_p)$ et $H_n=H(\mu_{p^{n+1}})$.

1.5.1 Soit $W^+(R)$ le groupe des éléments x de $W(R)$ tels que $v_R(x_0-1)>0$. Nous sommes tout particulièrement intéressés par la famille d'éléments de $W^+(R)$ suivants. Soit $\varepsilon=(\zeta_n)_{n\geq 0}$ un système de racines de l'unité telles que ζ_0 soit une racine de l'unité d'ordre p et $\zeta_{n+1}^p=\zeta_n$. On note $\tilde{\beta}_n=\varphi^{-n}(\varepsilon)$ l'élément de R défini par $(\tilde{\beta}_n)^{(m)}=\zeta_{n+m}$ et $\beta_n=[\tilde{\beta}_n]=\varphi^{-n}([\varepsilon])$ son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. On vérifie facilement que $v_R((\beta_n)_0-1)=1/(p-1)p^n$ et donc que β_n appartient *à* $W^+(R)$. On pose $t=\log(\beta_{-1})$[1].

1.5.2 Si $f\in\mathscr{H}_{r,H}$ avec $f(T)=\sum_{m\geq 0} a_m T^m$, on pose $C_r(f)=\mathrm{Sup}_m(|a_m|/m^r)$.

Proposition. (i) [F1] *Soit f un élément de $\mathscr{H}_H$ (resp. $\mathscr{H}_{\bar{H}}$). Alors, si x est un élément de $W^+(R)$, $f(x-1)$ converge dans B_{cris}^+ (resp. B_{dR}^+). L'application ainsi définie de $W^+(R)$ dans B_{cris}^+ (resp. B_{dR}^+) est continue. Si x est un élément de $W^+(R)$, l'homomorphisme $f\mapsto f(x-1)$ est continu.*
(ii) *Soit r un entier ≥ 1. Il existe une constante C telle que, si f est un élément de $\mathscr{H}_H$ qui est $O(\log^r)$, on a pour tout entier $n\geq 0$*

$$p^{(n+1)\cdot r}\cdot f(\beta_n-1)\in C\cdot\tilde{C}_r(f)\,A_{\mathrm{cris}}$$

avec $|\tilde{C}_r(f)|\leq C_r(f)$.
(iii) *Si $f\in W[\![T]\!]$, $f(\beta_n-1)$ appartient à A_{cris}.*

Démonstration. L'élément f de $\mathscr{H}_H$ admet un développement en série $f(T)=\sum_{n\geq 0} a_n\cdot T^n$ où $|a_n|\cdot\rho^n\to 0$ pour tout $\rho<1$ et $a_n\in H$. D'autre part, si x est un élément de $W^+(R)$, posons $x=1+y$. Il existe un entier r tel que $z=y^r$ appartient à $W_p(R)=W_1(R)^p$ (on rappelle que $W_1(R)=\mathrm{Fil}^1 W(R)+pW(R)$). Si $n=q(n)\cdot r+r(n)$ avec $0\leq r(n)<r$, on a

$$a_n\cdot(x-1)^n=a_n\cdot y^{r(n)}\cdot z^{q(n)}\in a_n\,W_{pq(n)}(R)\subset a_n\cdot p^{q(n)}A_{\mathrm{cris}}.$$

Mais on a

$$|a_n\cdot p^{q(n)}|\leq|a_n|\cdot p^{1-n/r}$$

ce qui tend vers 0 lorsque $n\to\infty$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n\cdot(x-1)^n$ converge dans B_{cris}^+.

[1] Remarquons qu'avec ces conventions, le $[\varepsilon]$ de J.-M. Fontaine est $\beta_{-1}=(\beta_0)^p$

Montrons maintenant la continuité de l'application f de $W^+(R)$ dans B^+_{cris}. Soit s un entier positif et soit h un élément de $W_{p\cdot m}(R)$: alors $x+h\in W^+(R)$. On a

$$a_n\cdot[(x-1+h)^n-(x-1)^n]\in \sum_{1\leqq j\leqq n} a_n\cdot p^{m\cdot j+q(n-j)}A_{\mathrm{cris}}$$

où $q(n-j)$ a toujours la même signification. On a pour $1\leqq j\leqq n$

$$\begin{aligned} v(a_n)+m\cdot j+q(n-j) &\geqq v(a_n)+m\cdot j-1+(n-j)/r\\ &\geqq v(a_n)+n/r+(m-1/r)j-1\geqq v(a_n)+n/r+m-2. \end{aligned}$$

Il existe un entier N tel que si $n\geqq N$, on a $v(a_n)+n/r\geqq 2$ et dans ce cas

$$a_n\cdot[(x-1+h)^n-(x-1)^n]\in p^s A_{\mathrm{cris}} \quad \text{pour} \quad m\geqq s.$$

On prend de plus $m\geqq M=\operatorname*{Sup}_{1\leqq n\leqq N}(-v(a_n)-n/r+2+s)$ et pour tout n et tout $m\geqq \mathrm{Sup}(s,M)$, on a alors $a_n\cdot[(x-1+h)^n-(x-1)^n]\in p^s A_{\mathrm{cris}}$, ce qui démontre la continuité de f sur $W^+(R)$.

Montrons la continuité de $f\mapsto f(x-1)$ et (ii). On reprend pour cela la démonstration de (i) en notant $r(x)$ l'entier r tel que $(x-1)^r$ appartient à $W_p(R)$. Si $C(x)=\operatorname*{Sup}_n(|a_n\, p^{-1+n/r(x)}|)$, on a donc pour un $\tilde{C}(x)$ tel que $|\tilde{C}(x)|\leqq C(x)$

$$f(x-1)\in\tilde{C}(x)\cdot A_{\mathrm{cris}}.$$

On a d'autre part $C(x)\leqq p\cdot\|f\|_\rho$ dès que $1>\rho>p^{-1/r(x)}$. D'où la continuité de $f\mapsto f(x)$. Supposons maintenant que f est $O(\log^r)$. Alors, $C_r(f)=\operatorname*{Sup}_n(|a_n|/n^r)$ existe et on a

$$C(x)\leqq p\cdot C_r(f)\cdot\operatorname*{Sup}_n(n^r p^{-n/r(x)}).$$

On vérifie alors facilement que $C(x)\leqq C_1\cdot C_r(f)\cdot r(x)^r$ où C_1 ne dépend que de r.

Calculons maintenant $r(\beta_n)$: un élément $(u_0,u_1,\dots,u_n,\dots)$ de $W(R)$ appartient à $W_1(R)$ si et seulement si $v_R(u_0)\geqq 1$ i.e. si et seulement si $|u_0^{(0)}|\leqq p^{-1}$. Or $|((\beta_n-1)^r)_0^{(0)}|\leqq p^{-1}$ si et seulement si $|(\tilde{\beta}_n)^{(0)}-1|^r\leqq p^{-1}$. En remarquant que $|(\tilde{\beta}_n)^{(0)}-1|\leqq p^{-1/(p-1)\cdot p^n}$, on en déduit que

$$r(\beta_n)=(p-1)\cdot p^{n+1}$$

convient. L'assertion (ii) s'en déduit. Quant à la propriété (iii), elle est claire.

1.5.3 Définissons les deux homomorphismes de spécialisation suivants

$$\begin{aligned} \rho_n&: \mathscr{H}_H\to H_n\\ \rho_{n,\mathrm{cris}}&: \mathscr{H}_H\to \mathrm{Fil}^0 B_{\mathrm{cris}} \end{aligned}$$

par $\rho_n(f)=f(\zeta_n-1)$ et $\rho_{n,\mathrm{cris}}(f)=f(\beta_n-1)$ pour $f\in\mathscr{H}_H$.

Posons d'autre part pour $f\in\mathscr{H}_H$,

$$\mathscr{R}_h(f)=\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\cdot(i!)^{-1}D^i(f)(\log(1+T))^i.$$

On définit ainsi un opérateur $\mathscr{R}_h$ de $\mathscr{H}_H$ dans lui-même. Comme $\log\beta_n = p^{-(n+1)}\cdot t$, on a

$$\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(f)) = \sum_{i=0}^{h-1} (-1)^i\cdot(i!)^{-1}\cdot p^{-(n+1)i}\cdot D^i(f)(\beta_n-1)\cdot t^i.$$

Comme $\theta(t)=0$, on a $\theta(\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(f)))=\rho_n(f)$.

Proposition. *Soit f un élément de $\mathscr{H}_H$.* Alors,

(i) $\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(f))-\rho_n(f)\in \mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{dR}}$;
(ii) $\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(f))\in \mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{dR}}$ *si et seulement si* $\rho_n(f)=0$.

Démonstration. L'assertion (ii) se déduit de (i). Pour (i), il s'agit de montrer que

$$\sum_{i=0}^{h-1} p^{-(n+1)i}\cdot(-1)^i\cdot(i!)^{-1}\cdot D^i(f)(\beta_n-1)\cdot t^i - f(\zeta_n-1)$$

appartient à $\mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{dR}}$. On a la formule[2]

$$\zeta_n=\beta_n\cdot\exp(-t/p^{n+1}).$$

En effet, la puissance p^{n+1}-ième des deux membres est égale à 1 et les deux membres ont même image par θ. Posons $g(Z)=f(\beta_n\cdot e^Z-1)$. Pour $Z\in\mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$, on a alors

$$\sum_{i=0}^{h-1} g^{(i)}(0)\cdot Z^i/(i!)-g(Z)=Z^h\cdot k(Z)$$

où $k(Z)$ appartient à B_{dR}^+. On remarque que $g^{(i)}(0)=D^i(f)(\beta_n-1)$ et on applique la formule précédente à $Z=-t/p^{n+1}$. On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{h-1} D^i(f)(\beta_n-1)\cdot(-t/p^{n+1})^i/(i!)-f(\zeta_n-1)=(-t/p^{n+1})^h\cdot k(-t/p^{n+1})$$

et la proposition.

1.5.4 Lemme. *Soit $f\in\mathscr{H}_H$. Alors on a les formules*

(i) $$\rho_{n+1}(\varphi(f))=\rho_n(f^\sigma) \text{ pour } n\geqq -1$$
$$\rho_{-1}(\varphi(f))=\rho_{-1}(f^\sigma)$$

(ii) $$p\cdot\rho_n(\psi(f^\sigma))=\mathrm{Tr}_{H_{n+1}/H_n}(\rho_{n+1}(f))$$
$$p\cdot\rho_{-1}(\psi(f^\sigma))=\mathrm{Tr}_{H_0/H}(\rho_0(f))+\rho_{-1}(f).$$

[2] qui m'a été révélée par P. Colmez

Démonstration. L'assertion (i) est claire. Pour (ii), il s'agit de montrer que

$$p\cdot\psi(f^\sigma)(\zeta_n-1)=\mathrm{Tr}_{H_{n+1}/H_n}(f(\zeta_{n+1}-1)) \quad \text{pour } n\geqq 0$$
$$p\cdot\psi(f^\sigma)(0)=\mathrm{Tr}_{H_0/H}(f(\zeta_0-1))+f(0),$$

ce qui se fait facilement (cf. [P1, lemme 1.4]).

2 Etude locale des «points» d'une représentation p-adique et $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique

2.1 Rappels

2.1.1 Soit K une extension finie de H dont le corps résiduel est égal au corps résiduel k de H. Soit V une représentation p-adique de G_K, c'est-à-dire un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. Rappelons que V est de de Rham si $\dim_K \underline{D}_{\mathrm{dR}}(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ où l'on pose $\underline{D}_{\mathrm{dR}}(V)=(B_{\mathrm{dR}}\underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)^{G_K}$. On définit comme dans [FP1] l'espace tangent de V sur K par

$$t_V(K)=((B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Si L est une extension de K, on a alors $t_V(L)=L\underset{K}{\otimes} t_V(K)$.

Soit $\underline{D}(V)=(B_{\mathrm{cris}}\underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)^{G_K}$. C'est un H-espace vectoriel de dimension finie muni d'une structure de φ-module filtré sur K, c'est-à-dire qu'il est muni d'un automorphisme φ σ-semi-linéaire et que $\underline{D}(V)_K=K\underset{H}{\otimes}\underline{D}(V)$ est muni d'une filtration décroissante exhaustive et séparée $\mathrm{Fil}^i\underline{D}(V)_K$. On a une inclusion naturelle de $\underline{D}(V)_K$ dans $\underline{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Rappelons que V est dite cristalline si et seulement si $\dim_H \underline{D}(V)=\dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

2.1.2 Bloch et Kato [BK] ont défini un sous-espace vectoriel $H^1_f(K,V)$ du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de cohomologie galoisienne $H^1(G_K,V)=H^1(K,V)$ comme le noyau de l'application

$$H^1(K,V)\to H^1(K,B_{\mathrm{cris}}\underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V).$$

Pour tout réseau $\underline{T}$ de V stable par G_K, le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $H^1(K,\underline{T})$, image réciproque de $H^1_f(K,V)$ dans $H^1(K,\underline{T})$ est noté $H^1_f(K,\underline{T})$. On a $\mathbb{Q}_p\underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} H^1_f(K,\underline{T})=H^1_f(K,V)$.

Notons aussi comme Bloch et Kato $H^1_e(K,V)$ le noyau de l'application

$$H^1(K,V)\to H^1(K,B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)$$

(resp. $H^1_e(K,\underline{T})$ le noyau de l'application

$$H^1(K,\underline{T})\to H^1(K,B_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\underset{\mathbb{Q}_p}{\otimes} V)).$$

C'est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel (resp. un sous-$\mathbb{Z}_p$-module) de $H^1_f(K, V)$ (resp. de $H^1_f(K, \underline{\mathrm{T}})$.

2.1.3 Lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on a

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(K, V) = [K:\mathbb{Q}_p] \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p} V + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V) + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V^*(1)),$$
$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1_f(K, V) = [K:\mathbb{Q}_p] \cdot \dim_K t_V(K) + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V).$$

On note $P(V, X)$ le polynôme caractéristique réciproque du H-endomorphisme φ^f de $\underline{D}(V)$

$$P(V, X) = \det(1 - \varphi^f X \mid \underline{D}(V))$$

où le corps résiduel k de K est fini de cardinal p^f. Si $P(V, X) = \prod (1 - \alpha X)$, les nombres de Newton de $\underline{D}(V)$ sont alors

$$h_N(r) = \#\{\alpha \text{ tel que } \mathrm{ord}_p(\alpha) = r/f\}$$

pour $r \in \mathbb{Q}$.

2.1.4 On démontre à partir de la suite exacte de G_K-modules

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{\mathrm{cris}} \to B_{\mathrm{cris}} \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$
$$x \mapsto ((1-\varphi)x, x \text{ modulo } B_{\mathrm{dR}}^+)$$

que l'on a la suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$0 \to H^0(K, V) \to \underline{D}(V) \to t_V(K) \oplus \underline{D}(V) \to H^1_f(K, V) \to 0$$

où la flèche de $\underline{D}(V)$ dans $t_V(K) \oplus \underline{D}(V)$ est induite par la projection naturelle $\underline{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to t_V(K)$ restreinte à $\underline{D}(V) \subset \underline{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et par l'application $1-\varphi$: $\underline{D}(V) \to \underline{D}(V)$. Appelons exponentielle de V sur K (notée $\exp_{K,V}$) l'application surjective $t_V(K) \oplus \underline{D}(V) \to H^1_f(K, V) \subset H^1(K, V)$. L'image de $t_V(K)$ par $\exp_{K,V}$ est égale à $H^1_e(K, V)$.

2.1.5 Supposons que $K = H$ est absolument non ramifié, que V est cristalline et que la longueur de la filtration sur $\underline{D}(V)$ est inférieure à $p-1$ (c'est-à-dire qu'il existe des entiers a et b avec $0 \leqq b-a < p-1$ tel que $\mathrm{Fil}^a \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$, $\mathrm{Fil}^b \underline{D}(V) = 0$. On démontre alors [FL] qu'il existe un W-sous-module M de $\underline{D}(V)$ tel que, si l'on pose $\mathrm{Fil}^i M = M \cap \mathrm{Fil}^i \underline{D}(V)$, on ait

(i) $\mathrm{Fil}^i M$ est facteur direct dans M,
(ii) $\varphi(\mathrm{Fil}^i M) \subset p^i M$,
(iii) $\sum_i p^{-i} \varphi(\mathrm{Fil}^i M) = M$.

On dit alors que M est un réseau adapté à D.

Proposition [BK]. *Soit V une représentation cristalline de G_H telle qu'il existe deux entiers a et b tels que $a \leqq 0$, $b > 0$, $b - a < p-1$ et $\mathrm{Fil}^a \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$, $\mathrm{Fil}^b \underline{D}(V) = 0$. Soit M un réseau adapté de $\underline{D}(V)$. Alors, $\underline{\mathrm{T}} = \mathrm{Fil}^0(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M)^{\varphi=1}$ est un réseau de V stable par G_K et $H^1_e(H, \underline{\mathrm{T}})$, est canoniquement isomorphe à $M/(\varphi-1)\,\mathrm{Fil}^0 M$. Si l'on note δ_V l'application $M \to H^1_e(H, \underline{\mathrm{T}})$ ainsi définie, on a alors $\exp_{H,V} = \delta_V \circ (1-\varphi)$.*

2.1.6 Exemples. Soit $\mathbb{Q}_p(1)$ la représentation p-adique associée au caractère cyclotomique $\chi\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$: si $\mathbb{Z}_p(1) = \lim\operatorname{proj}\, \mu_{p^{n+1}}$, on a $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$.

Si i est un entier, on pose $\mathbb{Q}_p(i) = \mathbb{Q}_p(1)^{\otimes i}$ pour $i \geqq 0$, $= \mathbb{Q}_p(1)^{*\otimes -i}$ pour $i < 0$. Soit $H[-i] = \underline{D}(\mathbb{Q}_p(i))$ le φ-module filtré associé à $\mathbb{Q}_p(i)$: on note e_{-i} la base canonique du H-espace vectoriel $H[-i]$: on a $\varphi e_{-i} = p^{-i} e_{-i}$. La filtration sur $H[-i]$ est donnée par $\mathrm{Fil}^{-i} H[-i] = H[-i]$, $\mathrm{Fil}^{-i+1} H[-i] = 0$.

Si V est une représentation p-adique, on note $V(i) = V \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i)$; si D est un φ-module filtré, on note $D[i] = D \otimes H[i]$. On a donc $\underline{D}(V(i)) = \underline{D}(V)[-i]$.

2.2 Résolution de l'equation $(1-\varphi)\, G = g$

On pose $H_\infty = H(\mu_{p^\infty})$, $H_0 = H(\mu_p)$ comme dans 1.5. Désormais, *V est une représentation p-adique cristalline de G_H de dimension d.* Soit h un entier positif tel que $\mathrm{Fil}^{-h} \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$.

2.2.1 L'homomorphisme $\Delta_i\colon \mathscr{H}_H \to H$ (resp. $D\colon \mathscr{H}_H \to \mathscr{H}_H$, resp. $\mathscr{R}_h\colon \mathscr{H}_H \to \mathscr{H}_H$) induit un homomorphisme $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V) \to \underline{D}(V)$ (resp. $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V) \to \mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$) que l'on note de la même manière. On note encore φ l'opérateur $\varphi \otimes \varphi$ agissant sur $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$.

Proposition. (i) *Les solutions dans $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$ de l'équation*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad (1-\varphi)\, G = 0$$

sont de la forme $\sum_{j \geqq 0} v_j \cdot (\log(1+T))^j$ *où* $v_j \in \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-j}}$.

(ii) *Soit* $g \in \mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$. *Alors l'équation*

$$(\mathrm{E}_g) \qquad (1-\varphi)\, G = g$$

a une solution dans $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$ si et seulement si $\Delta_j(g)$ appartient à $(1-p^j\varphi)$ $\underline{D}(V)$ pour tout entier $j \geqq 0$. Cette solution est alors définie à un élément de $\sum_{0 \leqq j} \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-j}} (\log(1+T))^j$ *près.*

(iii) *Si de plus g est un $O(\log^h)$, il en est de même de la solution. Il existe une constante C indépendante de g telle que $C_h(G) \leqq C \cdot C_h(g)$ pour une solution G convenable.*

(iv) *Il existe une constante C' telle que pour tout $g \in W[\![T]\!] \bigotimes_W \underline{D}(V)$, pour tout entier $n \geqq 0$ et pour tout $\tau \in G_{H_n}$, on a*

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot (\tau - 1)\, G(\beta_n - 1) \in C' \cdot \|g\|_1^{-1} A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M$$

pour G une solution convenable de l'équation $(1-\varphi)\, G = g$.

Rappelons que si $f=\sum a_n(f)\cdot T^n \in \mathscr{H}_{h,\mathbb{C}_p}$, on a posé $C_h(f)=\operatorname{Sup}_n(n^{-h}\cdot|a_n(f)|)$, mais qu'il est équivalent de prendre $\operatorname{Sup}_n(p^{-n\cdot h}\cdot\|f\|_{\rho_n})$. Si $f\in\mathscr{H}_{h,\mathbb{C}_p}\otimes \underline{D}(V)$, le choix d'un sous-$W$-module M permet de définir une norme sur $\underline{D}(V)$, d'où $C_h(f)$. Le même remarque est valable pour $\|\ \|_1$. Ainsi, l'existence des constantes ne dépend pas du réseau choisi M. Enfin, pour $j>h$, $\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-j}}$ est nul. Les sommes intervenant dans l'énoncé sont donc finies.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

2.2.2 Montrons d'abord (i). On remarque que si v est un élément de $\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-j}}$, $v\cdot(\log(1+T))^j$ est solution de (E_0) car

$$\varphi v=p^{-j}\cdot v \quad \text{et} \quad \varphi((\log(1+T))^j)=p^j\cdot(\log(1+T))^j.$$

Réciproquement, soit G une solution de (E_0). Alors, $\Delta_j(G)$ appartient à $\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-j}}$. Ainsi $\tilde{G}=G-\sum_{j\leqq h}(\log(1+T))^j\cdot(j!)^{-1}\cdot\Delta_j(G)$ est solution de (E_0) et vérifie $\Delta_j(\tilde{G})=0$ pour $j\leqq h$. Pour $j>h$, on a $\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-j}}=0$. Donc, $\Delta_j(\tilde{G})=0$ pour tout j et $\tilde{G}$ est nul.

2.2.3 Lemme. *Si $g\in T^{h+1}\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$, l'équation*

$$(\mathrm{E}_g)\qquad\qquad (1-\varphi)\,G=g$$

a une unique solution dans $T^{h+1}\mathscr{H}_H\bigotimes_H \underline{D}(V)$. Si de plus g est $O(\log^h)$, la solution est $O(\log^h)$ et il existe une constante C (indépendante de g) telle que $C_h(G)\leqq C\cdot C_h(g)$.

Démonstration. Pour montrer la première partie, il suffit de montrer que si $g\in T^{h+1}\mathscr{H}_H\bigotimes_W M$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n g$ est convergente. Comme V est cristalline et que $\mathrm{Fil}^{-h}\underline{D}(V)=\underline{D}(V)$, il existe une constante C telle que $p^{hn}\varphi^n M\subset C^{-1}M$ (le polygone de Hodge est au dessous du polygone de Newton; si M est adapté au φ-module filtré $\underline{D}(V)$, la constante C peut être prise égale à 1). Si ρ est un réel positif <1, $\rho_{t-1}<\rho\leqq\rho_t$ avec $\rho_t=p^{-1/p^{t-1}\cdot(p-1)}$ et si $n\geqq t$, on a

$$\|\varphi^n(g)\|_\rho\leqq|C|\cdot\|p^{-n\cdot h}\cdot\omega_n(T)^{h+1}\|_{\rho_t}<C'\cdot C_t\cdot p^{n\cdot h}\cdot p^{-n\cdot(h+1)}$$

ce qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit la convergence de la série. L'unicité vient de 2.2.2.

On vient de voir que la solution de l'équation est $G=\sum_{n\geqq 0}\varphi^n(g)$. On a alors

$$\|p^{n\cdot h}\varphi^n(g)\|_{\rho_t}\leqq C\cdot\|g(\varphi^n(T))\|_{\rho_t}$$

où C est une constante dépendant de $\underline{D}(V)$ mais pas de g. Pour $n\leqq t$, on a

$$\|p^{t\cdot h}\varphi^n(g)\|_{\rho_t}<C\cdot\|p^{(t-n)\cdot h}g\|_{\rho_{t-n}}\leqq C'\cdot C_h(g)$$

où C' est une constante. Pour $n>t$, on a

$$\|p^{t\cdot h}\varphi^n(g)\|_{\rho_t}<C\cdot\|p^{(t-n)\cdot h}g\|_{\rho_0/p^{n-t}}<C\cdot\|p^{(t-n)\cdot h}g\|_{\rho_0}\cdot p^{(t-n)\cdot h}\leqq C'\cdot C_h(g);$$

on utilise d'une part 1.1.2, d'autre part le fait que $g\in T^{h+1}\mathbb{C}_p[\![T]\!]$. Le lemme s'en déduit.

2.2.4 Etudions maintenant l'existence des solutions de (E_g). Si l'éq. (E_g) a une solution $G\in\mathscr{H}_H\bigotimes_H \underline{D}(V)$, on a

$$\Delta_j(g)=(1-p^j\cdot\varphi)\,\Delta_j(G),$$

ce qui signifie que $\Delta_j(g)$ appartient à $(1-p^j\cdot\varphi)\ \underline{D}(V)$. Réciproquement, soit g un élément de $\mathscr{H}_H\bigotimes_H\underline{D}(V)$ tel que $\Delta_j(g)=(1-p^j\cdot\varphi)\ G_j$ avec $G_j\in\underline{D}(V)$ pour tout $j\leqq h$. On a

$$(1-\varphi)(G_j\cdot(\log(1+T))^j)=\Delta_j(g)\cdot(\log(1+T))^j.$$

D'autre part, soit $\tilde g=g-\sum_{0\leqq j\leqq h}(\log(1+T))^j\cdot(j!)^{-1}\cdot\Delta_j(g)$. On a $\Delta_j(\tilde g)=0$ pour tout $j\leqq h$. Donc, $\tilde g$ appartient à $T^{h+1}\mathscr{H}_H\bigotimes_H\underline{D}(V)$. Grâce au lemme 2.2.3, l'éq. $(\mathrm{E}_{\tilde g})$ a une solution. Il en est alors de même de l'éq. (E_g). Le reste de la proposition se déduit du lemme 2.2.3. En effet, il existe un sous-$\mathbb{Z}_p$-module M' de $\underline{D}(V)$ tel que tout élément de $(1-p^j\cdot\varphi)\ \underline{D}(V)\cap M$ soit l'image par $1-p^j\cdot\varphi$ d'un élément de M' pour $j=0,\dots,h$. On choisit les G_j dans M' et on a alors pour des constantes convenables

$$C_h(G)\leqq C_1\cdot\mathrm{Sup}(C_h(\tilde G),\ \mathrm{Sup}_{0\leqq j\leqq h}(|G_j|)))\leqq C_2\cdot\mathrm{Sup}(C_h(\tilde g),\ \mathrm{Sup}_{0\leqq j\leqq h}(\Delta_j(g)))\leqq C_3\cdot C_h(g).$$

D'où la proposition.

2.2.5 Montrons maintenant l'assertion (iv) de la proposition 2.2.1. Soit $g\in W[\![T]\!]\bigotimes_W M$. En choisissant une base de M et en suivant la construction de la solution G, on voit que une des solutions G est une combinaison linéaire (infinie), à coefficients *bornés* par une constante ne dépendant que de M, des $\log^i(1+T)$ pour $i\leqq h$ et des $p^{-h\cdot k}\varphi^k(f)$ pour

$$f\in T^{h+1}\cdot H[\![T]\!]\cap(W[\![T]\!]+\sum_{i\leqq h}W\cdot\log^i(1+T)).$$

Il suffit donc de montrer pour chacune des fonctions précédentes que

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)}\cdot(\tau-1)\,F(\beta_n-1)\in\tilde c\cdot A_{\mathrm{cris}}$$

avec $\tilde c$ constante ne dépendant que de h. On a

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)}\cdot(\tau-1)\log^i(\beta_n)=p^{(n+1)\cdot(h-1-i)}\cdot(\chi(\tau)^i-1)\cdot t^i=p^{(n+1)\cdot(h-i)}\cdot u_i\cdot t^i$$

avec $u_i\in\mathbb{Z}_p$ car pour $\tau\in G_{H_n}$, $\chi(\tau)$ est congru à 1 modulo p^{n+1}. Donc, pour $i\leqq h$,

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)}\cdot(\tau-1)\log^i(\beta_n)\in A_{\mathrm{cris}}.$$

Soit maintenant $f\in T^{h+1}\cdot H[\![T]\!]\cap(W[\![T]\!]+\sum_{i\leqq h} W\cdot\log^i(1+T))$, $F=p^{-h\cdot k}\cdot\varphi^k(f)$. Ecrivons $f=f_1+f_2$ avec $f_1\in W[\![T]\!]$ et $f_2\in\sum_{i\leqq h} W\cdot\log^i(1+T)$. Distinguons deux cas selon que $n+1\geqq k$ ou $n+1<k$.

Premier cas: $n+1\geqq k$: pour $h\geqq i$, on a

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)-k\cdot h}\cdot(\tau-1)\cdot\varphi^k\log^i(\beta_n)\in A_{\mathrm{cris}}.$$

En effet, cela vaut

$$p^{(n+1)\cdot(h-1-i)+k(i-h)}\cdot(\tau-1)(t^i)=u\cdot p^{(n+1-k)\cdot(h-i)}\cdot t^i$$

avec $u=(\chi(\tau)-1)/p^{n+1}\in\mathbb{Z}_p$. On peut donc remplacer $p^{(n+1)\cdot(h-1)-h\cdot k}\cdot(\tau-1)$ $\varphi^k(f)(\beta_n-1)$ par $p^{(n+1)\cdot(h-1)-h\cdot k}\cdot(\tau-1)\,\varphi^k(f_1)(\beta_n-1)$. On a

$$\begin{aligned}(\tau-1)\,\varphi^k(f_1)&=(\tau-1)\,f_1(\beta_{n-k}-1)=f_1((\beta_{n-k})^{\chi(\tau)}-1)-f_1(\beta_{n-k}-1)\\&=f_1(\beta_{n-k}\cdot(\beta_{-1})^{p^k\cdot u}-1)-f_1(\beta_{n-k}-1).\end{aligned}$$

Comme $(\beta_{-1})^{p^k}\in 1+p^k\cdot A_{\mathrm{cris}}$ et que $f_1\in W[\![T]\!]$, on obtient que

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)-h\cdot k}\cdot(\tau-1)\,\varphi^k(f_1)(\beta_n-1)\in p^{(n+1)\cdot(h-1)-h\cdot k+k}\cdot A_{\mathrm{cris}}.$$

L'inégalité $(n+1)\cdot(h-1)-h\cdot k+k\geqq 0$ pour $n+1\geqq k$ implique l'assertion désirée:

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)}\cdot(\tau-1)\,F(\beta_n-1)\in A_{\mathrm{cris}}\quad\text{pour}\quad F=p^{-h\cdot k}\varphi^k(f)\quad\text{et}\quad n+1\geqq k.$$

Deuxième cas: $n+1<k$: on a

$$\begin{aligned}(\tau-1)\,\varphi^k f(\beta_n-1)&=(\tau-1)\,f((\beta_{-1})^{p^{k-n-1}}-1)\\&=f((\beta_{-1})^{p^{k-n-1}}(\beta_{-1})^{p^k\cdot u}-1)-f((\beta_{-1})^{p^{k-n-1}}-1)\\&=f(x+y)-f(x)\end{aligned}$$

en posant $x=(\beta_{-1})^{p^{k-n-1}}-1\in p^{k-n-1}\cdot A_{\mathrm{cris}}$ et $y=(\beta_{-1})^{p^{k-n-1}}\cdot((\beta_{-1})^{p^k\cdot u}-1)$ $\in p^k\cdot A_{\mathrm{cris}}$. Si $f=\sum_{m>h} a_m\cdot T^m$ et en utilisant la formule du binôme

$$(x+y)^m-x^m=\sum_{1\leqq j\leqq m}\binom{m}{j}\cdot x^{m-j}\cdot y^j,$$

on en déduit que $a_m\cdot[(x+y)^m-x^m]\in C_m\,A_{\mathrm{cris}}$ avec

$$v(C_m)\geqq\inf_{1\leqq j\leqq m}\{(m-j)\cdot(k-n-1)+j\cdot k+v(a_m)\}=m\cdot(k-n-1)+n+1+v(a_m).$$

Donc,

$$(n+1)\cdot(h-1)-k\cdot h+v(C_m)\geqq(k-n-1)\cdot(m-h)+v(a_m)\geqq(m-h)+v(a_m).$$

Comme $f\in W[\![T]\!]+\sum_{i\leqq h} W\cdot\log^i(1+T)$, les $|a_m\cdot p^{m-h}|$ sont bornés par la constante

$$c=p^h\cdot\operatorname{Sup}(1,\ \operatorname{Sup}_{0\leqq i\leqq h}(\|\log^i(1+T)\|_{p^{-1}})).$$

On en déduit que pour $F = p^{-h \cdot k} \cdot \varphi^k(f)$ et $n+1 < k$,

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot (\tau - 1)\, F(\beta_n - 1) \in \tilde{c} \cdot A_{\mathrm{cris}}$$

avec $\tilde{c}$ de valeur absolue $\leqq c$.

2.2.6 Lemme. *Soit G un élément de $\sum_{0 \leqq j \leqq h-1} (\log(1+T))^j \otimes \underline{D}(V)$. Alors*

$$\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(G)) = 0.$$

Si $G = v \cdot (\log(1+T))^h$ avec $v \in \underline{D}(V)$, on a

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(G)) = (-1)^{h-1} \cdot v \cdot t^h / p^{n+1}.$$

Démonstration. On remarque que $(i!)^{-1} \cdot D^i((\log(1+T))^j) = \binom{j}{i} \cdot (\log(1+T))^{j-i}$ pour $j \geqq i$ et 0 pour $j < i$.

2.2.7 Soit $\mathscr{D}_\infty(V)$ le $W[\![G_\infty]\!]$-module défini par

$$\mathscr{D}_\infty(V) = W[\![T]\!]^{\psi=0} \bigotimes_W \underline{D}(V).$$

Notons $\mathscr{H}(V)$ le H-espace vectoriel des éléments G de $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V)$ tels que $(1-\varphi) G \in \mathscr{D}_\infty(V)$ et $\mathscr{H}'(V)$ le H-espace vectoriel des éléments (G, a) de $\mathscr{H}_H \bigotimes_H \underline{D}(V) \times \underline{D}(V)$ tels que $(1-\varphi)\, G - a \in \mathscr{D}_\infty(V)$. On déduit de ce qui précède la suite exacte (2.1)

$$\begin{aligned} 0 \to \sum_{j \geqq 0} (\log(1+T))^j \otimes \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-j}} \to \mathscr{H}(V) \to \mathscr{D}_\infty(V) \\ \to \bigoplus_{0 \leqq j \leqq h} \underline{D}(V)/(1 - p^j \varphi)\, \underline{D}(V) \to 0: \end{aligned}$$

la première flèche est l'injection naturelle, la seconde est $1-\varphi$, la troisième est $\tilde{\Delta}_{[0,h]} = \bigoplus_{0 \leqq j \leqq h} \tilde{\Delta}_j$ où $\tilde{\Delta}_j$ est le composé de Δ_j avec la projection $\underline{D}(V) \to \underline{D}(V)/(1 - p^j \varphi)\, \underline{D}(V)$ (de manière générale, on note $\tilde{\Delta}_{[r,s]} = \bigoplus_{r \leqq j \leqq s} \tilde{\Delta}_j$ et $\tilde{\Delta} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\Delta}_j$).

On déduit facilement de (2.1) la suite exacte de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} 0 \to \underline{D}(V)^{\varphi=1} \to \Big(\sum_{0 \leqq j \leqq h} (\log(1+T))^j \otimes \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-j}}\Big) \times \underline{D}(V) \to \mathscr{H}'(V) \\ \to \mathscr{D}_\infty(V) \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{[1,h]}} \bigoplus_{1 \leqq j \leqq h} \underline{D}(V)/(1 - p^j \varphi)\, \underline{D}(V) \to 0 \end{aligned}$$

où la première flèche est donnée par $a \mapsto (a, a)$, la seconde est donnée par $(G, a) \mapsto (G + a, (1-\varphi)\, a)$, la troisième par $(G, a) \mapsto (1-\varphi)\, G - a$.

2.3 Construction de familles de points

2.3.1 Soit $\underline{\mathrm{T}}$ un réseau de V stable par G_H. On note $\tilde{H}^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ l'image de $H^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ dans $H^1_f(H_n, V)$. On dit qu'une famille de points $x_n \in H^1_f(H_n, V)$ est entière s'il existe un entier s tel que $p^s \cdot x_n \in \tilde{H}^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ pour tout entier n. Cette notion ne dépend pas du réseau $\underline{\mathrm{T}}$ choisi.

Nous allons associer à un élément $x = (G, a)$ de $\mathscr{H}'(V)$ une famille entière de points de $H^1_f(H_n, V)$. Plus précisément, notons $S_n(x)$ l'image de $(G(\zeta_n - 1), a) \in t_V(H_n) \oplus \underline{D}(V)$ dans $H^1_f(H_n, V)$ par l'application exponentielle:

$$S_n(x) = \exp_{H_n, V}(G(\zeta_n - 1), a).$$

La question que l'on se pose ici est donc de trouver un entier $s(n)$ tel que $p^{s(n)} \cdot S_n(x)$ soit l'image d'un élément de $H^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ et de contrôler la croissance de $s(n)$ avec n.

2.3.2 Choisissons un W-réseau M de $\underline{D}(V)$ et posons dans le par. 2.3

$$\underline{\mathrm{T}} = \mathrm{Fil}^0(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M)^{\varphi = 1} \underset{\text{déf}}{=} (t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M)^{\varphi = 1} \cap \mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_H \underline{D}(V))$$

où b est un entier tel que $\mathrm{Fil}^b \underline{D}(V) = 0$. Rappelons que h est un entier positif tel que $\mathrm{Fil}^{-h} \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$. Notons $\mathscr{H}'_M(V)$ (resp. $\mathscr{H}_M(V)$) le W-module des éléments (G, a) de $\mathscr{H}'(V)$ (resp. G de $\mathscr{H}(V)$) tels que $(1-\varphi)\, G \in W[\![T]\!] \bigotimes_W M$, $a \in M$ (resp. $(1-\varphi)\, G \in W[\![T]\!]^{\psi = 0} \bigotimes_W M$).

Soit $x = (G, a)$ un élément de $\mathscr{H}'_M(V)$. Posons

$$R_{n,h} = p^{(n+1)\cdot(h-1)} \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(G))$$

et pour $\tau \in G_{H_n}$

$$R_{n,h,\tau} = (\tau - 1)(R_{n,h}).$$

2.3.3 Lemme. (i) *Pour* $\tau \in G_{H_n}$, $R_{n,h,\tau}$ *appartient à* $\mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W \underline{D}(V)$;

(ii) $(h-1)! \cdot (1-\varphi)\, R_{n,h,\tau}$ *appartient à* $(\tau - 1)(A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M)$;

(iii) *il existe une constante* s_1 *(indépendante de* g*) tele que pour* $\tau \in G_{H_n}$, $(h-1)! \cdot R_{n,h,\tau}$ *appartient à* $p^{-s_1} \cdot (t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M)$.

Démonstration. On vérifie que $(\tau - 1)\, G$ est nul en $\zeta_m - 1$ pour $m \leqq n$ et pour $\tau \in G_{H_n}$. Comme

$$\theta(R_{n,h,\tau}) = p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_n((\tau - 1)\, G) = 0,$$

la proposition 1.5.3 implique que $R_{n,h,\tau}$ appartient à $\mathrm{Fil}^h B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_H \underline{D}(V)$. D'où (i). Comme

$$(1-\varphi)\, R_{n,h} = p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h((1-\varphi)\, G)),$$

on déduit de l'expression explicite de $\mathscr{R}_h$ et du lemme 1.5.2 (iii) que

$$(h-1)! \cdot (1-\varphi)\, R_{n,h} \in A_{\mathrm{cris}} \bigotimes_W M.$$

Enfin, (iii) est une conséquence de la proposition 2.2.1 (iv).

Remarque. Si l'on modifie G par un élément de $(\log(1+T))^i \otimes M$ pour $i=0, \ldots, h-1$, $R_{n,h,\tau}$ est inchangé.

2.3.4 Rappelons le résultat fondamental suivant ([FM], cf. aussi [Bu, exp II, proposition 5.3.7]):

Lemme. *Il existe un entier s_2 tel que l'image de* $\mathrm{Fil}^0(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \underset{W}{\otimes} M)$ *dans* $B_{\mathrm{cris}} \underset{W}{\otimes} M$ *par l'application $1-\varphi$ contient $p^{s_2}(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \underset{W}{\otimes} M)$.*

Ce résultat est énoncé dans [FM] pour un réseau adapté, l'énoncé pour un réseau quelconque s'en déduit en utilisant la commensurabilité des réseaux.

2.3.5 Soit s un entier tel que $s > s_1$ et tel que $p^{s_2} \cdot (h-1)!$ divise p^s dans $\mathbb{Z}_p$. Le lemme précédent implique qu'il existe un élément $\hat{R}_{n,h} \in \mathrm{Fil}^0(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \underset{W}{\otimes} M)$ tel que $(1-\varphi)\hat{R}_{n,h} = p^s \cdot p^{(n+1)\cdot(h-1)} \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h((1-\varphi)G-a))$. La classe de $p^s \cdot R_{n,h,\tau} - (\tau-1)\hat{R}_{n,h}$ dans $H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}})$ est indépendante du choix de $\hat{R}_{n,h}$. Il est clair qu'elle appartient à $H^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}})$ puisque

$$p^s \cdot R_{n,h,\tau} - (\tau-1)\hat{R}_{n,h} = (\tau-1)(p^s \cdot R_{n,h} - \hat{R}_{n,h})$$

avec $p^s \cdot R_{n,h} - \hat{R}_{n,h} \in B_{\mathrm{cris}} \underset{H}{\otimes} \underline{D}(V) = B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. La classe de $p^s \cdot R_{n,h,\tau} - (\tau-1)\hat{R}_{n,h}$ dans $H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}})$ appartient donc à $H^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}})$. On la note $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$. Comme le suggère la notation, on définit aussi $\Sigma_{n,h}(x) = p^{-s} \cdot p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ dans $p^{-s} \cdot \tilde{H}^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}})$.

On peut résumer les résultats montrés dans la proposition suivante:

2.3.6. Proposition. (i) *Si $x=(G,a) \in \mathscr{H}'(V)$, la famille $(p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot S_n(x))_n$ est entière.*
(ii) *Plus précisément, pour un entier s convenable, on construit un point $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ de $H^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}})$ dont l'image dans $H^1_f(H_n, V)$ est $p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot S_n(x)$ de la manière suivante: si $R_{n,h} = p^{n+1\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(G))$ et si $\hat{R}_{n,h}$ est un élément de* $\mathrm{Fil}^0(t^{-b} A_{\mathrm{cris}} \underset{W}{\otimes} M)$ *tel que*

$$(1-\varphi)\hat{R}_{n,h} = p^s \cdot p^{(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h((1-\varphi)G-a)),$$

$p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ est la classe du cocycle $(\tau-1)(p^s \cdot R_{n,h} - \hat{R}_{n,h})$.
(iii) *Une fois fixé M et $\underline{\mathbf{T}}$, on peut choisir un entier s ne dépendant que de M et $\underline{\mathbf{T}}$ convenable pour tout $x \in \mathscr{H}'_M(V)$.*

On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
(G,a) & & \mathscr{H}(V) \times \underline{D}(V) & \xrightarrow{p^s \cdot \Sigma_{n,h}} & H^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot (G(\zeta_n - 1), a) & & t_V(H_n) \times \underline{D}(V) & \xrightarrow[\exp_{H_n, V}]{} & H^1_f(H_n, V).
\end{array}$$

Remarque. Si $a \in (1-\varphi)M$, $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(G,a)$ appartient en fait à $H^1_e(H_n, \underline{\mathbf{T}})$.

Démonstration. Il reste à montrer que $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ et $p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot S_n(x)$ ont même image dans $H^1_f(H_n, V)$. Soit $(\alpha, \delta) \in t_V(H_n) \times \underline{D}(V)$ tel que

$$\exp_{H_n, V}((\alpha, \delta)) = p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x).$$

On a grâce à 1.5.3 (i) et $\mathrm{Fil}^{-h}\, \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$

$$p^s \cdot R_{n,h} - \hat{R}_{n,h} \equiv p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot G(\zeta_n - 1) \text{ modulo } \mathrm{Fil}^0 (B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_H \underline{D}(V))$$

et

$$\begin{aligned}(1-\varphi)(p^s \cdot R_{n,h} - \hat{R}_{n,h}) &= p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h((1-\varphi)G) - \mathscr{R}_h((1-\varphi)G - a)) \\ &= p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot a.\end{aligned}$$

On peut donc prendre $\alpha = p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot G(\zeta_n - 1)$ et $\delta = p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot a$.

2.3.7. Lemme. *Si x appartient à l'image de $(\log(1+T))^j \otimes \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-j}} \times \underline{D}(V)$ (par l'application $(G, a) \mapsto (G + a, (1-\varphi)\, a)$, voir 2.2.7) avec $1 \leqq j \leqq h-1$, $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ est nul. Si x appartient à l'image de $(\log(1+T))^h \otimes \underline{D}(V)^{\varphi = p^{-h}} \times \underline{D}(V)$, $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ est de torsion dans $H^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$: c'est l'image de $(-1)^{h-1} \cdot p^s \cdot v_h \cdot t^h / p^{n+1} \in V$ dans $H^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ par l'application*

$$(V/\underline{\mathrm{T}})^{G_{H_n}} \to H^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$$

avec $G = (\log(1+T))^h \otimes v_h$ et $x = (G + a, (1-\varphi)\, a)$.

En particulier, l'image de $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ dans $\tilde{H}^1_f(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ ne dépend que de l'image $e(x) = (1-\varphi)\, G - a$ de x dans $\mathscr{D}_\infty(V)$. On la note $p^s \cdot \tilde{\Sigma}_{n,h}(y)$ pour $y \in \mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta_{[1,h]} = 0}$ et $\tilde{\Sigma}_{n,h}(y) = p^{-s} \cdot p^s \cdot \tilde{\Sigma}_{n,h}(y)$.

Démonstration. On utilise le lemme 2.2.6.

2.3.8 Pour $x = (G, a)$, la restriction de $p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x)$ à $H^1(H_\infty, \underline{\mathrm{T}})$ ne dépend que donc que de $e(x) = (1-\varphi)\, G - a$ et se décrit simplement. Notons $\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}$ la restriction de $H^1(H_n, \underline{\mathrm{T}})$ à $H^1(H_\infty, \underline{\mathrm{T}})$. Alors, $\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}(p^s \cdot \Sigma_{n,h}(x))$ admet comme représentant le cocycle

$$-(\tau - 1)(\hat{R}_{n,h}(e(x)))$$

où

$$(1-\varphi)(\hat{R}_{n,h}(e(x))) = p^{s+(n+1)\cdot(h-1)} \cdot \rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(e(x))).$$

2.3.9 Supposons que $G \in (\mathscr{H}_{j,H} \bigotimes_W \mathrm{Fil}^{-h'}\, \underline{D}(V)) \cap \mathscr{H}(V)$. Alors, si $r \geqq \mathrm{Sup}(j, h')$, on construit une famille entière de points $\Sigma_{n,r}(G, a)$ comme dans le par. 3.3 en remplaçant h par r. Il est facile de vérifier que si $r \leqq h$, on a $p^{s+(n+1)\cdot(h-r)} \cdot \Sigma_{n,r}(G, a) = p^s \cdot \Sigma_{n,h}(G, a)$.

2.4 Quelques propriétés

2.4.1 Nous avons fait dans le paragraphe précédent un choix de $\underline{\mathrm{T}}$ en termes de M. Il est clair qu'un autre choix de $\underline{\mathrm{T}}$ et un autre choix de M changent uniquement la constante s. En général, il n'y a pas de choix canonique de $\underline{\mathrm{T}}$ en fonction de M. Cependant, si V vérifie les hypothèses de la proposition.

2.1.5. et que M est un réseau adapté, le choix de $\underline{\mathbf{T}}=\mathrm{Fil}^0(t^{-b}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}M)^{\varphi=1}$ semble naturel.

2.4.2. Proposition. *Pour tout* $x\in\mathscr{H}'_M(V)$, *on a dans* $p^{-s}\mathbb{Z}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\tilde{H}^1_f(H_n,\underline{\mathbf{T}})$ *pour un s indépendant de n*

$$\mathrm{cores}_{H_{n+1}/H_n}(\Sigma_{n+1,h}(x))=p^h\cdot\Sigma_{n,h}(\sigma\otimes\varphi(x))\ pour\ n\geqq 0$$
$$\mathrm{cores}_{H_0/H}(\Sigma_{0,h}(x))+p^{h-1}\cdot\Sigma_{-1,h}(x)=p^h\cdot\Sigma_{-1,h}(\sigma\otimes\varphi(x)).$$

Démonstration. Posons $x=(G,a)$ et $g=(1-\varphi)G-a$. L'hypothèse que $\psi(g)=0$ implique que $(\varphi\circ\psi\otimes 1)(G)=\varphi G+a$. D'autre part, pour $n\geqq 0$, $p^s\cdot\mathrm{cores}_{H_{n+1}/H_n}(\Sigma_{n+1,h}(x))$ a comme représentant le cocycle

$$(\tau-1)(\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\tilde{\gamma}_i[p^{(h-1)(n+2)+s}(\mathscr{R}_h(G)(\beta_{n+1}-1)-\hat{R}_{n+1,h}(g))])$$

où $p^{(h-1)(n+2)+s}\cdot\mathscr{R}_h(g)(\beta_{n+1}-1)=(1-\varphi)\hat{R}_{n+1,h}(g)$ et

$$\hat{R}_{n+1,h}(g)\in\mathrm{Fil}^0(t^{-b}A_{\mathrm{cris}}\otimes M)$$

et où $\tilde{\gamma}_i$ est un relèvement dans G_{H_n} d'un élément γ_i de $\mathrm{Gal}(H_{n+1}/H_n)$ tel que $\chi(\gamma_i)\equiv 1+i\cdot p^{n+1}\bmod p^{n+2}$. On a

$$\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\tilde{\gamma}^i\mathscr{R}_h(G)(\beta_{n+1}-1)=\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\mathscr{R}_h(G)(\beta_{n+1}\cdot\beta_0^i-1).$$

Alors

$$C_n=p^{(h-1)\cdot(n+2)}\cdot\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\mathscr{R}_h(G)(\beta_{n+1}\beta_0^i-1)$$
$$-p^{h+(h-1)\cdot(n+1)}\mathscr{R}_h((\sigma\otimes\varphi)G)(\beta_n-1)$$

est congru à $p^{1+(h-1)\cdot(n+2)}\cdot a$ modulo $\mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{cris}}\bigotimes_H\underline{D}(V))$. En effet, chacun des deux termes est congru à un élément de $H_n\otimes_H\underline{D}(V)$ modulo $\mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{cris}}\bigotimes_H\underline{D}(V))$. Il suffit donc de calculer l'image par θ de C_n, ce qui vaut

$$p^{(h-1)\cdot(n+2)}\cdot\sum_{0\leqq i\leqq p-1}G(\zeta_{n+1}\cdot\zeta_0^i-1)-p^{h+(h-1)\cdot(n+1)}\cdot(\sigma\otimes\varphi)G(\zeta_n-1)$$
$$=p^{(h-1)\cdot(n+2)}\cdot[p\cdot(\varphi\circ\psi\otimes 1)(G)(\zeta_{n+1}-1)-p\cdot(\sigma\otimes\varphi)G(\zeta_n-1)]$$
$$=p^{1+(h-1)\cdot(n+2)}\cdot a.$$

Montrons maintenant que C_n (et donc $C_n-p^{1+(h-1)\cdot(n+2)}\cdot a$) appartient à $p^{-s_3}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M$ pour une constante s_3 indépendante de n. L'équation $(1-\varphi)G=g+a$ implique que

$$\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\mathscr{R}_h(G)(\beta_{n+1}\cdot\beta_0^i-1)-\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\mathscr{R}_h((\sigma\otimes\varphi)G)(\beta_n\cdot\beta_{-1}^i-1)$$
$$=\sum_{0\leqq i\leqq p-1}\mathscr{R}_h(g+a)(\beta_{n+1}\cdot\beta_0^i-1).$$

Le membre de droite appartient à $(h-1)!^{-1}\cdot p^{-(h-1)\cdot(n+2)} A_{\mathrm{cris}}\otimes M$. Il suffit alors de montrer que

$$p^{(n+1)\cdot(h-1)}\cdot[\mathcal{R}_h((\sigma\otimes\varphi)G)(\beta_n\cdot\beta_{-1}^i-1)-\mathcal{R}_h((\sigma\otimes\varphi)G)(\beta_n-1)]\in p^{-s_3}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M,$$

ce qui se déduit de la proposition 2.2.1. On a d'autre part

$$\begin{aligned}(1-\varphi)[\sum_{0\le i\le p-1}\tilde{\gamma}_i\hat{R}_{n+1,h}(g)-p^h\cdot\hat{R}_{n,h}(g)]\\ &=p^s\cdot(1-\varphi)C_n-p^{1+(h-1)\cdot(n+2)+s}\cdot(a-\varphi a)\\ &=p^s\cdot(1-\varphi)(C_n-p^{1+(h-1)\cdot(n+2)}\cdot a).\end{aligned}$$

L'expression $\quad Y=\sum_{0\le i\le p-1}\tilde{\gamma}_i\hat{R}_{n+1,h}(g)-p^h\cdot\hat{R}_{n,h}(g)-p^s\cdot C_n+p^{1+(h-1)\cdot(n+2)+s}\cdot a$ appartient à $V=\mathrm{Fil}^0(B_{\mathrm{cris}}\otimes\underline{D}(V))^{\varphi=1}$. En ajoutant le cobord $(\tau-1)Y$ au cocycle choisi représentant $p^s\cdot\mathrm{cores}_{H_{n+1}/H_n}(\Sigma_{n+1,h}(x))$, on obtient donc un cocycle représentant $p^h\cdot p^s\cdot\Sigma_{n,h}(\sigma\otimes\varphi(x))$. D'où l'égalité

$$\mathrm{cores}_{H_{n+1}/H_n}(p^s\cdot\Sigma_{n+1,h}(x))=p^h\cdot p^s\cdot\Sigma_{n,h}(\sigma\otimes\varphi(x))\text{ pour }n\geqq 0$$

pour s convenable indépendant de n (et de $x\in\mathcal{H}'_M(V)$).

Le cas $n=-1$ se fait de la même manière.

2.4.3 Soit i un entier. Les éléments du module galoisien $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}(i)$ étant fixes par $\mathrm{Gal}(H_\infty/H_n)$, on a un isomorphisme canonique de $\mathrm{Gal}(H_n/H)$-module

$$H^1(H_n,\underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}})\otimes\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}(i)\simeq H^1(H_n,\underline{\mathrm{T}}(i)/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}}(i)).$$

On a de même un isomorphisme canonique de G_∞-modules

$$H^1(H_\infty,\underline{\mathrm{T}})\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(i)\simeq H^1(H_\infty,\underline{\mathrm{T}}(i)).$$

Le choix fait d'un générateur ε de $\mathbb{Z}_p(1)$ permet de définir des isomorphismes

$$\begin{aligned}Tw^{\varepsilon}_{i,n,V}&:H^1(H_n,\underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}})\simeq H^1(H_n,\underline{\mathrm{T}}(i)/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}}(i))\\ Tw^{\varepsilon}_{i,V}&:H^1(H_\infty,\underline{\mathrm{T}})\simeq H^1(H_\infty,\underline{\mathrm{T}}(i))\end{aligned}$$

par $x\mapsto x\otimes\varepsilon^{\otimes i}$. Par passage à la limite projective, cela permet de définir un isomorphisme $Tw^{\varepsilon}_{i,v}\colon Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})\to Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}}(i))$. Notons $\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}$ la restriction de H_n à H_∞. Rappelons qu'on note e_{-i} la base canonique de $H[-i]$. Enfin, notons $\Sigma_{n,h,V}$ (resp. $\Sigma_{n,h,V(i)}$) l'application $\Sigma_{n,h}$ relative à V (resp. à $V(i)$).

Proposition. *Soit i un entier positif. Soit g un élément de $\mathcal{D}_\infty(V)^{\Delta=0}$. Alors, on a pour tout n*

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}[(h-1)!\cdot Tw^{\varepsilon}_{i,n,V}(p^s\cdot\tilde{\Sigma}_{n,h,V}(D^i(g))]\\ &=(-1)^i\cdot\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}[(h+i-1)!\cdot p^s\cdot\tilde{\Sigma}_{n,h+i,V(i)}(g\otimes e_{-i})].\end{aligned}$$

Remarques. (i) La condition minimale sur g est en fait que $g\otimes e_{-i}$ appartienne à $\mathcal{D}_\infty(V(i))^{\Delta_{[0,h+i]}=0}$. Dans la suite, nous ne chercherons pas à donner les conditions minimales afin de simplifier les énoncés.

(ii) Je ne sais pas si l'égalité est vraie avant de prendre la restriction à H_∞. Le noyau de l'application de restriction

$$\mathrm{res}_{H_\infty/H_n}: H^1(H_n, \underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}}) \to H^1(H_\infty, \underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}})$$

est égal à $H^1(H_\infty/H_n, (\underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}})^{G_{H_\infty}})$. En particulier, si $\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}}$ est nul, il est d'ordre borné par rapport à n. Dans le cas contraire, la limite projective des $H^1(H_\infty/H_n, (\underline{\mathrm{T}}/p^{n+1}\underline{\mathrm{T}})^{G_{H_\infty}})$ pour les applications de corestriction est égale à $\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}}$.

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition pour $i=1$. On note ici φ l'endomorphisme de Frobenius de $\underline{D}(V)$. En identifiant les H-espaces vectoriels $\underline{D}(V)$ et $\underline{D}(V(1))$ à l'aide de e_{-1}, l'endomorphisme de Frobenius de $\underline{D}(V(1))$ est alors $p^{-1}\cdot\varphi$. Choisissons un réseau M de $\underline{D}(V)$. La restriction de $Tw^{\varepsilon}_{1,nV}(p^s\cdot\tilde{\Sigma}_{n,h,V}(D(g))$ à H_∞ admet comme représentant le cocycle

$$-(\tau-1)(\hat{R}_{n,h}(D(g))\cdot t$$

avec

$$(1-\varphi)(\hat{R}_{n,h}(D(g)))=p^{s+(n+1)\cdot(h-1)}\cdot\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(D(g)))$$

et $t=\log\beta_{-1}=p^{-1}\cdot\log[\varepsilon]$. La restriction de $\Sigma_{n,h+1,V(1)}(g)$ à H_∞ admet comme représentant le cocycle

$$-(\tau-1)(\hat{R}_{n,h}(g))$$

avec

$$(1-p^{-1}\varphi)(\hat{R}_{n,h+1}(g))=p^{s+(n+1)\cdot h}\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_{h+1}(g)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$p^{(h-1)\cdot(n+1)}\cdot(h-1)!\cdot\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_h(D(g)))\cdot t$$
$$+p^{h\cdot(n+1)}\cdot h!\,\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_{h+1}(g))\in p^{n+1}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M.$$

Or, cela vaut

$$(h-1)!\cdot p^{(h-1)\cdot(n+1)}\cdot\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\cdot(i!)^{-1}\cdot p^{-(n+1)i}\cdot D^{i+1}(g)(\beta_n-1)\cdot t^{i+1}$$
$$+(h!)\cdot p^{h\cdot(n+1)}\cdot\sum_{i=0}^{h}(-1)^i\cdot(i!)^{-1}\cdot p^{-(n+1)i}\cdot D^i(g)(\beta_n-1)\cdot t^i.$$

Comme $D^i(g)(\beta_n-1)\in A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M$, on en déduit que cela est congru modulo $p^{n+1}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M$ à

$$(-1)^{h-1}\cdot D^h(g)(\beta_n-1)\cdot t^h+(-1)^h\cdot D^h(g)(\beta_n-1)\cdot t^h=0.$$

D'où la proposition.

2.4.4 Nous aurons besoin des congruences plus précises suivantes:

Proposition. *Soit j un entier positif. Soit g un élément de $\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$. Alors, on a pour tout n*

$$\sum_{k=0}^{j}(h-1+k)!)\cdot\binom{j}{k}\cdot Tw_{j-k,V(k)}\circ \operatorname{res}_{H_\infty/H_n}(p^s\cdot\tilde{\Sigma}_{n,h+k,V(k)}(D^{j-k}(g)\otimes e_{-k}))$$
$$=0 \text{ modulo}\cdot p^{j\cdot(n+1)}H^1(H_\infty,\mathbf{T}(j)).$$

Démonstration. Pour $j=1$, c'est la proposition 2.4.3. La démonstration se fait de la même manière. Il s'agit de montrer que

$$\sum_{k=0}^{j}(h-1+k)!\cdot\binom{j}{k}\cdot p^{(n+1)\cdot(h-1+k)}\rho_{n,\mathrm{cris}}(\mathscr{R}_{h+k}(D^{j-k}(g)))\cdot t^{j-k}\in p^{(n+1)\cdot j}A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M.$$

Pour cela, on explicite l'expression et on utilise l'identité

$$\sum(-1)^k\cdot\frac{(h-1+k)!}{(h-1+k-j')!}\cdot\binom{j}{k}=0$$

pour tout entier $j'<j$ où la sommation est prise sur les entiers k tels que $0\leqq k\leqq j$ et $h-1+k-j'\geqq 0$ (l'expression de gauche est au signe près la valeur en 1 de la dérivée j'-ième de $X^{h-1}\cdot(1-X)^j$).

3 Application de périodes

3.1 Problème général

3.1.1 Posons $\Lambda_\Gamma=\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. Si M est un Λ_Γ-module, on note $M(j)=M\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(j)$ et on note comme auparavant $Tw_{M,j}: M\to M(j)$ l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules relatif au système de racines de l'unité choisi. Soient M et N deux Λ_Γ-modules de type fini. Posons $\Gamma_n=\Gamma^{p^n}$. Soit J un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. On appelle *J-système de morphismes compatibles de M dans N* la donnée d'une famille de $\mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$-morphismes $f_{n,j}:\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}M(j)_{\Gamma_n}\to\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}N(j)_{\Gamma_n}$ pour tout entier $n\geqq 0$ et pour tout $j\in J$ tels que les $(f_{n,j})_n$ soient compatibles pour tout $j\in J$, i.e. que les diagrammes

$$\begin{array}{lccc} f_{n+1,j}: & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}M(j)_{\Gamma_{n+1}} & \to & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}N(j)_{\Gamma_{n+1}} \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f_{n,j}: & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}M(j)_{\Gamma_n} & \to & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}N(j)_{\Gamma_n} \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les projections naturelles soient commutatifs.

Si $f: M\to N$ est un Λ_Γ-homomorphisme, on lui associe de manière naturelle un $\mathbb{Z}$-système de morphismes compatibles de M dans N (avec $J=\mathbb{Z}$): si $f(j)$

désigne l'application tordue $M(j) \to N(j)$ déduite de f et si $f(j)$ désigne l'application $M(j)_{\Gamma_n} \to N(j)_{\Gamma_n}$ déduite de $f(j)$, on a $f_{n,j} = 1 \otimes f(j)_n$.

3.1.2 Soit M un Λ_Γ-module de type fini. L'application $M \to M_{\Gamma_n}$ se prolonge en une application $\mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} M \to \mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} M_{\Gamma_n}$. En effet, si x est un élément de M et x_n sa projection dans M_{Γ_n}, on a

$$(\gamma - 1)^{p^n} x_n \in p M_{\Gamma_n}.$$

On en déduit qu'il existe une constante C telle que $(\gamma-1)^k x_n \in C \cdot p^{[k/p^n]} M_{\Gamma_n}$. Si $g = \sum_{k \geq 0} a_k \cdot (\gamma-1)^k$ est un élément de $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$, la série $\sum_{k \geq 0} a_k \cdot (\gamma-1)^k(x_n)$ converge dans $\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} M_{\Gamma_n}$ et c'est par définition l'image de $g \otimes x$. D'autre part, notons $\|\cdot\|_{N,n}$ la norme sur $\mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} N_{\Gamma_n}$ telle que $\|x\|_{N,n} \leq 1$ si et seulement si x admet un relèvement dans N.

3.1.3 Soit F un $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$-morphisme $\mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} M \to \mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} N$. On définit le twist $F(j)$: $\mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} M(j) \to \mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} N(j)$ par

$$F(j)(g(\gamma-1) \otimes Tw_{M,j}(x)) = Tw_{N,j} F(g(\chi(\gamma)^j \gamma - 1)) \otimes x).$$

Cette définition est compatible avec la définition de $f(j)$ dans 3.3.1. On dit qu'un J-système de morphismes compatibles $(F_{n,j})_{n,j \in J}$ est convergent (resp. convergent d'ordre $<r$) s'il existe un $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$-morphisme F: $\mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} M \to \mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} N$ tel que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $j \in J$ le diagramme

$$\begin{array}{cccc} F(j): & \mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} M(j) & \to & \mathscr{H}_\infty(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} N(j) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ F_{n,j}: & \mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} M(j)_{\Gamma_n} & \to & \mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} N(j)_{\Gamma_n} \end{array}$$

est commutatif (resp. si de plus l'image de $M(j)$ est contenue dans $\mathscr{H}_r(\Gamma) \underset{\Lambda_\Gamma}{\otimes} N(j)$ pour tout $j \in J$). On dit aussi que F est d'ordre $<r$ dans ce dernier cas.

3.1.4. Proposition. *Soient M et N deux Λ_Γ-modules de type fini et sans torsion.*
(i) *Soit $(F_{n,j})_{n,j \in J}$ un J-système de morphismes compatibles de M dans N, convergent d'ordre $<r$. Si le cardinal de J est $\geq r$, le morphisme F associé à $(F_{n,j})_{n,j \in J}$ est unique* (on dit que F est la *limite des $(F_{n,j})_{n,j \in J}$*).
(ii) *Soit $(f_{n,j})$ un $[j_0, \infty[$-système de morphismes compatibles de M dans N. Le système est convergent d'ordre $<r$ si et seulement si pour tout $x \in M$,*

$$\|p^{n,r} \cdot f_{n,k}(Tw_{M,k}(x))\|_{N,n} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

et si pour tout $j \geqq j_1 \geqq j_0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| p^{\{-j+j_1\}\cdot n} \cdot \sum_{k=j_1}^{j} (-1)^{j-k} \cdot \binom{j-j_1}{k-j_1} \right.$$
$$\left. \cdot Tw_{N(k),-k+j_1}(p^{r\cdot(n+1)} \cdot f_{n,k}(Tw_{M,k}(x))) \right\|_{N(j_1),n} = 0.$$

Il se prolonge alors de manière unique en un $\mathbb{Z}$*-système compatible* (il suffit en fait que cela soit vrai pour $j_1 \leqq j \leqq j_1 + r$).

Démonstration. L'assertion (i) se déduit de ce qu'un élément de $\mathscr{H}_r$ est déterminé de manière unique par ses polynômes d'interpolation modulo $\omega_m(\chi(\gamma)^j \cdot (1+X) - 1)$ pour tout entier m et pour au moins r valeurs distinctes de j. Démontrons (ii). Prenons pour simplifier $j_1 = 0$. On se ramène d'abord facilement au cas où N est libre. Choisissons une base $X_1, \ldots, X_t$ de N et notons $X_1^{(n)}, \ldots, X_t^{(n)}$ sa projection dans N_{Γ_n}: $X_1^{(n)}, \ldots, X_t^{(n)}$ forment donc une base du $\mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_n]$-module N_{Γ_n}. Choisissons d'autre part un générateur topologique γ de Γ. Si $x \in M$, on peut alors écrire

$$Tw_{N(j),-j}(p^{r\cdot(n+1)} \cdot f_{n,j}(Tw_{M,j}(x))) = \sum_{1 \leqq i \leqq t} p^{r\cdot(n+1)} \cdot Q_{i,n,j}(x)(\chi(\gamma)^j \gamma - 1) \cdot X_i^{(n)}$$

où $Q_{i,n,j}(x)(\gamma-1)$ est un polynôme en $(\gamma-1)$ de degré $< p^n$ dans $\mathbb{Q}_p[\gamma-1]$ tel que $\|p^{(n+1)\cdot r} \cdot Q_{i,n,j}\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Les congruences se traduisent par le fait que

$$\left\| p^{(r-j)\cdot(n+1)} \cdot \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \cdot \binom{j}{k} \cdot Q_{i,n,k}(x)(\chi(\gamma)^k(1+X)-1) \right\| \to 0 \qquad \text{pour tout } j,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $F_i(x)$ de $\mathscr{H}_r$ tel que $F_i(x)(\chi(\gamma)^{-j}(1+X)-1) \equiv Q_{i,n,j}(x)(X)$ modulo $\omega_n(X)$ (cf. 1.2). On en déduit facilement la proposition.

3.1.5 Ce qui a été fait pour Λ_Γ se généralise à Λ, composantes par composantes: $\Lambda = \bigoplus_\eta \Lambda_\Gamma \cdot e_\eta$ où η parcourt les caractères de Δ et $e_\eta = (\# \Delta)^{-1} \cdot \sum_{\delta \in \Delta} \eta(\delta)^{-1} \cdot \delta$ est l'idempotent associé. On dit qu'un Λ-module de type fini est de rang r si les $e_\eta M$ sont tous des Λ_Γ-modules de rang r.

Lorsque L est un Λ-module projectif de type fini, on définit le déterminant $\det_\Lambda(L)$ de L comme sa puissance extérieure maximale (composante par composante) et son dual $L^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(L, \Lambda)$ que l'on note aussi L^{-1}. Si maintenant M est un Λ-module de type fini, on définit $\det_\Lambda(M)$ de la manière suivante: si M admet une résolution par des Λ-modules projectifs

$$0 \to M_r \to \ldots \to M_0 \to M \to 0,$$

on pose

$$\det_\Lambda(M) = \bigotimes_{0 \leqq i \leqq r} \det_\Lambda(M_i)^{(-1)^i}$$

(on a en fait $r \leqq 2$). C'est un Λ-module libre de rang 1. On montre qu'il ne dépend pas du choix de la résolution choisie (au signe près) et qu'il dépend fonctoriellement de M. On note aussi $\det_\Lambda(M)^{-1} = \bigotimes_{0 \leqq i \leqq r} \det_\Lambda(M_i)^{(-1)^{i+1}}$. Si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de Λ-modules, on obtient un isomorphisme canonique au signe près

$$\det_\Lambda(M) \simeq \det_\Lambda(M') \bigotimes_\Lambda \det_\Lambda(M'').$$

Lorsque M est le module nul, on a $\det_\Lambda(\{0\}) = \Lambda$.

Lorsque M est de torsion, on a un homomorphisme canonique:

$$\kappa \colon \det_\Lambda(M) \to \mathrm{Frac}(\Lambda)$$

où $\mathrm{Frac}(\Lambda)$ est l'anneau total des fractions de Λ. Si M est fini et donc de dimension cohomologique 2, $\kappa(M) = 1$. Si M est de dimension cohomologique 1, l'application κ est injective: si l'on a une suite exacte

$$0 \to M_1 \xrightarrow{u} M_0 \to M \to 0$$

avec M_0 et M_1 libres de même rang, un élément de $\det_\Lambda(M)$ s'écrit $e_0 \otimes (e_1)^{-1}$ avec $e_i \in \det_\Lambda(M_i)$. Son image dans $\mathrm{Frac}(\Lambda)$ est égal à $\det_{e_0, e_1}(u)^{-1} \cdot \Lambda$ où $\det_{e_0, e_1}(u)$ est le déterminant de $u(e_1)$ dans la base e_0. En particulier, si $f(M) \in \Lambda$ est une série caractéristique de M (i.e. si $e_\eta(f(M))$ est une série caractéristique de $e_\eta(M)$ pour tout caractère η de Δ), on a

$$\kappa(\det_\Lambda(M)) = f(M)^{-1} \Lambda.$$

Plus généralement, si M est un Λ-module de type fini de sous-module de torsion $t_\Lambda(M)$ et si $L(M) = M/t_\Lambda(M)$, on a une injection de $\det_\Lambda(M)$ dans $\det_{\mathrm{Frac}(\Lambda)}$ $(\mathrm{Frac}(\Lambda) \bigotimes_\Lambda L(M))$ dont l'image est

$$f(t_\Lambda(M))^{-1} \cdot \det_\Lambda(L(M)).$$

Désormais, lorsque M est un Λ-module de type fini de torsion, $\det_\Lambda(M)$ sera considéré comme contenu dans $\mathrm{Frac}(\Lambda)$.

3.1.6 Soient M et N deux Λ-modules de type fini de même rang et F un $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-morphisme $\mathscr{H}_\infty(G_\infty) \bigotimes_\Lambda M/t_\Lambda(M) \to \mathscr{H}_\infty(G_\infty) \bigotimes_\Lambda N/t_\Lambda(N)$. On a une application de Λ-modules

$$\det(F) \colon \det_\Lambda(\mathrm{M}) \bigotimes_\Lambda (\det_\Lambda N)^{-1} \to \mathscr{H}_\infty(G_\infty) \otimes \mathrm{Frac}(\Lambda)$$

vérifiant $\det(F)(\alpha\omega) = \alpha \cdot \det(F)(\omega)$ si $\omega \in \det_\Lambda(M) \bigotimes_\Lambda (\det_\Lambda N)^{-1}$. L'image de $\det(F)$ est contenue dans $\det_\Lambda t_\Lambda(M) \otimes (\det_\Lambda t_\Lambda(N))^{-1} \cdot \mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. Plus généralement, si M' et N' sont deux Λ-modules de type fini vérifiant $\mathrm{Frac}(\Lambda) \bigotimes_\Lambda M'$

$=\mathrm{Frac}(\Lambda)\bigotimes_\Lambda M$, $\mathrm{Frac}(\Lambda)\bigotimes_\Lambda N'=\mathrm{Frac}(\Lambda)\bigotimes_\Lambda N$, on définit une application que l'on note aussi $\det(F)$: $\det_\Lambda(M')\bigotimes_\Lambda(\det_\Lambda N')^{-1}\to\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda \mathrm{Frac}(\Lambda)$.

Gardons les notations précédentes. L'application F induit des applications $M_{\Gamma_n}\to N_{\Gamma_n}$ et $M^{\Gamma_n}\to N^{\Gamma_n}$. On en déduit une application linéaire $\det(F)_n$: $\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(M^{\Gamma_n})\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(N^{\Gamma_n})^{-1}\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(M_{\Gamma_n})^{-1}\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(N_{\Gamma_n})\to\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]$.

La projection de $\det(F)$ dans $\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]$ est égale à $\det(F)_n$. Cela se démontre par dévissage en se ramenant au cas où M et N sont libres et au cas où M et N sont des modules de torsion; on se ramène à montrer que si P est un Λ-module de torsion, l'application linéaire canonique

$$\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(P^{\Gamma_n})\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(P_{\Gamma_n})^{-1}\to\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]$$

induite par la suite exacte $0\to P^{\Gamma_n}\to P\to P\to P_{\Gamma_n}\to 0$ est la projection de l'application $\det_\Lambda(P)\to\Lambda$ dans $\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]$: c'est la traduction du lemme classique en théorie d'Iwasawa qui suit: si f est la série caractéristique du $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module de torsion A et si f est non nulle modulo $(\gamma-1)$, son image dans $\mathbb{Q}_p$ modulo $\gamma-1$ est égale à une unité près à $\#(A_\Gamma)/\#(A^\Gamma)$. Plus généralement, avec les notations du paragraphe précédent, on a une application linéaire $\det(F)_n$:

$$\begin{aligned}\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(M'^{\Gamma_n})\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(M'_{\Gamma_n})^{-1}\otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(N'^{\Gamma_n})^{-1}\\ \otimes\det_{\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]}(N'_{\Gamma_n})\to\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]\end{aligned}$$

et l'image de l'application composée de $\det(F)$ par la projection canonique

$$\det_\Lambda(M')\bigotimes_\Lambda(\det_\Lambda N')^{-1}\to\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda\mathrm{Frac}(\Lambda)\to\mathbb{Q}_p[G_\infty/\Gamma_n]$$

est encore égale à l'image de $\det(F)_n$ dans $\mathbb{Z}_p[G_\infty/\Gamma_n]$.

3.1.7 Si j est un entier, $j-\log(\gamma)/\log\chi(\gamma)$ est un élément de $\mathscr{H}_2(\Gamma)$ indépendant de $\gamma\in\Gamma-\{1\}$. On le note ℓ_j. Si γ est un générateur topologique de Γ, c'est l'image de $j-\log(1+X)/\log\chi(\gamma)=\log(\chi(\gamma)^j\cdot(1+X)^{-1})/\log\chi(\gamma)$ par l'isomorphisme $\gamma\leftrightarrow 1+X$.

3.1.8 Nous utiliserons dans le par. 3.4 le lemme technique qui suit. Il généralise un lemme bien connu dans le cas des Λ-morphismes permettant de calculer l'ordre du zéro de séries caractéristiques de modules de torsion. Pour simplifier les notations, nous les énonçons dans le cadre des Λ_Γ-modules.

Soient M et N des Λ_Γ-modules libres de type fini de même rang. Soit F un $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$-morphisme injectif $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)\bigotimes_{\Lambda_\Gamma}M\to\mathscr{H}_\infty(\Gamma)\bigotimes_{\Lambda_\Gamma}N$. Soit $\underline{\omega}$ une base de $\det_{\Lambda_\Gamma}(M)\bigotimes_{\Lambda_\Gamma}(\det_{\Lambda_\Gamma}N)^{-1}$. On peut donc écrire $\underline{\omega}=\omega'\otimes\omega^{-1}$ où ω' est une base de $\det_{\Lambda_\Gamma}(M)$ et ω une base de $\det_{\Lambda_\Gamma}N$. On désire étudier $\det(F)(\underline{\omega})\in\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$.

Lemme. *Avec les notations précédentes, on suppose qu'il existe des entiers j, α et β avec $\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$ tels que le noyau de $F_{n,j}$ contienne le $\mathbb{Q}_p[\Gamma/\Gamma_n]$-module $\mathbb{Q}_p[\Gamma/\Gamma_n]^\alpha\oplus\mathbb{Q}_p^\beta$ pour tout n. Alors $\det(F)(\underline{\omega})$ est divisible par $\omega_0^\beta(\chi(\gamma)^j\gamma-1)\cdot(\ell_{-j})^\alpha$ dans $\mathscr{H}_\infty(\Gamma)$ (où γ est un générateur topologique de Γ).*

Démonstration. Par twist, on se ramène au cas où $j=0$ et on pose $F_n = F_{n,0}$. L'hypothèse que $\ker(F_n) \supset \mathbb{Q}_p[\Gamma/\Gamma_n]^\alpha \oplus \mathbb{Q}_p^\beta$ implique que $\det(F)(\omega)$ est congru à 0 modulo $\omega_0^\beta \cdot \omega_n^\alpha$. Grâce au lemme 1.3.1, cela implique le lemme.

3.2 *Théorème d'existence*

3.2.1 Soit V une représentation p-adique cristalline de G_H et $\underline{\mathbf{T}}$ un réseau de V stable par G_H. Posons $Z_\infty^i(\underline{\mathbf{T}}) = \lim \operatorname{proj} H^i(H_n, \underline{\mathbf{T}})$ pour $i \in \mathbb{Z}$. Le module $Z_\infty^i(\underline{\mathbf{T}})$ est nul dès que $i \neq 1, 2$. Rappelons le résultat suivant en désignant par $\hat{M}$ le dual de Pontryagin d'un $\mathbb{Z}_p$-module M:

$$\hat{M} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

Proposition. *Supposons que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Le Λ-module $Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})$ est un Λ-module de rang égal à $[H:\mathbb{Q}_p] \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ dont le module de torsion est $\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}$. Le $\mathbb{Z}_p$-module $Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n}$ s'injecte dans $H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}})$. Plus précisément, on a des suites exactes*

$$0 \to Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \to H^1(H_\infty/H_n, (V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}})\hat{}\to 0.$$

$$0 \to (Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}})/H^1(H_\infty/H_n, \underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})$$
$$\to H^1(H_\infty/H_n, (V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}})\hat{}\to 0.$$

Enfin, $Z_\infty^2(\underline{\mathbf{T}})$ est isomorphe à un groupe fini près à $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\mathbf{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}}, \mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. En prenant le dual de la suite exacte de Hochschild-Serre et en passant à la limite, on obtient la suite exacte

$$0 \to Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})_{G(H_\infty/H_n)} \to H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \to H^1(H_\infty/H_n, (V^*/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}})\hat{}\to 0.$$

Il est démontré dans [P2] que le sous-module de torsion de $Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})$ est égal à $\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}$ et on a $(\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})_{\Gamma_n} \simeq H^1(H_\infty/H_n, \underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})$ qui s'injecte dans $H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}})$. On en déduit la deuxième suite exacte. Enfin, la dualité locale implique que

$$Z_\infty^2(\underline{\mathbf{T}}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}((V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

ce qui est égal à un groupe fini près à

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{\mathbf{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\underline{\mathbf{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}}, \mathbb{Z}_p).$$

D'où la proposition.

En particulier, si $\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_n}}$ est nul, on obtient une application $Z_\infty^1(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}} \to H^1(H_n, V)$, puisque $H^1(H_\infty/H_n, \underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})$ est alors fini.

3.2.2 Soit $g \in \mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0}$. Posons

$$C_n(g) = p^{-(n+1)} \cdot S_n((\sigma \otimes \varphi)^{-(n+1)} \cdot g) \in H_f^1(H_n, V)$$
$$= \exp_{H_n, V}(\Xi_n(g))$$

où $\Xi_{n,V}$ est l'application $\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0} \to H_n \bigotimes_H \underline{D}(V)/\underline{D}(V)^{\varphi=1}$ définie par

$$\Xi_{n,V}(g) = p^{-(n+1)} \cdot (\sigma \otimes \varphi)^{-(n+1)}(G)(\zeta_n - 1)$$

avec $(1-\varphi)\,G = g$. Les points $C_n(g)$ vérifient les relations

$$\mathrm{Tr}_{H_{n+1}/H_n}(C_{n+1}(g)) = C_n(g) \text{ pour } n \geqq 0$$

$$\mathrm{Tr}_{H_0/H}(C_0(g)) = C_{-1}(g) - p^{-1} \cdot C_{-1}((\sigma\otimes\varphi)^{-1}\cdot g) = C_{-1}((1 - p^{-1}\cdot(\sigma\otimes\varphi)^{-1})\cdot g)$$

(se déduit de la proposition 2.4.2, cela peut aussi se démontrer directement à partir de 1.5.4). Ainsi, les $(C_n(g))_{n\geq 0}$ définissent un élément de lim proj $H^1_f(H_n, V)$.

3.2.3 Soit $J = J(V) = \{j$ tel que $\mathrm{Fil}^0\, \underline{D}(V(j)) = 0\}$. Remarquons que lorsque $j \in J(V)$, on a $\underline{D}(V(j))^{\varphi=1} = 0$. Rappelons d'autre part que D est un isomorphisme de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ sur lui-même et donc définit un isomorphisme de $\mathscr{D}_\infty(V)$. Nous ne supposons pas que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, sauf mention explicite.

Théorème. *Soit V une représentation p-adique cristalline de G_H. Fixons un entier $h \geqq 1$, supérieur à la longueur de la filtration de Hodge de V et tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\, \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$.

(A) *Il existe un entier r tel que le $J(V)$-système compatible*

$$((-1)^j \cdot (h+j-1)! \cdot C_{m,V(j)} \circ (D^{-j} \otimes e_{-j}))_{m,j\in J}$$

de $\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ dans $Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}$ soit convergent d'ordre $< r$.

On note $\Omega^\varepsilon_{V,h} = \Omega_{V,h}$ sa «limite». Autrement dit,

(B) *Il existe un entier r et une unique famille de Λ-homomorphismes*

$$\Omega^\varepsilon_{V(j),h+j} : \mathscr{D}_\infty(V(j))^{\tilde{\Delta}=0} \to \mathscr{H}_r(G_\infty \bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}(j))/\underline{\mathbf{T}}(j)^{G_{H_\infty}}$$

pour $j \in \mathbb{Z}$ telle qu'on ait les propriétés suivantes:

(i) *pour tout entier $j \in J(V)$, le diagramme suivant est commutatif (noté $(D(V,j,h))$)*

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{D}_\infty(V(j))^{\tilde{\Delta}=0} & \xrightarrow{\Omega^\varepsilon_{V(j),h+j}} & \mathscr{H}_r(G_\infty) \bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}(j))/\underline{\mathbf{T}}(j)^{G_{H_\infty}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Xi_{n,V(j)}} & & \Big\downarrow \\
H_n \bigotimes_W \underline{D}(V(j)) & \xrightarrow[(h+j-1)!\cdot \exp_{H_n,V(j)}]{} & H^1(H_n, V(j))
\end{array}$$

(ii) *pour tout entier j, on a*

$$Tw^\varepsilon_{1,V(j)} \circ \Omega^\varepsilon_{V(j),h+j} \circ (D \otimes e_1) = -\Omega^\varepsilon_{V(j+1),h+j+1}.$$

De plus, l'application $\Omega^\varepsilon_{V,h}$ est injective.

On peut préciser les conditions de validité de $(D(V,j,h))$:

(C) *Le diagramme $D(V,j,h)$ est encore commutatif pour $h+j \geqq 1$,* $\mathrm{Fil}^{-h}\, \underline{D}(V) = \underline{D}(V)$, *à condition de remplacer $H^1(H_n, V(j))$ par $H^1(H_n, V(j))/H^1(\Gamma_n, V(j)^{G_{H_\infty}})$.*

Démonstration. Le théorème étant invariant par twist, on peut supposer que $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$. On a alors $J(V)=\mathbb{N}$ et h est un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\underline{D}(V)=\underline{D}(V)$. Posons $\mathbb{Z}_{\geqq -h+1}=\{j\in\mathbb{Z}, j\geqq -h+1\}$. Soit $\alpha=m/q$ un rationnel avec m et q entiers positifs et $q\neq 0$ tel que $\varphi^{-q\cdot n} M\subset C\cdot p^{m\cdot n} M$ où C est indépendant de n et prenons $r=[h-\alpha]+1$. Posons pour $g\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0}$ (ce qui implique que $D^{-j}(g)\otimes e_{-j}\in\mathscr{D}_\infty(V(j))^{\Delta=0}$)

$$F_{n,j}(g)=(-1)^j\cdot(h+j-1)!\cdot C_{n,V(j)}(D^{-j}(g)\otimes e_{-j}).$$

Il est clair que les $(F_{n,j})$ forment un $\mathbb{N}$-système compatible et même $\mathbb{Z}_{\geqq -h+1}$-compatible. Soit $j\in\mathbb{Z}_{\geqq -h+1}$; on a

$$\begin{aligned}C_{n,V(j)}(g)&=p^{(n+1)\cdot(j-1)}\cdot S_{n,V(j)}((\sigma\otimes\varphi)^{-(n+1)}\cdot g)\otimes e_{-j})\\&=p^{(n+1)\cdot(j-1)+m\cdot[(n+1)/q]}\cdot S_{n,V(j)}(g_1\otimes e_{-j})\end{aligned}$$

avec $C_h(g_1)\leqq C'\cdot C_h(g)$. Comme

$$(n+1)\cdot(j-1)+m\cdot[(n+1)/q]+(n+1)\cdot r>(n+1)\cdot(h+j-1)-m,$$

on déduit de la proposition 2.3.6 qu'il existe un entier s (indépendant de n) tel que $p^{(n+1)\cdot r}\cdot F_{n,j}(g)$ soit un point de $p^{-s}\cdot\tilde{H}^1(H_n,\underline{\mathrm{T}}(j))$ et que

$$\lim_{n\to\infty}\|p^{(n+1)\cdot r}\cdot F_{n,j}(g)\|_{Z,n}=0$$

où l'on pose pour simplifier $Z=Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}}(j))/\underline{\mathrm{T}}(j)^{T_{H_\infty}}$. Les congruences de la proposition 2.4.4 se traduisent de même par le fait que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|p^{-j\cdot(n+1)}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\cdot\binom{j}{k}\cdot Tw^{\varepsilon}_{-k,V(k)}(p^{r\cdot(n+1)}\cdot F_{n,k}(g)\right\|_{Z,n}=0$$

pour tout $j\geqq 0$. Ce qui démontre l'existence de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ grâce à la proposition 3.1.4. On a par définition même

$$\Omega^{\varepsilon}_{V,h}(g)\equiv(h-1)!\cdot S_{n,V}(p^{-(n+1)}\cdot(\sigma\otimes\varphi)^{-(n+1)}(g))=(h-1)!\cdot C_{n,V}(g)\text{ modulo }\omega_n.$$

On en déduit la commutativité du diagramme $D(V,0,h)$. La même construction appliquée à $V(j)$ pour h et j entiers tels que $h+j\geqq 1$, $\mathrm{Fil}^{-h}\underline{D}(V)=\underline{D}(V)$ donne un homomorphisme $\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h+j}$ dont le lien avec $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ est donné par la propriété (ii) grâce aux congruences de 2.4.4. On en déduit (C). Pour $j\in\mathbb{Z}$ quelconque, on définit alors $\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h+j}$ par la propriéte (ii). L'unicité de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ se déduit de 3.1.4.

L'injectivité de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ se déduit de ce que $F_{n,j}$ est un isomorphisme pour tout n et pour tout $j\gg 0$.

3.2.4. Premières remarques. (i) L'entier r est le même pour V et pour n'importe lequel de ses twists et *dépend de h.* On peut être plus précis. Si g est un élément de $W[\![T]\!]\otimes D_{[-\alpha]}$ où $D_{[-\alpha]}$ désigne le sous-espace de $\underline{D}(V)$ sur lequel φ est de pente $-\alpha$, $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}(g)$ appartient à $\mathscr{H}_r(G_\infty)\otimes Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})/\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}}$ pour $r>h-\alpha$. On a en effet alors $(\sigma\otimes\varphi)^{-n}(g)\subset C\cdot p^{(h-r)\cdot n+\alpha(n)}\cdot\mathscr{D}_{\infty,M}(V)$ où $\alpha(n)$ tend vers l'infini avec n et on conclut comme dans la démonstration du théorème. On peut même dire que $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}(g)$ est un $O(\log^{h-\alpha})$ (un élément f de $\mathscr{H}$ est un $O(\log^{\beta})$ si $\operatorname{Sup}_n(p^{-n\cdot\beta}\cdot\|f\|_{\rho_n})<\infty$).

(ii) $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ *dépend de* h (voir infra 3.3 et 3.4).

(iii) L'application $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ se prolonge en une application de $\mathscr{H}_{\infty}(G_{\infty})$-modules

$$\mathscr{H}_{\infty}(G_{\infty})\bigotimes_{\Lambda}\mathscr{D}_{\infty}(V)^{\tilde{\Delta}=0}\to\mathscr{H}_{\infty}(G_{\infty})\bigotimes_{\Lambda}Z^1_{\infty}(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_{\infty}}}$$

que l'on note de la même mantière.

(iv) L'image de $H_n\bigotimes_{H}\underline{D}(V(j))$ par $\exp_{H_n,V(j)}$ est bien sûr contenue dans $H^1_f(H_n,V(j))$. Pour $j-1\in J(V)$, on a $H^1_f(H_n,V(j))=H^1(H_n,V(j))$ si $H/\mathbb{Q}_p$ est une extension finie (comparer les dimensions). Par contre, si $\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V(j))=\underline{D}(V(j))$, on a $H^1_e(H_n,V(j))=0$. En particulier, si $h+j\leqq -1$, $(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})_{m,j}$ est nul pour tout entier m. Nous expliquerons ces faits troublants au premier abord dans le par. 3.3.

(v) La dépendance de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ par rapport à ε est claire: il est facile de vérifier que l'on a pour $\tau\in G_{\infty}$, $\Omega^{\tau\varepsilon}_{V,h}=\tau\Omega^{\varepsilon}_{V,h}=\Omega^{\varepsilon}_{V,h}\circ\tau$.

3.3 Propriétés de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$ et dépendance en h

3.3.1. Proposition. *Soient $h'\geqq h\geqq 1$ des entiers vérifiant les hypothèses du théorème* 3.2.3. *Alors, on a*

$$\Omega^{\varepsilon}_{V,h'}=\prod_{h\leqq r<h'}\ell_r\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V,h}.$$

où $\ell_r=r-\log\gamma/\log\chi(\gamma)$ est défini en 3.1.7.

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour $j\gg 0$ et pour tout entier $m\geqq 0$, on a

$$Tw^{\varepsilon}_{j,V}\circ\Omega^{\varepsilon}_{V,h'}\equiv Tw^{\varepsilon}_{j,V}\circ\Big(\prod_{h\leqq r<h'}\ell_r\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V,h}\Big)\ \text{modulo}\ \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\omega_m(\gamma-1)\cdot Z^1_{\infty}(\underline{\mathbf{T}}(j)),$$

c'est-à-dire que

$$\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h'+j}\equiv\prod_{h\leqq r<h'}\ell_{r+j}\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h+j}\ \text{modulo}\ \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\omega_m(\gamma-1)\cdot Z^1_{\infty}(\underline{\mathbf{T}}(j)),$$

car $Tw^{\varepsilon}_{j,V}(\lambda\cdot x)=Tw_{-j}(\lambda)\cdot Tw^{\varepsilon}_{j,v}(x)$ et $Tw_{-j}(\ell_r)=\ell_{r+j}$. Or $\ell_{r+j}\equiv r+j$ modulo $\omega_m(\gamma-1)$. La congruence précédente est donc équivalente à

$$\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h'+j}\equiv\prod_{h\leqq r<h'}(r+j)\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h+j}=(h'+j-1)!/(h+j-1)!\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V(j),h+j}$$
$$\text{modulo}\ \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\omega_m(\gamma-1)\cdot Z^1_{\infty}(\underline{\mathbf{T}}(j)),$$

ce qui est vrai d'après la condition (i) du théorème 3.2.3.

3.3.2 On aimerait poser

$$\Gamma(s)=\Big(\prod_{r\geqq s}\ell_r\Big)^{-1} \text{ et } \Gamma_u(X)=\Big(\prod_{r\geqq 0}(r-\log(1+X)/\log u)\Big)^{-1}$$

pour tout entier s (i.e. $\Gamma_{\chi(\gamma)}(\chi(\gamma)^{-s}\cdot\gamma-1)=\Gamma(s)$). De même que, dans $\mathbb{C}$, la fonction $\Gamma(s)$ a un pôle simple en tous les entiers $\leqq 0$, $\Gamma_u(X)$ a un pôle simple en $u^{-j}\zeta-1$ pour toute racine de l'unité d'ordre une puissance de p et pour tout entier $j\leqq 0$. Mais, cela n'a bien sûr pas de sens. Par contre, si h et h' sont deux entiers (dans $\mathbb{Z}$) avec par exemple $h'\geqq h$, on a $\Gamma(h')/\Gamma(h)=\prod_{h<j\leqq h'}\ell_j$. Dans le paragraphe suivant, nous allons donner un sens à $\Gamma(h)$.

3.3.3 Soit M un $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-module. Soit $\mathscr{K}(G_\infty)$ l'anneau total des fractions de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. Posons pour simplifier $\underline{M}=\mathscr{K}(G_\infty)\bigotimes_{\mathscr{H}_\infty(G_\infty)} M$. Pout tout entier r, on note $\mathscr{L}_r(\underline{M})$ le $\mathscr{K}(G_\infty)$-module des familles $(\omega_h)_{h\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\underline{M}$ tes que $\omega_{h+1}=(\ell_h)^r\cdot\omega_h$. Le $\mathscr{K}(G_\infty)$-module $\mathscr{L}_0(\underline{M})$ s'identifie à $\underline{M}$. On pose $\mathscr{L}(\underline{M})=\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathscr{L}_r(\underline{M})$. C'est une algèbre graduée. Si j est un entier, on définit une application $\Gamma(j)^n\colon\mathscr{L}(\underline{M})\to\mathscr{L}(\underline{M})$ de degré $-n$ par $(\omega_h)\mapsto(\tilde{\omega}_h)_h$ avec $\tilde{\omega}_h=\prod_{j\leqq s<h}(\ell_s)^{-n}\cdot\omega_h$ pour $h\gg 0$ (un élément de $\mathscr{L}_r(\underline{M})$ est en fait déterminé par la donnée d'un ω_h). On a donc $\Gamma(j)^n(\mathscr{L}_r(\underline{M}))=\mathscr{L}_{r-n}(\underline{M})$ et $\Gamma(h)^{-n}\circ\Gamma(h)^n=1$. Plus généralement, si n_j est une famille d'entiers relatifs presque tous nuls, l'homomorphisme $\prod_j\Gamma(j)^{n_j}\colon\mathscr{L}(\underline{M})\to\mathscr{L}(\underline{M})$ est de degré $s=-\sum n_j$. Remarquons que la restriction de $\Gamma(j)^r$ à $\mathscr{L}_r(\underline{M})$ est à valeurs dans $\underline{M}$ et coincide avec l'opérateur de projection sur la j-ième composante.

3.3.4 On note ι l'application $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$ dans lui-même telle que $\iota(\tau)=\tau^{-1}$ pour $\tau\in G_\infty$. On notera éventuellement ι de manière exponentielle. Si M est un $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-module, on note M^ι le $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-module qui s'en déduit par changement de l'action de G_∞ par $\tau\mapsto\tau^{-1}$. On note encore ι l'homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules de M dans M^ι déduit de l'identité. On a donc $\iota(\lambda\cdot m)=\iota(\lambda)\cdot\iota(m)$ pour $m\in M$ et $\lambda\in\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. Pour tout entier r, on note $\tilde{\iota}\colon\mathscr{L}(\underline{M})\to\mathscr{L}(\underline{M}^\iota)$ l'application définie de la manière suivante: si $\omega=(\omega_h)_{h\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{L}_r(\underline{M})$, on pose $\tilde{\iota}(\omega)_h=(-1)^{r\cdot h}\cdot\iota(\omega_{1-h})$. Le fait que $\tilde{\iota}$ est bien définie vient de ce que $\iota(\ell_h)=-\ell_{-h}$. En particulier, $\tilde{\iota}(\mathscr{L}_r(\underline{M}))=\mathscr{L}_{-r}(\underline{M}^\iota)$. Lorsque $r=0$, $\tilde{\iota}$ est l'application ι: $\underline{M}\to\underline{M}^\iota$. On a encore $\tilde{\iota}(\lambda\cdot m)=\iota(\lambda)\cdot\tilde{\iota}(m)$ pour $m\in\mathscr{L}(M)$ et $\lambda\in\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. Enfin, $(-1)^r\cdot\tilde{\iota}\circ\tilde{\iota}$ coïncide avec l'identité sur $\mathscr{L}_r(\underline{M})$.

Lemme. *On a*

$$\Gamma(j)^n\circ\tilde{\iota}\circ\Gamma(1-j)^n=(-1)^{j\cdot n}\cdot\tilde{\iota}\colon\mathscr{L}(\underline{M})\to\mathscr{L}(\underline{M}^\iota).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier l'égalité pour $n=1$. On vérifie que l'image de $\mathscr{L}_r(\underline{M})$ par les applications des deux membres est contenue dans $\mathscr{L}_{-r}(\underline{M}^\iota)$. Soit $\omega\in\mathscr{L}_r(\underline{M})$, il suffit de calculer la j-composante de l'image ω' de ω par $\Gamma(j)\circ\tilde{\iota}\circ\Gamma(1-j)$ et on vérifie facilement que

$$\omega'_j=(-1)^{(r-1)\cdot j}\cdot\iota(\omega_{1-j})=(-1)^j\cdot\tilde{\iota}(\omega)_j.$$

D'où le lemme.

Si l'on pose

$$\boldsymbol{\Gamma}^*(j)=\tilde{\imath}\circ\boldsymbol{\Gamma}(j),\ \boldsymbol{\Gamma}^*(j)^n=\tilde{\imath}\circ\boldsymbol{\Gamma}(j)^n:\mathscr{L}(\underline{M})\to\mathscr{L}(\underline{M}')$$

le lemme devient alors

$$\boldsymbol{\Gamma}(j)^n\circ\boldsymbol{\Gamma}^*(1-j)^n=(-1)^{n\cdot j}\cdot\tilde{\imath}.$$

On laisse le lecteur rêver à l'analogie avec la fonction Γ usuelle et à son équation fonctionnelle prise en un entier.

3.3.5 Revenons aux $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}$. On note $\Omega^{\varepsilon}_V=\boldsymbol{\Gamma}(h)^{-1}(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})$ pour h assez grand. La proposition 3.3.1 signifie que Ω^{ε}_V ne dépend pas du choix de h et on pose $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}=\boldsymbol{\Gamma}(h)(\Omega^{\varepsilon}_V)$ pour tout $h\in\mathbb{Z}$. On a donc pour tout $h'\geqq h$ la formule

$$\Omega^{\varepsilon}_{V,h'}=\prod_{h\leqq r<h'}\ell_r\cdot\Omega^{\varepsilon}_{V,h}.$$

3.4 Le déterminant de Ω^{ε}_V

Nous supposons dans les pars. 3.4., 3.5., 3.6 que *H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.*

3.4.1 Posons $h_r(V)=\dim_H \mathrm{Fil}^r\,\underline{D}(V)/\mathrm{Fil}^{r+1}\,\underline{D}(V)$. En termes de la décomposition de Hodge-Tate de V, on a donc un isomorphisme de G_H-modules $\mathbb{C}_p\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}V\simeq\bigoplus_r\mathbb{C}_p(-r)^{h_r(V)}$. D'autre part, si M est un W-réseau de $\underline{D}(V)$, on pose

$$\mathscr{D}_{\infty,M}(V)=W[\![T]\!]^{\psi=0}\bigotimes_W M$$

et

$$\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}},M)=(\det_\Lambda\mathscr{D}_{\infty,M}(V))^{-1}\bigotimes_\Lambda\Big(\bigotimes_{i\in\{1,2\}}(\det_\Lambda Z^i_\infty(\underline{\mathbf{T}}))^{(-1)^{i+1}}\Big).$$

Ce dernier module est un Λ-module libre de rang 1. Le $\mathbb{Q}_p\otimes\Lambda$-module $\Delta_\infty(V)=\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}},M)$ est indépendant des choix de M et $\underline{\mathbf{T}}$.

On peut définir $\det(\Omega^{\varepsilon}_V)(\omega)$ pour $\omega\in\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}},M)^{-1}$ ou $\Delta_\infty(V)^{-1}$ comme la suite des $\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})(\omega)$. C'est donc un élément de $\mathscr{L}_s(\mathscr{H}_\infty(G_\infty))$ avec $s=[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\dim_{\mathbb{Q}_p}V$. Comme $\dim_{\mathbb{Q}_p}V=\sum_r h_r(V)$,

$$\delta(\Omega^{\varepsilon}_V)\underset{\text{déf}}{=}\prod_r\boldsymbol{\Gamma}(-r)^{h_r(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\det(\Omega^{\varepsilon}_V)(\omega)$$

est un élément de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. De manière explicite, remarquons que

$$\prod_{r>-h}(\ell_{-r})^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^r D(V)}=\prod_{j>-h}\ \prod_{-h<r\leqq j}(\ell_{-r})^{h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}.$$

On a donc en fait

$$\delta(\Omega^{\varepsilon}_V)=\prod_{j>-h}(\ell_{-j})^{-\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D(V)}\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})$$

(le produit est fini puisque $\mathrm{Fil}^j \underline{D}(V)$ est nul pour $j \gg 0$).

3.4.2. Théorème. *On a* $\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(V)^{-1}) \subset \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$.

Remarque. Grâce à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0} \to \mathscr{D}_\infty(V) \to \bigoplus_r \underline{D}(V)/(1-p^r \cdot \varphi) \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(r) \to 0,$$

cela équivalent à dire que l'image de

$$\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \det_\Lambda \mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\tilde{\Delta}=0} \otimes (\det_\Lambda Z_\infty^1(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}})^{-1}$$

par $\delta(\Omega_V^\varepsilon)$ est contenue dans

$$\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} (\bigotimes_j (\det_\Lambda \underline{D}(V(j))^{\varphi=1}(-j))^{-1} \otimes (\det_\Lambda \underline{\mathrm{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}})^{-\iota} \otimes \det_\Lambda \underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}}).$$

C'est sous cette dernière forme que nous démontrons le théorème dans les paragraphes suivants.

3.4.3. Lemme. (i) *L'action de G_∞ sur $V^{G_{H_\infty}}$ est semi-simple et on a*

$$V^{G_{H_\infty}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V(-j)^{G_H}(j).$$

(ii) *L'intersection de $H_e^1(H, V)$ et de $H^1(G_\infty, V^{G_{H_\infty}})$ dans $H^1(H, V)$ est nulle.*

Démonstration. Montrons (i). La représentation V étant cristalline est de Hodge-Tate. On en déduit que les caractères de l'action de G_∞ sur $V^{G_{H_\infty}}$ sont donnés par des χ^j avec $j \in \mathbb{Z}$. Par twist, on se ramène donc au cas où $j=0$. Supposons que $(V^{G_{H_\infty}}/V^{G_H})^{G_H} \neq 0$. Il existe donc une sous-représentation cristalline de $V^{G_{H_\infty}}$, extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par V^{G_H}. D'où un élément de $H_f^1(H, V^{G_H}) \cap H^1(G_\infty, V^{G_H}) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(G_H, V^{G_H})$; étant nul sur G_{H_∞} et sur $G_{H^{\mathrm{nr}}}$ où H^{nr} est la plus grande extension non ramifiée de H, cet élément est nul, ce qui est contradictoire. La seconde affirmation est alors claire.

Montrons (ii). La semi-simplicité de l'action de G_∞ sur $V^{G_{H_\infty}}$ implique que $H^1(G_\infty, V^{G_H}) = H^1(G_\infty, V^{G_{H_\infty}})$. Il suffit donc de montrer que

$$H_e^1(H, V) \cap H^1(H, V^{G_H}) = 0.$$

Soit x un élément de l'intersection. Soient Y une extension de $\mathbb{Q}_p$ par V^{G_H} le représentant et X la somme amalgamée de V et de Y au dessus de V^{G_H}. Par hypothèse, on a une décomposition $\underline{D}(X) = \underline{D}(V) \oplus \underline{D}(\mathbb{Q}_p)$ stable par φ. On en déduit facilement une décomposition $\underline{D}(Y) = \underline{D}(V^{G_H}) \oplus \underline{D}(\mathbb{Q}_p)$ stable par φ. Comme il est clair que $\mathrm{Fil}^j \underline{D}(X) = \mathrm{Fil}^j \underline{D}(V) \oplus \mathrm{Fil}^j \underline{D}(\mathbb{Q}_p)$ pour tout j, l'extension Y est scindée et $x=0$.

3.4.4 L'application $\Xi_{n,V}\colon \mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0} \to H_n \bigotimes_H \underline{D}(V)/\underline{D}(V)^{\varphi=1}$ se factorise par $\omega_n(\gamma-1).\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$. Notons $\tilde{\Xi}_{n,V}\colon (\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n} \to H_n \bigotimes_H \underline{D}(V)/\underline{D}(V)^{\varphi=1}$ la flèche qui s'en déduit. D'autre part, on déduit de la suite exacte

$$0 \to \mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0} \to \mathscr{D}_\infty(V) \to \bigoplus_r \underline{D}(V)/(1-p^r\cdot\varphi) \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(r) \to 0$$

une application de $\underline{D}(V)/(\varphi-1)$ dans $(\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n}$.

Lemme. *L'image de* $\underline{D}(V)/(\varphi-1)$ *dans* $(\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n}$ *est contenue dans* $\ker\tilde{\Xi}_{n,V}$ *et on a une suite exacte de* $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]$*-modules*

$$0 \to \underline{D}(V)/(\varphi-1)\,\underline{D}(V) \to \ker\tilde{\Xi}_{n,V} \to \underline{D}(V)^{\varphi=p^{-1}} \to 0$$

(la flèche $\ker\tilde{\Xi}_{n,V} \to \underline{D}(V)^{\varphi=p^{-1}}$ *étant donnée par* $g\mapsto g(0)$*). L'application*

$$\operatorname{coker}\tilde{\Xi}_{n,V} \to \underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)$$

donnée par $\alpha\mapsto(1-\varphi)\operatorname{Tr}_{H_n/H}(\alpha)$ modulo $(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]$*-modules.*

Démonstration. Soit $g\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ tel que $\tilde{\Xi}_{n,V}(g)=0$. Alors, si $(1-\varphi)\,G=g$, on a $G(\zeta_n-1)\in\underline{D}(V)^{\varphi=1}$. On peut changer G par cet élément de $\underline{D}(V)^{\varphi=1}$. On a donc $G(\zeta_n-1)=0$. En utilisant l'équation $\psi\otimes 1(G)=(1\otimes\varphi)G$, on en déduit par récurrence que $G(\zeta_m-1)=0$ pour $0\leq m\leq n$ et que $(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,G(0)=0$. On a donc $(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,g(0)=0$, d'où l'application $\ker\tilde{\Xi}_{n,V}\to\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-1}}$. Si g appartient de plus au noyau de cette application, on a alors $g(\zeta_m-1)=0$ pour $-1\leq m\leq n$. On en déduit que g est divisible par $\omega_{n+1}(T)$ dans $W[\![T]\!]$ et appartient à $\omega_n(\gamma-1)\cdot\mathscr{D}_\infty(V)$. Réciproquement, si $g\in\omega_n(\gamma-1)\cdot\mathscr{D}_\infty(V)\cap\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$, il est clair que $\Xi_{n,V}(g)$ est nul. On déduit alors de la suite exacte

$$0 \to \underline{D}(V)/(\varphi-1) \to (\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n} \to \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} \to \underline{D}(V)/(\varphi-1) \to 0$$

que le noyau de $\ker\tilde{\Xi}_{n,V}\to\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-1}}$ est isomorphe à $\underline{D}(V)/(\varphi-1)$. Il reste à montrer que l'application $\ker\tilde{\Xi}_{n,V}\to D(V)^{\varphi=p^{-1}}$ est surjective. On peut soit le faire directement soit démontrer d'abord la seconde assertion du lemme et en déduire la surjectivité par un argument de dimension, ce que nous allons faire. Considérons la suite

$$\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0} \to H_n \bigotimes_H D(V)/D(V)^{\varphi=1} \to \underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V) \to 0.$$

Il est clair qu'elle est exacte en $\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)$. Si $g\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ et si $(1-\varphi)\,G=g$, l'image de g dans $\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1}\,\underline{D}(V)$ est égale à

$$\begin{aligned}
&(1-\varphi)\operatorname{Tr}_{H_n/H}(\Xi_{n,V}(g)))\bmod(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)\\
&\equiv(1-\varphi)\operatorname{Tr}_{H_n/H}(G(\zeta_n-1))\\
&\equiv(1-\varphi)(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,G(0)\\
&\equiv(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,g(0)
\end{aligned}$$

ce qui est nul dans $\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)$ (remarquons que $p\cdot\varphi=1$ dans $\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\,\underline{D}(V)$). Démontrons l'exactitude de la suite en $H_n\bigotimes_H D(V)/D(V)^{\varphi=1}$, ce qui montrera que coker $\tilde{\Xi}_{n,V}\simeq\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})$. Soit $x_n\in H_n\bigotimes_H D(V)$ tel que $\mathrm{Tr}_{H_n/H}(x_n)=(p\cdot\varphi-1)\,x_{-1}$ avec $x_{-1}\in\underline{D}(V)$. Définissons par récurrence $x_m=\mathrm{Tr}_{H_{m+1}/H_m}(x_{m+1})$ pour $0\leqq m<n$. Il existe alors un élément G de $W[T]\otimes\underline{D}(V)$ tel que $(p\cdot\sigma\otimes\varphi)^{-(m+1)}(G)(\zeta_m-1)=x_m$ pour $-1\leqq m\leqq n$. On a

$$\begin{aligned}p\cdot\psi((p\cdot\sigma\otimes\varphi)^{-(m+1)}\cdot G)(\zeta_{m-1}-1)&=\mathrm{Tr}_{H_m/H_{m-1}}((p\cdot\sigma\otimes\varphi)^{-(m+1)}\,G(\zeta_m-1))\\&=\mathrm{Tr}_{H_m/H_{m-1}}(x_m)=x_{m-1}=(p\cdot\sigma\otimes\varphi)^{-m}(G)(\zeta_{m-1}-1)\text{ pour }1\leqq m\leqq n,\\ p\cdot\psi(G)(0)=\mathrm{Tr}_{H_0/H}(G(\zeta_0-1))+G(0)&=\mathrm{Tr}_{H_0/H}(x_0)+x_{-1}=p\cdot\varphi\cdot G(0).\end{aligned}$$

On en déduit que si $g=(1-\varphi)G$, on a $\psi(g)(\zeta_m-1)=0$ pour $-1\leqq m\leqq n-1$. Donc $\psi(g)$ est divisible par $\omega_n(T)$. On écrit alors $\psi(g)=\psi\circ\varphi\circ\psi(g)$ où $\varphi\circ\psi(g)$ est divisible par $\varphi(\omega_n(T))=\omega_{n+1}(T)$. Posons $g_1=g-\varphi\circ\psi(g)=g-\omega_n(\gamma-1)\cdot h\in H[T]^{\psi=0}\otimes\underline{D}(V)$. Il est facile de voir que l'on peut modifier h par un élément de $H[T]^{\psi=0}\otimes\underline{D}(V)$ de manière à ce que $h\in(H[T]^{\psi=0}\otimes\underline{D}(V))^{\tilde{\Delta}=0}$. L'élément g_1 obtenu appartient à $\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ et a x_n comme image dans $H_n\bigotimes_H D(V)/D(V)^{\varphi=1}$.

3.4.5 On note $\Omega^\varepsilon_{V,h,n}$ l'application déduite de $\Omega^\varepsilon_{V,h}$:

$$(\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n}\to(\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}Z^1_\infty(\mathbf{T})/\mathbf{T}^{G_{H_\infty}})_{\Gamma_n}.$$

Lemme. *Supposons que $h\geqq1$. On a la suite exacte*

$$\begin{aligned}0\to\ker\tilde{\Xi}_{n,V}\to\ker\Omega^\varepsilon_{V,h,n}\to H_n\bigotimes_H\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V)/V^{G_H}\to\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})\\ \to(V^*(1)^{G_H})^*\to0.\end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons que $V^{G_{H_n}}=V^{G_H}$ (on a une inclusion de $V^{G_{H_n}}$ dans $\underline{D}(V)^{\varphi=1}$). L'exactitude en les 4 premiers termes se déduit d'une chasse au diagramme, du théorème 3.2.3, C et du fait que l'image de $H_n\bigotimes_H\underline{D}(V)$ par $\exp_{H_n,V}$ est contenue dans $H^1_e(H_n,V)$ dont l'intersection avec $H^1(H_\infty/H_n,V^{G_{H_\infty}})$ est nulle (lemme 3.4.3). L'application $H_n\bigotimes_H\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V)/V^{G_H}\to\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})$ est donnée par $x_n\mapsto(1-\varphi)\cdot\mathrm{Tr}_{H_n/H}(x_n)=(1-p^{-1})\,\mathrm{Tr}_{H_n/H}(x_n)$ dans $\underline{D}(V)/(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})$ puisque $\varphi=p^{-1}$ dans cet espace. Sa transposée est donc à une constante près l'application naturelle $\underline{D}(V^*(1))^{\varphi=1}\to t_{V^*(1)}(H_n)$ dont le noyau est $V^*(1)^{G_{H_n}}=V^*(1)^{G_H}$.

3.4.6. Démonstration du théorème 3.4.2 Posons $F=\det(\Omega^\varepsilon_{V,h})(\omega)$ pour $\omega\in\det_\Lambda\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\tilde{\Delta}=0}\otimes(\det_\Lambda Z^1_\infty(\mathbf{T})/\mathbf{T}^{G_{H_\infty}})^{-1}$. En décomposant $D=\oplus D_{[-\alpha]}$ avec $\dim_H D_{[\alpha]}=h_N(\alpha)$ et en utilisant la remarque (i) de 3.2.4, on obtient que F est un $\underset{\smile}{O}(\log^s)$ avec $s=[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\sum_\alpha(h-\alpha)\cdot h_N(-\alpha)$ (ce qui signifie que chacune de ses η-composantes l'est). La représentation V étant cristalline, les polygônes de Hodge et de Newton ont même extrémités. On en déduit que $s=[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\sum_j(h+j)\cdot h_j(V)$. D'autre part, $\prod_{j>-h}(\ell_{-j})^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D(V)}$ est un $O(\log^{s'})$ avec

$$s'=\sum_{j>-h}\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\,\underline{D}(V)=[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\sum_{r>-h}\sum_{j\geqq r}h_j(V)=[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\sum_j(j+h)\cdot h_j(V)=s.$$

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que F est divisible par

$$\prod_{j\in\mathbb{Z}}(\chi(\gamma)^j\cdot\gamma-1)^{\beta(j)}\cdot\prod_{j>-h}(\ell_{-j})^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D(V)}$$

avec $\beta(j)\geqq\dim_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V(j))^{\varphi=1}-\dim_{\mathbb{Q}_p}V(j)^{G_H}+\dim_{\mathbb{Q}_p}V(j)^*(1)^{G_H}$, c'est-à-dire que $Tw_{-j}(F)(X)=F(\chi(\gamma)^{-j}(1+X)-1)$ est congru à 0 modulo $\omega_0(X)^{\beta(j)}\cdot\omega_n(X)^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^j D(V)}$ pour tout entier m et pour tout entier $j>-h$. Par définition même de $\Omega^\varepsilon_{V,h}$, il s'agit de calculer le noyau de $\Omega^\varepsilon_{V(j),h+j}$ modulo $\omega_n(\gamma-1)$, ce qui est fait dans les lemmes 3.4.4 et 3.4.5 en remplaçant V par $V(j)$ pour $j+h\geqq 1$. On en déduit en utilisant le lemme 3.1.8 et en remarquant que

$$H_n\otimes\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V(j))\simeq\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]^{\dim_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Fil}^0 D(V(j))}$$

que l'on a

$$\beta(j)\geqq\dim_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V(j))^{\varphi=1}-\dim_{\mathbb{Q}_p}V(j)^{G_H}+\dim_{\mathbb{Q}_p}V(j)^*(1)^{G_H}.$$

En utilisant le lemme 3.4.3, on en déduit le théorème 3.4.2.

3.4.7. Conjecture ($\delta(V)$) *On a* $\delta(\Omega^\varepsilon_V)(\Delta_\infty(V)^{-1})=\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$.

3.4.8 Nous motivons cette conjecture par le fait que
(i) elle est compatible aux suites exactes de représentations cristallines;
(ii) elle est vraie pour une représentation p-adique cristalline ordinaire (on utilise pour cela l'assertion précédente et le résultat pour une représentation du type $\mathbb{Q}_p(r)$, voir infra n° 4);
(iii) c'est une conséquence de la loi de réciprocité que nous énonçons dans le par. 3.6. Nous y reviendrons alors.

Montrons ici le fait (i). Soit $(v)\ 0\to V'\to V\to V''\to 0$ une suite exacte de représentations p-adiques cristallines et $\underline{\mathbf{T}}'$, $\underline{\mathbf{T}}$, $\underline{\mathbf{T}}''$ des réseaux stables par G_H tels que l'on ait aussi la suite exacte $0\to\underline{\mathbf{T}}'\to\underline{\mathbf{T}}\to\underline{\mathbf{T}}''\to 0$. On a alors la suite exacte suivante de Λ-modules

$$0\to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}')\to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})\to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}'')\to Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}')\to Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}')\to Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}'')\to 0.$$

Comme d'autre part, on a la suite exacte de Λ-modules

$$0\to\mathscr{D}_\infty(V'')\to\mathscr{D}_\infty(V)\to\mathscr{D}_\infty(V'')\to 0,$$

on en déduit facilement que si deux des conjectures $\delta(V)$, $\delta(V')$, $\delta(V'')$ sont vraies, la troisième l'est aussi.

3.4.9 Supposons la conjecture $\delta(V)$ vraie. Si M est un réseau de $\underline{D}(V)$, on peut alors écrire $\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}}, M)^{-1}) = \xi_{\mathbf{T},M} \cdot \Lambda$ où $\xi_{\mathbf{T},M} \in \mathbb{Q}_p[\Delta]/\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$. On désire donner conjecturalement la valeur de $\xi_{\mathbf{T},M}$.

Posons $\Delta_{H_0/H}(V) = (\det_{\mathbb{Q}_p[\Delta]} \underline{D}(V))^{-1} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p[\Delta]} \det_{\mathbb{Q}_p[\Delta]}(\mathrm{Ind}_{H_0/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_0/H} V))$. Si M et $\underline{\mathbf{T}}$ sont comme ci-dessus et si $\omega_{\mathbf{T},M}$ est une base du sous-$\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module $\Delta_{H_0/H}(\underline{\mathbf{T}}, M) = (\det_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} M)^{-1} \bigotimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} \det_{\mathbb{Z}_p[\Delta]}(\mathrm{Ind}_{H_0/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_0/H} \underline{\mathbf{T}}))$ de $\Delta_{H_0/H}(V)$, posons $\xi_V(\omega_{\mathbf{T},M}) = \xi_{\mathbf{T},M} \in \mathbb{Q}_p[\Delta]/\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$. On obtient une application bien définie $\xi_V: \Delta_{H_0/H}(V) \to \mathbb{Q}_p[\Delta]/\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$ indépendante de la manière dont on a écrit $\omega = \omega_{\mathbf{T},M}$, vérifiant $\xi_V(\alpha\omega) = \alpha^{-1} \cdot \xi_V(\omega)$ et telle que $\xi_V(\Delta_{H_0/H}(\underline{\mathbf{T}}, M)) = \xi_{\mathbf{T},M} \cdot \mathbb{Z}_p[\Delta]$ ou ce qui revient au même

$$\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}}, M)^{-1}) = \xi_V(\omega_{\mathbf{T},M}) \cdot \Lambda.$$

D'autre part, l'isomorphisme de comparaison $B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq B_{\mathrm{cris}} \bigotimes_{H} \underline{D}(V)$ induit une injection linéaire de $\Delta_{H_0/H}(V)$ dans $\mathbb{Q}_p[\Delta] \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{dR}}$ et même plus précisément dans $\mathbb{Q}_p[\Delta] \bigotimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \cdot t^r$ pour un entier r convenable (en fait, on a $r = -[H:\mathbb{Q}_p] \cdot \sum s \cdot h_s(V)$). Notons $\Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(V)$ le sous-$\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module de $\Delta_{H_0/H}(V)$ qui est l'image réciproque de $\mathbb{Z}_p[\Delta] \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cdot t^r$.

Conjecture ($\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$). *La conjecture $\delta(V)$ est vraie et si ω est une base de $\Delta_{H_0/H}(V)$, on a*

$$\mathbb{Z}_p[\Delta] \cdot \xi_V(\omega) \cdot \omega = \Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(V).$$

Pour la deuxième condition, il est équivalent de demander que si ω est une base du $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module $\Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(V)$, $\xi_V(\omega) = 1$.

La conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ détermine l'image de $\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}}, M)^{-1})$ dans $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$; elle signifie en effet que si $\underline{\mathbf{T}}$ et M sont tels que, par l'isomorphisme de comparaison, ils déterminent une unité de $\mathbb{Z}_p[\Delta] \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, on a

$$\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}}, M)^{-1}) = \Lambda.$$

Remarque. Lorsque l'on ne sait pas que la conjecture $\delta(V)$ est vraie, on peut quand même écrire $\delta(\Omega_V^\varepsilon)(\Delta_\infty(\underline{\mathbf{T}}, M)^{-1} = \bar{\xi}_{\mathbf{T},M} \cdot \Lambda$ avec $\bar{\xi}_{\mathbf{T},M} \in \mathbb{Q}_p \otimes \Lambda / \Lambda^\times$; $\mathbb{I}_\Gamma(\bar{\xi}_{\mathbf{T},M}) \in \mathbb{Q}_p[\Delta]/\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$ ne dépend que du choix de M et $\underline{\mathbf{T}}$ et définit comme précédemment une application $\xi_{V,H_0/H}$: $\Delta_{H_0/H}(V) \to \mathbb{Q}_p[\Delta]/\mathbb{Z}_p[\Delta]^\times$ vérifiant encore

$$\xi_V(\alpha\omega) = \alpha^{-1} \cdot \xi_V(\omega).$$

On peut alors énoncer la conjecture plus faible suivante:

Conjecture ($\delta_{\mathbb{Z}_p,H_0/H}(V)^{\mathrm{faible}}$). *Si ω est une base de $\Delta_{H_0/H}(V)$, on a*

$$\mathbb{Z}_p[\Delta] \cdot \xi_{V,H_0/H}(\omega) \cdot \omega = \Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(V).$$

Il est facile de voir comme en 3.4.8 que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte de représentations p-adiques cristallines et si deux des conjectures $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$, $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V')$, $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V'')$ sont vraies, il en est de même de la troisième. De plus, $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ est vraie lorsque V est une représentation p-adique ordinaire (voir infra n° 4) et de même pour la version faible. Une autre justification à ces conjectures se trouve dans les considérations des par. 3.4.10 et suivants.

3.5 Lien avec les nombres de Tamagawa

Le corps H est encore ici une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

3.5.1 Donnons une variante de la construction faite en [FP3] d'invariants attachés à V. Posons $G_n = \mathrm{Gal}(H_n/H)$. On a donc $\Delta = G_0$. Posons de manière analogue à 3.4.9

$$\Delta_{H_n/H}(V) = (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \underline{D}(V))^{-1} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(\mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H} V));$$

si M et $\underline{\mathbf{T}}$ sont des réseaux de $\underline{D}(V)$ et de V,

$$\Delta_{H_n/H}(\underline{\mathbf{T}}, M) = (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} M)^{-1} \bigotimes_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}(\mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H} \underline{\mathbf{T}})).$$

La suite exacte de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules

$$0 \to t_{V^*(1)}(H_n)^* \to H_n \bigotimes_H \underline{D}(V) \to t_V(H_n) \to 0$$

définit un isomorphisme

$$\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H_n \bigotimes_H \underline{D}(V) = \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_V(H_n \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_{V^*(1)}(H_n))^{-1}.$$

La suite exacte $(s_{H_n}(V))$

$$0 \to H^0(H_n, V) \to \underline{D}(V) \xrightarrow{1-\varphi} \underline{D}(V) \oplus t_V(H_n) \to H^1(H_n, V)$$

$$\to \underline{D}(V^*(1))^* \oplus t_{V^*(1)}(H_n)^* \xrightarrow{1-{}^t\varphi^{-1}} \underline{D}(V^*(1))^* \to H^2(H_n, V) \to 0$$

définit alors (au signe près) un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules libres de rang 1

$$(\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H_n \bigotimes_H \underline{D}(V))^{-1} \simeq \bigotimes_{i \in (0,1,2)} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^i(H_n, V))^{(-1)^i}.$$

D'où un isomorphisme

$$\Delta_{H_n/H}(V) \simeq \Delta_{\mathrm{EP}, H_n/H}(V)$$

avec

$$\Delta_{\mathrm{EP}, H_n/H}(V) = \bigotimes_{i \in (0,1,2)} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^i(H_n, V))^{(-1)^i} \bigotimes_{\mathbb{Q}_p[G_n]} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(\mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H} V))).$$

On montre (à l'aide des calculs de caractéristique d'Euler-Poincaré, [Mi]) que le sous-$\mathbb{Z}_p[G_n]$-module libre

$$\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H}(\underline{\mathbf{T}}) = \bigotimes_{i\in(0,1,2)} (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^i(H_n, \underline{\mathbf{T}}))^{(-1)^i} \bigotimes_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}(\mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H}\underline{\mathbf{T}}))$$

de $\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H}(V)$ est indépendant du choix de $\underline{\mathbf{T}}$ et définit un $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module canonique libre de rang 1 dans $\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H}(V)$. Par transport, on en déduit un $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module canonique libre de rang 1 dans $\Delta_{H_n/H}(V)$ que l'on note $\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V)$.

3.5.2 On définit les nombres de Tamagawa de V à valeurs dans $\mathbb{Q}_p[G_n]/\mathbb{Z}_p[G_n]^\times$ de la manière suivante: on a la suite exacte de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules

$$0 \to H^0(H_n, V) \to \underline{D}(V) \to \underline{D}(V) \oplus t_V(H_n) \to H^1_f(H_n, V) \to 0.$$

On en déduit un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules libres de rang 1

$$L_{f,H_n/H}(V) \underset{\text{déf}}{=} \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^0(H_n, V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^1_f(H_n, V))^{-1} \simeq (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_V(H_n))^{-1}.$$

Soit le sous-$\mathbb{Z}_p[G_n]$-module

$$L_{f,H_n/H}(\underline{\mathbf{T}}) = \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^1_f(H_n, \underline{\mathbf{T}}))^{-1}.$$

Si ω est une base de $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_V(H_n)$, on note $\mathrm{Tam}^0_\omega(\underline{\mathbf{T}})$ l'élément de $\mathbb{Q}_p[G_n]/\mathbb{Z}_p[G_n]^\times$ tel que

$$L_{f,H_n/H}(\underline{\mathbf{T}}) \simeq \mathrm{Tam}^0_\omega(\underline{\mathbf{T}}) \cdot \omega^{-1}$$

par l'isomorphisme précédent.

D'autre part, notons $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi | D(V^*(1))$ le déterminant de $-\varphi$ agissant sur $\det_{\mathbb{Q}_n[G_n]} D(V^*(1))$ (il est indépendant de la base choisie). C'est un élément de $\mathbb{Q}_p[G_n]$. Remarquons que si η est un caractère non trivial de G_n, on a

$$\eta(\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi | D(V^*(1)))) = 1,$$
$$\mathbb{I}_{G_n}(\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi | D(V^*(1)))) = \det_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi | D(V^*(1))).$$

Le lien entre la droite $\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V)$ et les nombres de Tamagawa de V est donné par la proposition suivante dont on laisse la démonstration au lecteur:

Proposition. *Soient* $\underline{\mathbf{T}}$ *un réseau de* V *stable par* G_H, $\omega_{\mathbf{T}}$ *une base du sous-*$\mathbb{Z}_p[G_n]$*-module* $\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H}\underline{\mathbf{T}})$ *de* $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \mathrm{Ind}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_n/H} V)$ *et* $\omega_{\mathrm{dR}} \in \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H_n \bigotimes_H \underline{D}(V)$. *Ecrivons* $\omega = (\omega_{\mathrm{dR}})^{-1} \otimes \omega_{\mathbf{T}} \in \Delta_{H_n/H}(V)$, $\omega_{\mathrm{dR}} = \omega_1 \otimes \omega_2^{-1}$ *avec* $\omega_1 \in \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_V(H_n)$ *et* $\omega_2 \in \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_{V^*(1)}(H_n)$. *Alors,*

$$\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V) = \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi | D(V^*(1))) \cdot \mathrm{Tam}^0_{\omega_1}(\underline{\mathbf{T}}) \cdot \mathrm{Tam}^0_{\omega_2}(\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{-1} \cdot \mathbb{Z}_p[G_n] \cdot \omega.$$

3.5.3 Posons $\Gamma^*(r) = \Gamma(r)$ si r est un entier >0, $= (-1)^r \cdot \Gamma(1-r)^{-1}$ si r est un entier $\leqq 0$. Alors, $\Gamma^*(r)$ est le coefficient dominant de la fonction Γ en $s = r$ (en utilisant l'équation fonctionnelle de la fonction Γ lorsque $r \leqq 0$).

On définit $\Delta_{H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V)$ comme l'image réciproque dans $\Delta_{H_n/H}(V)$ de $\mathbb{Z}_p[G_n]\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\cdot t^r$ par l'isomorphisme de comparaison (comme en 3.4.9). On pose

$$\Phi_{H_n/H}=\prod_{0\leq m\leq n}\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\mathbb{Q}_p(\mu_m)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1))/\mathbb{Q}_p(\mu_{m-1})\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1)))^{-(m+1)}.$$

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}\Phi_{H_n/H}&=\prod_{-1\leq m\leq n}\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\mathbb{Q}_p(\mu_n)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1))/\mathbb{Q}_p(\mu_m)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1)))^{-1}\\&=\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\mathbb{Q}_p(\mu_n)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1))^{-(n+1)}\\&\quad\cdot\prod_{-1\leq m<n}\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\mathbb{Q}_p(\mu_m)\bigotimes_{\mathbb{Q}_p}\underline{D}(V^*(1)))^{-1}.\end{aligned}$$

La propriète fondamentale de $\Phi_{H_n/H}$ est que, si η est un caractère de G_n se factorisant par G_{n_η} et non par $G_{n_\eta-1}$ (n_η est donc un entier avec $-1\leqq n_\eta\leqq n$), on a

$$\eta(\Phi_{H_n/H})=\det{}_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi\,|\,\underline{D}(V^*(1)))^{-(n_\eta+1)}$$

La conjecture $C_{\mathrm{EP},K}(V)$ de [FP3] devient dans cette situation un peu différente:

Conjecture $C_{\mathrm{EP},H_n/H}(V)$. *On a*

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V)=\Phi_{H_n/H}\cdot\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\underline{D}(V^*(1)))\\\cdot\prod_j\Gamma^*(-j)^{-h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot\Delta_{H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V).\end{aligned}$$

Remarque. Il est facile de montrer par un calcul de facteurs ε que si η est un caractère de G_n d'ordre fini, la «η-composante» de $C_{\mathrm{EP},H_n/H}(V)$ redonne la conjecture de [FP3] pour $V(\eta)$.

3.5.4 Théorème (avec un grain de sable). *Supposons que φ est semi-simple en 1 et p^{-1}. Si ω est une base de $\Delta_{H_n/H}(V)$, on a*

$$\Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}(V)=\Phi_{H_n/H}\cdot\det{}_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(-\varphi\,|\,\underline{D}(V^*(1)))\cdot\prod_j\Gamma^*(-j)^{-h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot\xi_V(\omega)\cdot\omega.$$

En particulier, la conjecture $C_{\mathrm{EP},H_n/H}(V)$ est équivalente à la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p,H_n/H}(V)^{\mathrm{faible}}$.

La conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p,H_n/H}(V)^{\mathrm{faible}}$ est la suivante: avec les notations de 3.4.9, l'image de $\xi_{\mathbf{T},M}$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]/\mathbb{Z}_p[G_n]^\times$ ne dépend que du choix de M et $\underline{\mathbf{T}}$ et définit une application $\xi_{V,H_n/H}:\Delta_{H_n/H}(V)\to\mathbb{Q}_p[G_n]/\mathbb{Z}_p[G_n]^\times$ vérifiant encore

$$\xi_{V,H_n/H}(\alpha\omega)=\alpha^{-1}\cdot\xi_V(\omega).$$

La conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p,H_n/H}(V)^{\mathrm{faible}}$ dit que si ω est une base de $\Delta_{H_n/H}(V)$, on a

$$\mathbb{Z}_p[G_n]\cdot\xi_{V,H_n/H}(\omega)\cdot\omega=\Delta_{H_n/,\mathbb{Z}_p}(V).$$

Le grain de sable est le suivant: nous démontrons le théorème dans le cas où $\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V)=0$; dans le cas général, nous le démontrons en supposant le conjecture Réc(V) que nous énonçons plus loin (3.6.4). Remarquons que le cas particulier $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$ suffit pour retrouver le théorème de Bloch-Kato sur les nombres de Tamagawa de $\mathbb{Q}_p(r)$, cf. infra 4.1.7.

La démonstration du théorème est faite dans les paragraphes suivants. On ne suppose pas la condition $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$ dans les pars. 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7.

3.5.5. Lemme. *Soit η un caractère de G_n. La fonction $s \mapsto \eta \cdot \chi^s(\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h}(\omega))/\delta_V(\omega))$ a un zéro en $s=0$ de multiplicité* $\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)$ *et on a*

$$\lim_{s\to 0} \eta \cdot \chi^s(\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h}(\omega))/\delta_V(\omega))/s^r = \pm (h-1)\,!^{d\cdot[H:\mathbb{Q}_p]} \cdot \prod_j \Gamma^*(-j)^{-h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}$$

où $d=\dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

En particulier, si $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$, l'image de $\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})/\delta_V$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$ est égal à $(h-1)\,!^{d\cdot[H:\mathbb{Q}_p]} \cdot \prod_{j<0} \Gamma(-j)^{-h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]} \cdot \mathbb{Z}_p[G_n]$.

La *démonstration* est un simple calcul: $s \mapsto \eta \cdot \chi^s(\ell_0)$ a un zéro d'ordre 1 et on $\lim_{s\to 0} \eta \cdot \chi^s(\ell_0)/s = 1$. On calcule d'autre part $\eta \cdot \chi^s(\prod_{j>-h, j\neq 0} (\ell_{-j})^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Fil}^j D(V)})$.

3.5.6 On construit un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules

$$\bigotimes_{i\in(0,1,2)} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^i(H_n, V))^{(-1)^i}$$
$$\simeq \bigotimes_{i\in(1,2)} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^i_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n})^{(-1)^i} \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^i_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n})^{(-1)^{i+1}})$$

à partir des suites exactes et isomorphismes suivants:
(i) on a la suite exacte de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, V) \to H^1(\Gamma_n, V^*(1)^{G_{H_\infty}})^* \to 0;$$

en remarquant que $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}) = (V^*(1)^{G_{H_\infty}})^*$ et donc que

$$\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} = H^1(\Gamma_n, V^*(1)^{G_{H_\infty}})^*,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, V) \to \mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} \to 0$$

(ii) on a $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} = (V^{G_{H_\infty}})^{\Gamma_n} = H^0(H_n, V)$

(iii) on a $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} = (V^*(1)^{G_{H_n}})^* = H^2(H_n, V)$.

Lemme. *Par l'isomorphisme précédent, l'image de* $\bigotimes_{i\in(0,1,2)} (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^i(H_n, \underline{\mathbf{T}}))^{(-1)^i}$ *est le $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module* $\bigotimes_{i\in(1,2)} ((\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} Z^i_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n})^{(-1)^i} \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} Z^i_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n})^{(-1)^{i+1}})$.

Démonstration. La suite exacte (i) provient de la suite exacte de $\mathbb{Z}_p[G_n]$-modules

$$0 \to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \to Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} \to 0:$$

on a en effet la suite exacte

$$0 \to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \to (H^1(\Gamma_n, (V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}})\hat{\ } \to 0$$

(cf. 3.2.1) et l'isomorphisme $Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}) = ((V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}(1))^{G_{H_\infty}})\hat{\ }$, d'où

$$Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} = (H^1(\Gamma_n, (V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))^{G_{H_\infty}})\hat{\ }.$$

De même, on a

$$Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})^{\Gamma_n} = (\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})^{\Gamma_n} = H^0(H_n, \underline{\mathbf{T}})$$

et

$$Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}})_{\Gamma_n} = H^0(H_n, V^*(1)/\underline{\mathbf{T}}^*(1))\hat{\ } = H^2(H_n, \underline{\mathbf{T}}).$$

On en déduit le lemme.

3.5.7 Soit α un endomorphisme d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{Q}_p[G_n]$-module) D de rang fini semi-simple en 0, c'est-à-dire tel que l'application t_α : $\ker \alpha \to \operatorname{coker} \alpha$ induite par l'identité soit un isomorphisme après extension des scalaires par l'anneau des fractions total. La suite exacte $0 \to \ker \alpha \to D \to D \to \operatorname{coker} \alpha \to 0$ et t_α permettent de définir un homomorphisme

$$\det{}^*(\alpha) \colon \det D \otimes (\det D)^{-1} \to \mathbb{Q}_p (\text{resp. } \mathbb{Q}_p[G_n]).$$

Ainsi, si D est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel et si A est la matrice de D dans une base ω et r la dimension de $\ker \alpha$, on a $\det(A+X) = \det^*(\alpha)(\omega \otimes \omega^{-1}) \cdot X^r + \dots$. Si M est un réseau de D(resp. un sous-$\mathbb{Z}_p[G_n]$-module tel que $\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} M$ s'injecte dans $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} D$), l'image de $\det(M) \otimes \det(M)^{-1}$ dans $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_p[G_n]$) par l'isomorphisme $\det^*(\alpha)$ est indépendante de M; on la note $\det^*_{\mathbb{Q}_p}(\alpha|D)$ (resp. $\det^*_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(\alpha|D)$. Si β est un endomorphisme de D semi-simple en 0, on a $\det^*_{\mathbb{Q}_p}(\alpha \circ \beta|D) = \det^*_{\mathbb{Q}_p}(\alpha|D) \cdot \det^*_{\mathbb{Q}_p}(\beta|D)$.

Supposons maintenant que $1-\varphi$ est *semi-simple*. Notons S le conoyau de $\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\Delta=0} \to \mathscr{D}_{\infty,M}(V)$. On a la suite exacte

$$0 \to S^{\Gamma_n} \to (\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathscr{D}_{\infty,M}(V)_{\Gamma_n} \to S_{\Gamma_n} \to 0$$

qui tensorisée par $\mathbb{Q}_p$ devient la suite exacte de $\mathbb{Q}_p[G_n]$-modules

$$0 \to \underline{D}(V)/(1-\varphi) \to (\mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} \to \underline{D}(V)/(1-\varphi) \to 0$$

car S est isomorphe en tant que Λ-module à $\oplus (M/(1-p^i \cdot \varphi)\underline{D}(V) \cap M) \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$. On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \underline{D}(V)/(1-\varphi) & \to & (\mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} & \to & \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} & \to & \underline{D}(V)/(1-\varphi) & \to 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \Xi_{n,V}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & & \\
0 & & \leftarrow & H_n \bigotimes_H \underline{D}(V)/\underline{D}(V)^{\varphi=1} & \leftarrow & H_n \bigotimes_H \underline{D}(V) & \leftarrow & \underline{D}(V)^{\varphi=1} & \leftarrow 0.
\end{array}$$

En utilisant l'isomorphisme $t_{\varphi-1}: \underline{D}(V)^{\varphi=1} \to \underline{D}(V)/(1-\varphi)$, on en déduit une application

$$\det{}^* \alpha_n : \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H_n \bigotimes_H \underline{D}(V))^{-1} \to \mathbb{Q}_p[G_n]$$

qui est injective si et seulement si α_n est semi-simple.

Lemme. *Supposons $1-\varphi$ et $1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1}$ semi-simples en 0. Alors, $\det^* \alpha_n$ est non nul et l'image de*

$$\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathscr{D}_{\infty,M}(V)_{\Gamma_n} \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathcal{O}_{H_n} \bigotimes_W M)^{-1}$$

dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$ est

$$\begin{aligned}&\det{}^*_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(1-\varphi\,|\,\underline{D}(V))^{-1}\cdot\det{}^*_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1}\,|\,\underline{D}(V))\cdot(\Phi_{H_n/H})^{-1}\\ &\quad=\det{}^*_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(1-\varphi\,|\,\underline{D}(V))^{-1}\cdot\det{}^*_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(1-\varphi\,|\,\underline{D}(V^*(1)))\cdot(\Phi_{H_n/H})^{-1}.\end{aligned}$$

Remarque. Soit η un caractère non trivial de G_n d'idempotent e_η. Soient $\mathbb{Q}_p[\eta]$ le corps des valeurs de η (on a donc $\mathbb{Q}_p[\eta]=\mathbb{Q}_p(\mu_{n_\eta})$) et $\mathbb{Z}_p[\eta]$ son anneau d'entiers. Le lemme implique que l'image de $\det_{\mathbb{Z}_p[\eta]} e_\eta \mathscr{D}_{\infty,M}(V)_{\Gamma_n} \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p[\eta]} e_\eta(\mathcal{O}_{H_n} \bigotimes_H M))^{-1}$ dans $\mathbb{Q}_p[\eta]$ par l'application induite par $e_\eta \circ \Xi_{n,V}$ est

$$\eta(\Phi_{H_n/H})^{-1}\cdot\mathbb{Z}_p[\eta]=\det_{\mathbb{Q}_p}(\varphi\,|\,\underline{D}(V^*(1)))^{(n_\eta+1)}.$$

Démonstration. Pour démontrer le lemme, il suffit de démontrer qu'il est vrai en prenant l'image par e_η où η est un caractère de G_n. Faisons la démonstration dans le cas plus difficile où le caractère η de G_n est trivial.

On pose $\alpha=\mathrm{Tr}_{H_0/H}\circ\alpha_0$. L'application $g\mapsto g(0)$ induit l'isomorphisme $\mathscr{D}_\infty(V)_{G_\infty}\simeq\underline{D}(V)$. D'autre part, l'image de l'injection

$$(\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{G_\infty}/(\underline{D}(V)/(1-\varphi)) \to \mathscr{D}_\infty(V)_{G_\infty}=\underline{D}(V)$$

(voir lemme 3.4.4) est $(\varphi-1)\,\underline{D}(V)$ et on a

$$(1-\varphi)\circ\alpha=(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1})$$

(cf. 3.2.2). Les hypothèses impliquent donc que α est semi-simple. Comme $\mathscr{D}_{\infty,M}(V)_{G_\infty}\simeq M$, le nombre que l'on calcule n'est autre que

$$\det{}^*_{\mathbb{Q}_p}(\alpha\,|\,\underline{D}(V))=\det{}^*_{\mathbb{Q}_p}(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1}\,|\,\underline{D}(V))\det{}^*_{\mathbb{Q}_p}(1-\varphi\,|\,D(V))^{-1}.$$

Le cas où η est un caractère non trivial de G_n se traite de manière analoque: on a alors $e_\eta\,G(\zeta_n-1)=e_\eta\,g(\zeta_n-1)$ et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}(\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0})_{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[d, "e_\eta\circ\Xi_{n,V}"'] & \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} \arrow[d, "g\mapsto e_\eta\cdot(p\varphi)^{-(n+1)}(g)(\zeta_n-1)"] \\ H_n\otimes\underline{D}(V) \arrow[r, phantom, "="] & H_n\otimes\underline{D}(V).\end{tikzcd}$$

3.5.8 Démontrons le théorème 3.5.4 dans le cas où $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$. Si $\omega_{\mathbf{T},M}$ est une base du Λ-module $\Lambda_\infty(\mathbf{T}, M)$, la projection ξ_h de $\det(\Omega^\varepsilon_{V,h})((\omega_{\mathbf{T},M})^{-1})$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$ est l'image de

$$\det\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathscr{D}_{\infty,M}(V)_{\Gamma_n} \otimes \Big(\bigotimes_{i\in[1,2]} (\det\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_n]} Z^i_\infty(\mathbf{T})_{\Gamma_n})^{(-1)^i} \otimes (\det\nolimits_{\mathbb{Z}_p[G_n]} Z^i_\infty(\mathbf{T})^{\Gamma_n})^{(-1)^{i+1}}\Big)$$

dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$ (3.1.6). En utilisant les lemmes 3.5.5 et 3.5.6, on trouve que

$$\Phi_{H_n/H} \cdot \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-\varphi \,|\, \underline{D}(V)) \cdot \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1} \,|\, \underline{D}(V))^{-1} \cdot \xi_h \cdot \mathbb{Z}_p[G_n]$$

est l'image de $R_n = \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}(\mathscr{O}_{H_n} \bigotimes_W M) \otimes \bigotimes_{i\in(0,1,2)} (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H^i(H_n, \mathbf{T}))^{(-1)^i}$ dans $\mathbb{Q}_p[G_n]$ par l'application obtenue à partir des suites exactes et isomorphismes qui suivent (ici, $\underline{D}(V)^{\varphi=1}=0$):

$$(h-1)!\cdot \exp_{H_n,V} : H_n \bigotimes_H \underline{D}(V) \simeq H^1_f(H_n, V);$$

$$0 \to H^1_f(H, V) \to H^1(H, V) \to (\underline{D}(V^*(1))/(1-\varphi))^* \to 0;$$

$$0 \to (\underline{D}(V^*(1))/(1-\varphi))^* \to \underline{D}(V^*(1))^* \to \underline{D}(V^*(1))^* \to (\underline{D}(V^*(1))^{\varphi=1})^*;$$

$$(\underline{D}(V^*(1))^{\varphi=1})^* \simeq H^2(H_n, V).$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-{}^t\varphi^{-1} \,|\, \underline{D}(V^*(1))^*) &= \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-\varphi^{-1} \,|\, \underline{D}(V^*(1)))\\ &= \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi \,|\, \underline{D}(V^*(1)))^{-1}\cdot \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-\varphi \,|\, \underline{D}(V^*(1)))\\ &= \det\nolimits_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi \,|\, \underline{D}(V^*(1)))^{-1}\cdot \det\nolimits^*_{\mathbb{Q}_p}(1-p^{-1}\cdot\varphi^{-1} \,|\, \underline{D}(V)),\end{aligned}$$

on obtient que $(h-1)!^{-d\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot \Phi_{H_n/H}\cdot \det_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi \,|\, \underline{D}(V^*(1)))\cdot \xi_h \cdot \mathbb{Z}_p[G_n]$ est l'image de R_n par l'application obtenue à partir de la suite exacte

$$0 \to \underline{D}(V) \xrightarrow{(1-\varphi,\mathrm{id})} \underline{D}(V) \oplus H_n \bigotimes_H \underline{D}(V) \to H^1(H_n, V)$$

$$\to \underline{D}(V^*(1))^* \xrightarrow{1-{}^t\varphi^{-1}} \underline{D}(V^*(1))^* \to H^2(H_n, V) \to 0.$$

D'où, en utilisant le lemme 3.5.5 et 3.5.1,

$$\begin{aligned}\xi_V(\tilde\omega_{\mathbf{T},M})\cdot \omega_{\mathbf{T},M}\cdot \mathbb{Z}_p[G_n] &= ((h-1)!)^{-d\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot \prod_j \Gamma^*(-j)^{h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot \xi_h \cdot \omega_{\mathbf{T},M}\cdot \mathbb{Z}_p[G_n]\\ &= (\Phi_{H_n/H})^{-1}\cdot \det\nolimits_{\mathbb{Q}_p}(-\varphi \,|\, \underline{D}(V^*(1)))^{-1} \prod_j \Gamma^*(-j)^{h_j(V)\cdot[H:\mathbb{Q}_p]}\cdot \Delta_{\mathrm{EP},H_n/H,\mathbb{Z}_p}\cdot\end{aligned}$$

D'où le théorème 3.5.4 dans le cas où $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$.

3.5.9 On ne suppose plus que $\mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)=0$. Dans ce cas, l'application

$$\Omega^\varepsilon_{V,h,n} : \mathbb{Q}_p \otimes \mathscr{D}_\infty(V)_{\Gamma_n} \to \mathbb{Q}_p \otimes (Z^1_\infty(\mathbf{T})/\mathbf{T}^{G_{H_\infty}})_{\Gamma_n}$$

n'est plus un isomorphisme. Nous avons besoin du fait suivant, généralisation de 3.16 et 3.18.

Soient M et N deux Λ-modules sans torsion de même rang. Soient

$$g\colon \mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda M \to \mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda N$$

un homomorphisme injectif de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-modules et $g_n\colon \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} M_{\Gamma_n} \to \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} N_{\Gamma_n}$ l'application qui s'en déduit. On définit une application

$$t_\gamma(g)\colon \ker g_n \to \operatorname{coker} g_n$$

de la manière suivante: si $x\in\ker g_n$, soit $\hat{x}$ un relèvement dans $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda M$, alors $g(\hat{x})=(\gamma^{p^n}-1)\cdot y$ avec $y\in\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda N$. L'image de y dans $\operatorname{coker} g_n$ ne dépend que de x (et de γ). On la note $t_\gamma(g_n)(x)$. On a alors la propriété suivante: si $\omega\in\det_\Lambda(M)\otimes\det_\Lambda(N)^{-1}$ et si $r=\dim\ker g_n$, on a

$$\det(g)(\omega)\equiv(\gamma^{p^n}-1)^r\cdot\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}(t_\gamma(g_n))(\omega_n')\ \text{dans}\ (\gamma^{p^n}-1)^r\,\mathbb{Q}_p[G_n]$$

où $\omega_n'\in(\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}\ker g_n)\otimes(\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}\operatorname{coker} g_n)^{-1}$ et ω sont compatibles en un sens évident à la suite exacte

$$0\to\ker g_n\to\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} M_{\Gamma_n}\to\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} N_{\Gamma_n}\to\operatorname{coker} g_n\to 0.$$

Revenons à $\Omega^\varepsilon_{V,h,n}$: rappelons (lemme 3.4.5) que l'on a une application déduite de $\Xi_{n,V}$:

$$\ker\Omega^\varepsilon_{V,h,n}\to H_n\otimes\mathrm{Fil}^0\underline{D}(V)/V^{G_H}.$$

D'autre part, l'application

$$\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})/\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}}\to H^1(H_n,V)/H^1_f(H_n,V)+H^1(H_\infty/H_n,V^{G_{H_\infty}})$$
$$\to H_n\otimes\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V)/V^{G_H}$$

se factorise par $\operatorname{coker} g_n$. Pour des raisons évidentes, on repousse la démonstration du lemme suivant au par. 3.6.9 (la conjecture Réc(V) est énoncée en 3.6):

Lemme. *Si la conjecture* Réc(V) *est vraie, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
\ker\Omega^\varepsilon_{V,h,n} & \xrightarrow{\;t_\gamma(\Omega^\varepsilon_{V,h,n})\;} & \operatorname{coker}\Omega^\varepsilon_{V,h,n}\\
\downarrow & & \downarrow\\
H_n\otimes\mathrm{Fil}^0\underline{D}(V)/V^{G_H} & \xrightarrow{\;-(h-1)!\cdot(\log\chi(\gamma^{p^n}))^{-1}\;} & H_n\otimes\mathrm{Fil}^0\,\underline{D}(V)/V^{G_H}.
\end{array}$$

Le théorème 3.5.4 se démontre alors comme en 3.5.8 en utilisant les faits précédents. Nous laissons la démonstration au lecteur.

3.6 Loi explicite de réciprocité

On suppose toujours que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

3.6.1 Pour tout entier n le cup-produit induit une forme bilinéaire

$$\langle\ ,\ \rangle_{V,H_n}: H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}) \times H^1(H_n, \underline{\mathbf{T}}^*(1)) \to H^2(H_n, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p$$

qui est non dégénérée une fois tensorisée par $\mathbb{Q}_p$. Par passage à la limite sur n, on en déduit une forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$:

$$Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}) \times Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1)) \to \Lambda.$$

Explicitement, elle se décrit de la manière suivante: soient $x_\infty = (x_n) \in Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})$ et $y_\infty = (y_n) \in Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))$. Alors, les éléments

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(H_n/H)} \langle \tau^{-1} x_n, y_n \rangle_{V,H_n} \cdot \tau \in \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]$$

sont compatibles pour les applications de projection $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_{n+1}/H)] \to \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]$ et définissent donc un élément de Λ qui est $\langle x_\infty, y_\infty \rangle_V$. On a donc encore

$$\langle x_\infty, y_\infty \rangle_V \equiv \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(H_n/H)} \langle \tau^{-1} x_n, y_n \rangle_{V,H_n} \cdot \tau \text{ modulo } \omega_n.$$

On vérifie facilement le lemme suivant:

Lemme. *Soient* $x_\infty \in Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})$, $y_\infty \in Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))$.
(i) *Pour tout* $\lambda \in \Lambda$, *on a*

$$\langle \lambda \cdot x_\infty, y_\infty \rangle_V = \lambda \cdot \langle x_\infty, y_\infty \rangle_V = \langle x_\infty, \iota(\lambda) \cdot y_\infty \rangle_V$$

(on rappelle que ι est l'application $\mathbb{Z}_p$-linéaire de Λ dans lui-même telle que $\iota(\tau) = \tau^{-1}$ pour $\tau \in G_\infty$).
(ii) *Pour tout entier* $j \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\langle Tw^\varepsilon_{j,V}(x_\infty), Tw^\varepsilon_{-j,V^*(1)}(y_\infty) \rangle_{V(j)} = Tw_{-j}(\langle x_\infty, y_\infty \rangle_V)$$

où $Tw_j : \Lambda \to \Lambda$ *est l'application* $\mathbb{Z}_p$*-linéaire telle que* $Tw_j(\tau) = \chi(\tau)^j \tau$ *pour* $\tau \in G_\infty$.

Remarque. L'application

$$\begin{gathered} Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}) \times Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))^\iota \to \Lambda \\ (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_V \end{gathered}$$

est une application *bilinéaire de Λ-modules.* Cette application se prolonge d'autre part naturellement en une application bilinéaire de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$-modules

$$\mathscr{H}_\infty(G_\infty) \bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}) \times \mathscr{H}_\infty(G_\infty) \bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))^\iota \to \mathscr{H}_\infty(G_\infty).$$

3.6.2. Lemme. *Soit* $x\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ *et* $y\in\mathscr{D}_\infty(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}$. *Alors, l'élément* $(-1)^{h-1}\cdot\langle\Omega^\varepsilon_{V,h}(x),\,\Omega^\varepsilon_{V^*(1),1-h}(y^\iota)\rangle_V$ *de* $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$ *est indépendant de* $h\in\mathbb{Z}$ *et de* ε. *On le note* $\langle\Omega_V(x),\,\tilde{\iota}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V$. *L'application*

$$\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}\times\mathscr{D}_\infty(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}\to\mathscr{H}_\infty[\![G_\infty]\!]$$
$$(x,y)\mapsto\langle\Omega_V(x),\,\tilde{\iota}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V$$

est une application bilinéaire de Λ*-modules.*

Démonstration. On peut soit faire un calcul explicite facile soit remarquer directement que $(x,y)\mapsto\langle\Omega_V(x),\,\tilde{\iota}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V$ est obtenu comme composé

$$\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}\times\mathscr{D}_\infty(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}\to\mathscr{L}_1(Z_\infty)\times\mathscr{L}_1(Z^*_\infty)\to\mathscr{L}_1(Z_\infty)\times\mathscr{L}_1(Z^*_\infty)^\iota$$
$$\to\mathscr{L}_0(\mathscr{H}_\infty[\![G_\infty]\!])=\mathscr{H}_\infty[\![G_\infty]\!].$$

avec

$$Z_\infty=\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}})/\underline{\mathrm{T}}^{G_{H_\infty}},$$

$$Z^*_\infty=\mathscr{H}_\infty(G_\infty)\bigotimes_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathrm{T}}^*(1))/\underline{\mathrm{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}}.$$

3.6.3 Construisons maintenant directement une application bilinéaire de Λ-modules $[\cdot,\cdot]_{D(V)}$:

$$\mathscr{D}_\infty(V)\times\mathscr{D}_\infty(V^*(1))\to H\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda.$$

On a une dualité naturelle $[\;,\;]$: $\underline{D}(V)\times\underline{D}(V^*(1))\to H$. D'autre part, il existe une unique structure de produit $*$ sur $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ compatible avec la structure de Λ-module et tel que $(1+T)*(1+T)=(1+T)$. Remarquons que par l'isomorphisme de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ sur l'espace des mesures sur $\mathbb{Z}_p^\times$ à valeurs dans W (cf. 1.2.5), ce produit correspond au produit de convolution. On note $[\;,\;]_{D(V)}$ l'unique forme bilinéaire de Λ-modules

$$\mathscr{D}_\infty(V)\times\mathscr{D}_\infty(V^*(1))\to H\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$$

telle que

$$[g_1\otimes d,\,g_2\otimes d']_{D(V)}=[d,d']\cdot g_1*g_2\in H\otimes W[\![T]\!]^{\psi=0}$$

pour $g_1,g_2\in W[\![T]\!]^{\psi=0}$ et $d\in\underline{D}(V)$, $d'\in\underline{D}(V^*(1))$.

Enfin, l'application trace de H à $\mathbb{Q}_p$ induit différentes applications notées $\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}\colon H\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda\to\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$, $\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}\colon H\bigotimes_W W[\![T]\!]^{\psi=0}\to\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[\![T]\!]^{\psi=0}$.

3.6.4. Conjecture (Réc(V)). *Soit* V *une représentation cristalline de* G_H. *Alors, pour tout* $x\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde{\Delta}=0}$, $y\in\mathscr{D}_\infty(V^*(1))^{\tilde{\Delta}=0}$, *on a*

$$\langle\Omega_V(x),\,\tilde{\iota}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V\cdot(1+T)=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}([x,y]_{D(V)}).$$

Remarque. On peut aussi énoncer la conjecture en termes de «transformée de Mellin». Si $g \in W[\![T]\!]^{\psi=0}$, $\mathrm{Mel}(g)$ désigne l'unique élément de $W[\![G_\infty]\!]$ tel que $\mathrm{Mel}(g)\cdot(1+T)=g(T)$ (cf. 1.1.6). Alors, la formule devient

$$\langle \Omega_V(x), \tilde{\imath}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V = \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Mel}([x,y]_{D(V)})).$$

3.6.5. Lemme. *La conjecture* Réc(V) *est invariante par twist et stable par passage au dual.*

Démonstration. La deuxième assertion est claire. Montrons la première. Supposons la conjecture Réc(V) vraie. En utilisant les faits

$$Tw^{\varepsilon}_{-j,V^*(1)} = (-1)^j\cdot Tw^{\varepsilon^{-1}}_{-j,V^*(1)}, \qquad D\circ\iota=\iota\circ D^{-1},$$

on calcule:

$$\begin{aligned}
&-\langle \Omega_{V(j)}(x), \tilde{\imath}\circ\Omega_{V(j)^*(1)}(y)\rangle_{V(j)}\cdot(1+T)\\
&=(-1)^{h+j}\langle(-1)^j\cdot Tw^{\varepsilon}_{j,V}\circ\Omega^{\varepsilon}_{V,h}\circ(D^j\otimes e_j)(x), Tw^{\varepsilon}_{-j,V^*(1)}\\
&\quad\circ\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}\circ(D^{-j}\otimes e_{-j})(y^{\iota})\rangle_{V(j)}\cdot(1+T)\\
&=(-1)^h\, Tw_{-j}(\langle\Omega^{\varepsilon}_{V,h}\circ(D^j\otimes e_j)(x), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}\circ(D^{-j}\otimes e_{-j})(y^{\iota})\rangle_V)\cdot(1+T)\\
&=(-1)^h\, D^{-j}(\langle\Omega^{\varepsilon}_{V,h}\circ(D^j\otimes e_j)(x), \tilde{\Omega}^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}((D^j\otimes e_{-j})(y)^{\iota})\rangle_V\cdot(1+T))\\
&=-\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(D^{-j}([(D^j\otimes e_j)(x),(D^j\otimes e_{-j})(y)]_{D(V)})\\
&=-\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(D^{-j}([D^j(x), D^j(y)]_{D(V(j))}))=-\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}([x,y]_{D(V(j))}).
\end{aligned}$$

D'où le lemme.

3.6.6 Une conséquence de la conjecture Réc(V) est la proposition suivante que nous démontrons.

Proposition. *Le discriminant de la forme bilinéaire*

$$(x,y)\to\langle\Omega_V(x), \tilde{\imath}\circ\Omega_{V^*(1)}(y)\rangle_V$$

sur $\mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0}\times\mathscr{D}_\infty(V^*(1))^{\Delta=0}$ *est un élément de* $\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si M (resp. M') est un réseau de $\underline{D}(V)$ (resp. $\underline{D}(V^*(1))$), si

$$\omega\in\det_\Lambda\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\Delta=0}\bigotimes_\Lambda(\det_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}})^{-1}$$

et

$$\omega^*\in\det_\Lambda\mathscr{D}_{\infty,M'}(V^*(1))^{\Delta=0}\bigotimes_\Lambda(\det_\Lambda Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))/\underline{\mathbf{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}})^{-1},$$

l'élément $H=\det(\Omega^{\varepsilon}_V)(\omega)\cdot\det(\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1)})(\omega^*)^{\iota}$ de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$ est un élément de $\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$. On utilise le théorème 3.4.2. Il s'agit alors de montrer directement

$$H=\det(\Omega^{\varepsilon}_{V,h})(\omega)\cdot\det(\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h})(\omega^*)^{\iota}\in\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$$

(pour tout entier h) ou se convaincre qu'il s'agit de montrer que

$$\prod_r [\Gamma(-r)^{h_r(V)} \cdot \tilde{\iota} \circ \Gamma(-r)^{h_r(V^*(1))}] = \prod_r [\Gamma(-r)^{h_r(V)} \cdot \tilde{\iota} \circ \Gamma(1+r)^{h_r(V)}] = \pm 1 .$$

3.6.7. Proposition. *La conjecture* Réc(V) *implique les conjectures* $\delta(V)$ *et* $\delta(V^*(1))$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ (resp. $[\cdot, \cdot]_{D(V)}$) induit un homomorphisme injectif de Λ-modules (resp. de $H \otimes \Lambda$) à conoyau fini

$$Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))/\underline{\mathbf{T}}^*(1)^{G_{H_\infty}}{}^{\iota}, \Lambda)$$

[P2, 2.1.6] (resp.

$$\mathcal{D}_\infty(V) \to \mathrm{Hom}_{H \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \Lambda}(D_\infty(V^*(1))^\iota, H \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \Lambda) :$$

le produit de convolution est surjectif). Comme $\det_\Lambda(\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}) = \det_\Lambda(Z^2_\infty(\underline{\mathbf{T}}^*(1))^\iota$ et de même en échangeant $\underline{\mathbf{T}}$ et $\underline{\mathbf{T}}^*(1)$, on déduit de Réc$(V)$ que

$$\delta(\Omega^\varepsilon_V)(\Delta_\infty(V)^{-1}) \cdot \delta(\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1)})(\Delta_\infty(V^*(1))^{-1})^\iota = \mathbb{Q}_p \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \Lambda .$$

En utilisant le théorème 3.4.2 pour V et pour $V^*(1)$, on en déduit la proposition.

3.6.8. Théorème. *La conjecture* Réc$(\mathbb{Q}_p(r))$ *est vraie pour tout entier* r.

Nous reprendrons dans le par. 4 le cas de $\mathbb{Q}_p(r)$ et y démontrerons ce théorème comme application de formules de Coleman.

3.6.9 Démontrons le lemme énoncé en 3.5.9. On a

$$t_\gamma(\Omega^\varepsilon_{V,h,n})(x) \equiv (\ell_0/(\gamma^{p^n}-1)) \cdot \prod_{1 \leq j < h} \ell_j \cdot (\Omega^\varepsilon_{V,0})(x)_n \text{ modulo} (\gamma^{p^n}-1)$$

$$\equiv -(\log \chi(\gamma^{p^n}))^{-1} \cdot (h-1)! \cdot (\Omega^\varepsilon_{V,0})(x)_n \text{ modulo } (\gamma^{p^n}-1).$$

D'autre part, soit $y \in H_n \underset{H}{\otimes} \underline{D}(V^*(1))$. On peut écrire $y = \Xi_{n,V^*(1)}(f)$ avec $f \in \mathcal{D}_\infty(V^*(1))$. D'où

$$(h-1)! \cdot \exp_{V^*(1)} y = \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),h,n}(f) = (h-1)! \cdot \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(f)_n .$$

On a donc

$$\langle t_\gamma(\Omega^\varepsilon_{V,h,n})(x), \exp_{V^*(1)} y \rangle_{V,H_n}$$
$$= -(\log \chi(\gamma^{p^n}))^{-1} \cdot (h-1)! \cdot \langle \Omega^\varepsilon_{V,0}(x)_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(f)_n \rangle_{V,n} .$$

On en déduit en utilisant Réc(V) que

$$-\log \chi(\gamma^{p^n}) \cdot (h-1)!^{-1} \cdot \langle t_\gamma(\Omega^\varepsilon_{V,h,n})(x), \exp_{V^*(1)} y \rangle_{V,H_n}$$

est le coefficient de l'élément neutre de $\mathrm{Gal}(H_n/H)$ dans $\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}([x,f])$ modulo $(\gamma^{p^n}-1)$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}([\Xi_{n,V}(x), y]_{D(V)})$. L'image de $t_\gamma(\Omega^\varepsilon_{V,h,n})(x)$ dans $H_n \bigotimes_H \mathrm{Fil}^0 \underline{D}(V)$ est donc $-(\log\chi(\gamma^{p^n}))^{-1}\cdot(h-1)!\cdot\Xi_{n,V}(x)$, ce qui démontre le lemme 3.5.9.

4 $\mathbb{Q}_p(r)$

Sauf mention explicite, nous ne supposons pas dans les pars. 4.1.1–4.1.5 et 4.2 que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

4.1 Isomorphismes de Coleman

Nous supposons dans ce paragraphe que $V = V_0(r)$ où r est un entier strictement positif et V_0 une représentation p-adique non ramifiée. On a alors $\underline{D}(V)^{\varphi=1}=0$. Nous reprenons dans ce cas de manière presque indépendante le théorème 3.2.3 en le reliant au théorème de Coleman; la démonstration de *l'existence* de Ω^ε_V ne nécessite pas l'utilisation de plusieurs twists et $\Omega^\varepsilon_{V,r}$ est défini avant de tensoriser par $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$. Sauf mention explicite, on ne suppose pas que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

4.1.1 Le H-espace vectoriel $\underline{D}(V)$ admet un réseau M tel que $p^r\varphi$ agisse sur M comme un σ-automorphisme de W-modules. Si $x \in \mathscr{H}_M(V)$, on a donc

$$p^{-(n+1)}(\sigma\otimes\varphi)^{-(n+1)}\cdot x \in p^{(r-1)(n+1)}\,\mathscr{H}_M(V).$$

On déduit alors de 2.3.6 qu'il existe un entier s tel que

$$p^s\cdot\Sigma_{n,r}(p^{-(r-1)(n+1)}(\sigma\otimes\varphi)^{-(n+1)}\cdot x)$$

soit un élément de $H^1_f(H_n, \underline{T})$ dont l'image dans $H^1_f(H_n, V)$ pour tout entier n est $p^s\cdot C_n((1-\varphi)\,x)$ où C_n est défini en 3.2.2. On le note $p^s\cdot\mathscr{C}_n(x)=p^s\cdot\mathscr{C}_{n,V}(x)$ et bien sûr $\mathscr{C}_n(x)=p^{-s}\cdot p^s\mathscr{C}_n(x)$. Notons $Z_{\infty,f}(\underline{T})=\lim\,\mathrm{proj}\,H^1_f(H_n,\underline{T})$. Lorsque H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, c'est un Λ-module contenu dans $Z^1_\infty(\underline{T})$ de rang $[H:\mathbb{Q}_p]\cdot\dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

4.1.2. Proposition. *Les $\mathscr{C}_{n,V}$ (resp. les $C_{n,V}$) définissent par limite projective un homomorphisme $\mathscr{C}_{\infty,V}$ (resp. $C_{\infty,V}$) de Λ-modules de $\mathscr{H}_M(V)$ dans $p^{-s}\cdot Z_{\infty,f}(\underline{T})$ qui s'étend en un homomorphisme de $\mathscr{H}(V)$ dans $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z_{\infty,f}(\underline{T})$ (resp. de $\mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde\Delta=0}$ dans $\mathbb{Q}_p\otimes Z_{\infty,f}(\underline{T})/V^{G_{H_\infty}}$) et on a le diagramme commutatif de Λ-modules dont les lignes sont exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\log(1+T))^r\otimes\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-r}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathscr{H}(V) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, "\mathscr{C}_{\infty,V}"] & \mathscr{D}_\infty(V)^{\tilde\Delta_r=0} \arrow[r] \arrow[d, "C_{\infty,V}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V^{G_{H_\infty}} \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z_{\infty,f}(\underline{T}) \arrow[r] & \mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z_{\infty,f}(\underline{T})/V^{G_{H_\infty}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Avec les notations du par. 3, on a donc $\Omega^{\varepsilon}_{V,r}=(r-1)!\cdot C_{\infty,V}$ (on rappelle que $V=V_0(r)$).

Démonstration. On a $H^1(H_n,\underline{\mathbf{T}})_{\mathrm{tor}}=(V/\underline{\mathbf{T}})^{G_{H_n}}$ (on remarque que $V^{G_{H_n}}=0$). On en déduit que la limite projective des $H^1(H_n,\underline{\mathbf{T}})_{\mathrm{tor}}$ est égale à $\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}$ et que la limite projective des $\tilde{H}^1_f(H_n,\underline{\mathbf{T}})$ est égale à $Z_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}})/\underline{\mathbf{T}}^{G_{H_\infty}}$. L'existence de $C_{\infty,V}$ et de $\mathscr{C}_{\infty,V}$ est alors claire. Il reste à montrer que la restriction de $\mathscr{C}_{\infty,V}$ à $(\log(1+T))^r\otimes\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-r}}$ est un isomorphisme sur $V^{G_{H_\infty}}$. On déduit de 2.3.7 que $(\log(1+T))^r\otimes\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-r}}$ s'injecte dans $V^{G_{H_\infty}}$. Montrons que ces deux $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels ont même dimension. On a $t^r\otimes\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-r}}\simeq\mathrm{Fil}^0(D(V(-r)))^{\varphi=1}=V(-r)^{G_H}$. Comme $V(-r)$ est une représentation p-adique non ramifiée, on a $V(-r)^{G_H}=V(-r)^{G_{H_\infty}}$, ce qui est égal en tant que $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel à $V^{G_{H_\infty}}$. On en déduit que $\mathscr{C}_{\infty,V}((\log(1+T))^r\otimes\underline{D}(V)^{\varphi=p^{-r}})=V^{G_{H_\infty}}$.

4.1.3 Lorsque $r>1$, on a $Z_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}})=Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}})$. Posons

$$\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}})=Z_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}(1-r))(r)\subset Z_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}).$$

Proposition. (i) *Les homomorphismes de* $\mathbb{Q}_p\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda$-modules $C_{\infty,V}$ *(resp.* $\mathscr{C}_{\infty,V}$*) sont de isomorphismes sur* $\mathbb{Q}_p\otimes\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}})/V^{G_{H_\infty}}$ *(resp. sur* $\mathbb{Q}_p\otimes\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}})$*).*

Plus précisément, soit M un réseau de $\underline{D}(V)$ tel que $p^{-r}\varphi$ soit un automorphisme de W-modules de M. Posons $\underline{\mathbf{T}}=\underline{\mathbf{T}}(M)=(t^r A_{\mathrm{cris}}\bigotimes_W M)^{\varphi=1}$. Rappelons que l'on a posé $\mathscr{D}_{\infty,M}(V)=W[\![T]\!]^{\psi=0}\bigotimes_W M$.

Proposition. (ii) $(r-1)!\,C_{\infty,V}$ *(resp.* $(r-1)!\,\mathscr{C}_{\infty,V}$*) induit un isomorphisme de* Λ-*modules de* $\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\tilde{\Delta}=0}$ *sur* $\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}(M))/\underline{\mathbf{T}}(M)^{G_{H_\infty}}$ *(resp. de* $\mathscr{H}_M(V)$*) sur* $\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}(M))$. *En particulier, on a une suite exacte de* Λ-*modules*

$$0\to\underline{\mathbf{T}}(M)^{G_{H_\infty}}\to\tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}(M))\xrightarrow{((r-1)!\,\mathscr{C}_\infty)^{-1}}\mathscr{D}_{\infty,M}(V)$$

$$\xrightarrow{\tilde{\Delta}}(M/(1-p^r\varphi)M)\bigotimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(r)\to 0.$$

La démonstration (faite en 4.1.5) utilise le comportement de $C_{\infty,V}$ par twist (4.1.4) et le résultat bien connu de Coleman lorsque $r=1$ rappelé en 4.1.5.

4.1.4. Proposition. *Soit j un entier positif. Soit* $g\in\mathscr{D}_{\infty,M}(V)^{\tilde{\Delta}=0}$. *Alors, on a*

$$(r-1)!\cdot Tw^{\varepsilon}_{j,V}(C_{\infty,V}((D^j(g))))=(-1)^j\cdot(r+j-1)!\cdot C_{\infty,V(j)}(g)\ \text{modulo}\ \underline{\mathbf{T}}(M)(j)^{G_{H_\infty}}.$$

Démonstration. On utilise la proposition 2.4.3.

4.1.5 L'application $\mathscr{C}_{\infty,V_0(1)}$ est l'application réciproque de l'application de Coleman (dans le cas $\mathbb{Q}_p(1)$, voir [C1]; voir aussi [P1, théorème 3.1]). La proposition 4.1.3 est dans ce cas bien connue.

La proposition 4.1.4 devient en remplaçant V par $V(1-r)$, r par 1 et j par $r-1$

$$Tw^{\varepsilon}_{r-1,V}(C_{\infty,V(1-r)}((D^{r-1}(g))))=(-1)^{r-1}\cdot(r-1)!\cdot C_{\infty,V}(g)\ \text{modulo}\ \underline{\mathbf{T}}(M)^{G_{H_\infty}}.$$

On déduit alors de 4.1.4, de 4.1.3 pour $V(1-r)=V_0(1)$ et du fait que D est un isomorphisme de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ sur lui-même que la proposition 4.1.3 est vraie.

4.1.6. Corollaire. *Supposons que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. La conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V_0(r))$ est vraie.*

Démonstration. On remarque que le $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module

$$(\det_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} M)^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[\Delta]}(\mathrm{Ind}_{H_0/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Res}_{H_0/H}\underline{\mathbf{T}}(M)))$$

est égal à $\Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(V)$ (3.4.9). Le corollaire se déduit alors de la suite exacte de Λ-modules pour $V=V_0(r)$ (que nous allons montrer)

$$0 \to \tilde{Z}_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}) \to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}) \to (M_0^*/(\varphi-1))^*(r-1) \to \text{fini}$$

où M_0 est un réseau de $\underline{D}(V_0)$ sur lequel φ agit comme un automorphisme de W-modules et où $\underline{\mathbf{T}}=\underline{\mathbf{T}}(M_0[-r])$ (on peut montrer plus précisément la surjectivité, mais nous n'en aurons pas besoin). Il suffit de montrer cette suite exacte pour $r=1$. Pour $V=\mathbb{Q}_p(1)$, c'est un résultat d'Iwasawa ([I, Theorem 25], remarquons qu'il est vrai sans hypothèse de finitude sur $[H:\mathbb{Q}_p]$):

$$0 \to Z_{\infty,f}(\mathbb{Z}_p(1)) \to Z^1_\infty(\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

l'application $Z^1_\infty(\mathbb{Z}_p(1)) \to \mathbb{Z}_p$ est donnée par la valuation. Supposons de nouveau $H/\mathbb{Q}_p$ finie pour simplifier. Prenons $V=V_0(1)$. En remarquant par exemple que l'on a alors $H^1_g(H_n,\underline{\mathbf{T}})=H^1(H_n,\underline{\mathbf{T}})$, on montre la suite exacte [BK]

$$0 \to H^1_f(H_n,\underline{\mathbf{T}}) \to H^1(H_n,\underline{\mathbf{T}}) \to (\underline{D}(V_0^*)/(\varphi-1)\,\underline{D}(V_0^*))^*.$$

Notons S_n l'image de $H^1(H_n,\underline{\mathbf{T}})$. L'application $S_m \to S_n$ pour $m \geqq n$ induite par la corestriction provient de l'identité sur $(\underline{D}(V_0^*)/(\varphi-1))^*$ et l'application $S_n \to S_m$ pour $m \geqq n$ induite par la restriction est injective. On en déduit que l'on a la suite exacte

$$0 \to Z_{\infty,f}(\underline{\mathbf{T}}_0(1)) \to Z^1_\infty(\underline{\mathbf{T}}_0(1)) \to S_0 \to \text{fini}$$

avec $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} S_0=(\underline{D}(V_0^*)/\varphi-1))^*$ et $\underline{\mathbf{T}}_0=\underline{\mathbf{T}}(M_0)$, d'où l'assertion désirée.

4.1.7. Corollaire. *Supposons que $[H:\mathbb{Q}_p]$ est fini. Si r est un entier $\geqq 1$, on a*

$$\mathbb{Z}_p[\Delta]\cdot \mathrm{Tam}^0_{\omega_{0,r}}(\mathbb{Z}_p(r))/\mathrm{Tam}^0_{\omega_{0,1-r}}(\mathbb{Z}_p(1-r))=(r-1)\,!^{-[H:\mathbb{Q}_p]}\,\mathbb{Z}_p[\Delta]$$

où $\omega_{0,s}$ est une base du $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module canonique $\Delta_{H_0/H,\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(s))$. Plus généralement, si η est un caractère de G_{n_η} ne se factorisant pas par $G_{n_\eta-1}$, et si $\omega_{0,s}$ est une base du $\mathbb{Z}_p[\eta]$-module canonique $\Delta_{H,\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(s)(\eta))$, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{Z}_p[\eta]\cdot \mathrm{Tam}^0_{\omega_{0,r}}(\mathbb{Z}_p(r)(\eta))/\mathrm{Tam}^0_{\omega_{0,1-r}}(\mathbb{Z}_p(1-r)(\eta))\\&=p^{-(r-1)\cdot n_\eta}\cdot(r-1)\,!^{-[H:\mathbb{Q}_p]}\,\mathbb{Z}_p[\eta].\end{aligned}$$

Démonstration. Cela se déduit facilement du fait que la conjecture $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(r))$ est vraie, du théorème 3.5.4 et de la proposition 3.5.2.

4.2 Représentations p-adiques ordinaires

On ne suppose pas $H/\mathbb{Q}_p$ finie.

4.2.1. Proposition. *Toute extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(r)$ (dans la catégorie des représentations p-adiques de G_{H_n}) pour $r \geqq 2$ est cristalline.*

Démonstration. L'application $\mathbb{Q}_p \bigotimes_{\mathbb{Z}_p} Z^1_\infty(\mathbb{Z}_p(r))_{\Gamma_n} \to H^1(H_n, \mathbb{Q}_p(r))$ est surjective (proposition 3.2.1). L'application

$$\Xi_{n,\mathbb{Q}_p(r)} : (\mathscr{D}_\infty(\mathbb{Q}_p(r))^{\tilde{\Delta}=0})_{\mathrm{Gal}(H_\infty/H_n)} \to H_n \bigotimes_H \underline{D}(\mathbb{Q}_p(r))$$

est surjective (lemme 3.4.4). On a d'autre part démontré la suite exacte de Λ-modules

$$0 \to \mathbb{Z}_p(r) \to \tilde{Z}^1_\infty(\mathbb{Z}_p(r)) \to \mathscr{D}_\infty(\mathbb{Q}_p(r)) \to \mathbb{Z}_p(r) \to 0.$$

On déduit alors de la suite exacte

$$0 \to \tilde{Z}^1_\infty(\mathbb{Z}_p(r)) \to Z^1_\infty(\mathbb{Z}_p(r)) \to \mathbb{Z}_p(r-1) \to 0$$

(voir démonstration du corollaire 4.1.6). et de ce que $\mathbb{Z}_p(r)_{\mathrm{Gal}(H_\infty/H_n)}$ est fini pour $r \geqq 1$ qu'on a l'isomorphisme

$$\exp_{H_n,\mathbb{Q}_p(r)} : H_n \bigotimes_H \underline{D}(\mathbb{Q}_p(r)) \simeq H^1(H_n, \mathbb{Q}_p(r))$$

pour tout entier n. L'image de $H_n \bigotimes_H \underline{D}(\mathbb{Q}_p(r))$ étant contenue dans $H^1_f(H_n, \mathbb{Q}_p(r))$, on en déduit que $H^1_f(H_n, \mathbb{Q}_p(r)) = H^1(H_n, \mathbb{Q}_p(r))$.

Lorsque $H/\mathbb{Q}_p$ est finie, la proposition précédente est une conséquence de [BK].

4.2.2 Soit K une extension finie totalement ramifiée de H. Une représentation p-adique ordinaire est une représentation p-adique munie d'une filtration décroissante exhaustive et séparée par des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^i V$ stables par l'action de G_K et telle que le sous-groupe d'inertie I_K agit sur $\mathrm{Fil}^i V/\mathrm{Fil}^{i-1} V$ par χ^i où χ est le caractère cyclotomique. Pour tout entier j, soit $D^{[j]}$ le plus grand sous-H-espace vectoriel de D tel qu'il existe un réseau de $D^{[j]}$ (c'est-à-dire un sous-W-module libre de D de rang maximal) sur lequel $p^{-j}\varphi$ agit comme un automorphisme de W-modules; le φ-module filtré D est dit ordinaire si et seulement si les nombres de Newton de D sont des entiers et si pour tout entier j on a

$$D_K = \mathrm{Fil}^i D_K \oplus \Big(\bigoplus_{j<i} (D^{[j]})_K\Big)$$

avec $(D^{[j]})_K = K \bigotimes_H D^{[j]}$.

4.2.3. Proposition. *Toute représentation p-adique ordinaire de $G_{H(\mu_{p^n})}$ est semi-stable. Le foncteur $\underline{D} = \underline{D}_{\mathrm{cris}}$ fournit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques ordinaires cristallines et la catégorie des φ-modules filtrés ordinaires.*

La proposition se déduit de la proposition 4.2.1 comme dans [Bu, exp. IV]. Lorsque $H/\mathbb{Q}_p$ est fini, c'est un résultat de Hyodo.

4.2.4 Restons dans les représentations p-adiques ordinaires. Nous allons montrer sur un exemple que l'introduction de $\mathscr{H}_\infty(G_\infty)$ c'est-à-dire des dénominateurs dans l'algèbre d'Iwasawa est essentielle. Il s'agit pour cela de vérifier que la famille des $(C_{n,V}(g))$ n'est pas toujours entière. Pour cela, on regarde l'exemple suivant: soit V une représentation p-adique cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ extension de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p(2)$. Montrons que *la famille des* $(\exp_{H_n,V}(\Xi_{n,V}(g))$ *est entière pour tout* $g\in\mathscr{D}_\infty(V)^{\Delta=0}$ *si et seulement si l'extension* V *est scindée.*

Démonstration. Soit $(e_{[-1]}, e_{[-2]})$ une base de $\underline{D}(V)$ telle que $\varphi e_{[-1]}=p^{-1}\cdot e_{[-1]}$, $\varphi e_{[-2]}=p^{-2}\cdot e_{[-2]}$. Soit $e_{-1}=e_{[-1]}+\lambda\cdot e_{[-2]}$ une base de $\mathrm{Fil}^{-1}\,\underline{D}(V)$. Posons $C_n(g)=\exp_{H_n,V}(\Xi_{n,V}(g)$. Montrons que l'extension est scindée si et seulement si la famille $(C_n(g))$ est entière pour un g non nul de la forme $\tilde{g}\otimes e_{[-1]}$ et tel que $\tilde{\Delta}_1(g)=0$. Soit G une solution de $(1-\varphi)\,G=g$, $G=\tilde{G}\otimes e_{[-1]}$. On remarque que $G=O(\log)$ et que $D(G)=O(1)$. En reprenant la définition de $C_n(g)$, on voit qu'il suffit de montrer que l'extension est scindée si et seulement si l'on a la propriété suivante à une constante indépendante de n près: soit A_n un élément de $\mathrm{Fil}^0(A_{\mathrm{cris}}\otimes M)$ tel que $(1-\varphi)\,A_n=D(g)(\beta_n-1)\,t$, alors $(\tau-1)(D(G)(\beta_n-1)\,t-A_n)\in p^n\,A_{\mathrm{cris}}\otimes M$.

Lorsque l'extension est scindée, $D(G)(\beta_n-1)\,t\in\mathrm{Fil}^0(A_{\mathrm{cris}}\otimes M)$; on peut donc prendre $A_n=D(G)(\beta_n-1)\,t$ et la propriété est vraie. Réciproquement, écrivons $A_n=a_{n,1}\,e_{[-1]}+a_{n,2}\,e_{[-2]}$. Les équations deviennent

$$(1-p^{-1}\,\varphi)(a_{n,1}-D(\tilde{G})(\beta_n-1)\,t)=0,(1-p^{-2}\,\varphi)\,a_{n,2}=0,$$
$$a_{n,1}\in\mathrm{Fil}^1\,A_{\mathrm{cris}},\, a_{n,2}-\lambda\cdot a_{n,1}\in\mathrm{Fil}^2\,A_{\mathrm{cris}}.$$

De plus, pour $\tau\in G_{H_n}$,

$$(\tau-1)(a_{n,1}-D(\tilde{G})(\beta_n-1)\,t)\in p^n\,A_{\mathrm{cris}},(\tau-1)\,a_{n,2}\in p^n\,A_{\mathrm{cris}}.$$

On en déduit que $\lambda\cdot(\tau-1)(D(\tilde{G})(\beta_n-1)\,t)\in p^n\,A_{\mathrm{cris}}+\mathrm{Fil}^2\,A_{\mathrm{cris}}$ et donc que

$$\lambda\cdot(\tau-1)(D(\tilde{G})(\beta_n-1))\in p^n\,A_{\mathrm{cris}}+\mathrm{Fil}^1\,A_{\mathrm{cris}}.$$

Cela implique que $\lambda\cdot(\tau-1)(D(\tilde{G}))(\zeta_n-1))\in p^n\,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ pour tout entier n. Comme $D(\tilde{G})$ est $O(1)$, on a nécessairement $\lambda=0$ ou $(\tau-1)(D(\tilde{G}))=0$. Mais cette dernière égalité implique la nullité de $D(\tilde{g})$ et donc de g.

4.2.5. Proposition. *Soit* V *une représention p-adique ordinaire cristalline de* G_H. *La conjecture* $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ *est vraie.*

Démonstration. C'est une simple application du fait que $\delta(V)$ est vraie si V a un seul poids de Hodge-Tate non nul (corollaire 4.1.6) et de la compatibilité des conjectures $\delta_{\mathbb{Z}_p}(V)$ aux suites exactes (cf. 3.4.8).

4.3 Loi explicite de réciprocité pour $\mathbb{Q}_p(r)$

4.3.1 Supposons désormais que H est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Donnons une traduction de $\mathrm{Réc}(\mathbb{Q}_p(r))$. Définissons

$$\langle\ ,\ \rangle_r : Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p(1))\times Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p(r))\to\Lambda$$

par $\langle x, y\rangle_r = \langle x, Tw^{\varepsilon}_{-r,\mathbb{Q}_p(r)}(y)\rangle_{\mathbb{Q}_p(1)}$. On a alors pour $g\otimes e_{-1}\in (W[\![T]\!]^{\psi=0}\otimes He_{-1})^{\tilde{\Delta}_1=0}$ et $f\otimes e_{-r}\in (W[\![T]\!]^{\psi=0}\otimes He_{-r})^{\tilde{\Delta}_r=0}$

$$\begin{aligned}&\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(r),r}(f\otimes e_{-r})\rangle_r\\ &= \langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), Tw^{\varepsilon}_{-r,\mathbb{Q}_p(r)}(\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(r),r}(f\otimes e_{-r}))\rangle_{\mathbb{Q}_p(1)}\\ &= \langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p,0}(D^r(f)\otimes e_0)\rangle_{\mathbb{Q}_p(1)}.\end{aligned}$$

La conjecture Réc$(\mathbb{Q}_p(1))$ dit alors que

$$\begin{aligned}\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(r),r}(f\otimes e_{-r})\rangle_r\cdot(1+T) &= \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(g * D^{-r}(f^{\iota}))\\ &= \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(g * D^{r}(f)^{\iota}).\end{aligned}$$

où ι est toujours l'opérateur de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$ tel que $\iota(\lambda\cdot(1+T)) = \iota(\lambda)\cdot(1+T)$ pour $\lambda\in\Lambda$.

Remarquons que si $U_\infty = Z_{\infty,f}(\mathbb{Z}_p(1))$, l'application composée

$$\begin{aligned}H_n \simeq H^1(H_n, \mathbb{Z}_p(r)) \simeq Z^1_\infty(\mathbb{Z}_p(r))_{\Gamma_n} &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\Gamma_n]}(U_\infty, \mathbb{Q}_p(r))\\ \alpha\mapsto \delta\alpha &\mapsto (u\mapsto \langle u, \delta\alpha\rangle_r\cdot t^r)\end{aligned}$$

est l'opposé de l'application définie par Bloch et Kato (ici, $\delta: H_n \to H^1(H_n, \mathbb{Z}_p(r))$ est l'application appelée application de Fontaine-Messing dans [BK]).

4.3.2. Théorème. *La conjecture* Réc$(\mathbb{Q}_p(r))$ *est vraie pour tout entier r.*

Démonstration. D'après 3.6.5, il suffit de la montrer pour $r=1$. C'est alors une conséquence d'un théorème de Coleman [C3]. Plus précisément, soit $\langle\,,\,\rangle_{1,n}$ la forme bilinéaire de $H^1(H_n, \mathbb{Z}_p(1))\times H^1(H_n, \mathbb{Z}_p(1))$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ définie par $(\,,\,)_{H_n} = \zeta_n^{\langle\,,\,\rangle_{1,n}}$ où $(\,,\,)_{H_n}$ est le symbole de Hilbert. La projection de $\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(f\otimes e_{-1})\rangle_1$ dans $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(H_n/H)]$ est égale à

$$\sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(H_n/H)} \langle \gamma^{-1}\,\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1})_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(f\otimes e_{-1})_n\rangle_{1,n}\cdot\gamma,$$

où $\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1})_n$ est la projection de $\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1})$ dans $H^1(H_n, \mathbb{Z}_p(1))$. Le théorème 1 de [C3] traduit dans notre contexte affirme que

$$\begin{aligned}&\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1})_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(f\otimes e_{-1})_n\rangle_{1,n}\\ &\quad\equiv \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(p^{-(n+1)}\cdot \sum_{\zeta} g(\zeta-1)\cdot D(F)(\zeta^{-1}-1)) \bmod p^{n+1}\cdot\mathbb{Z}_p\end{aligned}$$

où ζ parcourt les racines p^{n+1}-ièmes de l'unité et où $(1-p^{-1}\cdot\varphi)(F) = f$. Transformons le second membre. On a

$$\sum_{\zeta} D(F)(\zeta^{-1}-1)\cdot g(\zeta-1) = \sum_{\zeta} D(f)(\zeta^{-1}-1)\cdot g(\zeta-1).$$

En effet,

$$\sum_{\zeta} \varphi(D(F))(\zeta^{-1}-1)\cdot g(\zeta-1) = \sum_{\zeta} D(f)(\zeta^{-p}-1)\cdot g(\zeta-1) = 0$$

car $\psi(g)=0$. On a donc pour $\gamma\in \mathrm{Gal}(H_n/H)$,

$$\begin{aligned}&\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\gamma^{-1}(g)\otimes e_{-1})_n, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(f\otimes e_{-1})_n\rangle_1\\ &\quad\equiv \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(p^{-(n+1)}\cdot\sum_{\zeta} g(\zeta^{\chi(\gamma)^{-1}}-1)\cdot D(f)(\zeta^{-1}-1)) \bmod p^{n+1}\cdot\mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

Montrons que si j est un entier strictement inférieur à p^{n+1} et si g_1 et g_2 sont des éléments de $W[\![T]\!]^{\psi=0}$, $p^{-(n+1)}\cdot\sum_{\zeta} g_1(\zeta^{j^{-1}}-1)\cdot g_2(\zeta^{-1}-1)$ est le coefficient de $(1+T)^j$ dans le polynôme d'interpolation de $g_1 * g_2^{\iota}$ modulo $\omega_{n+1}(T)$. Ce dernier est égal à $p^{-(n+1)}\cdot\sum_{\zeta}\zeta^{-j}\cdot g_1*g_2^{\iota}(\zeta-1)$ et on a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta}\zeta^{-j}\cdot g_1*g_2^{\iota}(\zeta-1)&=\sum_{\zeta}\zeta^{-j}\cdot\int\int\zeta^{x\cdot y}\cdot d\mu_{g_1}(x)\cdot d\mu_{g_2^{\iota}}(y)\\ &=\sum_{\zeta}\zeta^{-j}\cdot\int g_1(\zeta^{y}-1)\cdot d\mu_{g_2^{\iota}}(y)=\int\sum_{\zeta}\zeta^{-j}\cdot g_1(\zeta^{y}-1)\cdot d\mu_{g_2^{\iota}}(y)\\ &=\int\sum_{\zeta}\zeta^{-j\cdot y^{-1}}\cdot g_1(\zeta-1)\cdot d\mu_{g_2^{\iota}}(y)=\sum_{\zeta} g_1(\zeta-1)\int\zeta^{-j\cdot y}\cdot d\mu_{g_2}(y)\\ &=\sum_{\zeta} g_1(\zeta-1)\cdot g_2(\zeta^{-j}-1)=\sum_{\zeta} g_1(\zeta^{j^{-1}}-1)\cdot g_2(\zeta^{-1}-1).\end{aligned}$$

En prenant $g_1=g$ et $g_2=D(f)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\langle\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(f\otimes e_{-1})\rangle_1\cdot(1+T)\\ &\quad\equiv\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(g*D(f)^{\iota})\,\mathrm{modulo}\,(p^{n+1},\omega_{n+1}(T))\end{aligned}$$

pour tout entier n, d'où le théorème.

4.3.3 Si β est la projection de $\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(r),r}(f\otimes e_{-r})$ dans $H^1(H,\mathbb{Q}_p(r))$, on a grâce à 3.2.2

$$\beta=(r-1)!\cdot\delta((1-p^{r-1}\cdot\sigma^{-1})\cdot f(0))=(r-1)!\cdot\delta\alpha$$

où δ est l'application de Fontaine-Messing $H\to H^1(H,\mathbb{Q}_p(r))$ (on a $\exp_{H,V}=\delta\circ(1-\varphi)$). Si l'on prend la valeur en 0 de $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p(r))$ et en utilisant le fait que $D^r(h\cdot(1+T))=Tw^r(h)\cdot(1+T)$, on obtient dans $\mathbb{Q}_p(r)=\mathbb{Q}_p\cdot t^r$

$$\begin{aligned}\langle\Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}),\beta\rangle_r\cdot t^r&=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(D^r(D^{-r}(f^{\iota})\cdot g)(0))\cdot t^r\\ &=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(f(0)\cdot D^r(g)(0))\cdot t^r\\ &=(r-1)!^{-1}\cdot\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\alpha\cdot D^r(G)(0))\cdot t^r\end{aligned}$$

où $(1-p^{-1}\cdot\varphi)(G)=g$: en effet, comme

$$(1-p^{r-1}\cdot\sigma)\cdot D^r(G)(0)=D^r(g)(0),$$

on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(f(0)\cdot D^r(g)(0))&=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(f(0)\cdot(1-p^{r-1}\cdot\sigma)\cdot D^r(G)(0))\\ &=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}((1-p^{r-1}\cdot\sigma^{-1})f(0)\cdot D^r(G)(0))\\ &=\mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\alpha\cdot D^r(G)(0)).\end{aligned}$$

D'où

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(g\otimes e_{-1}), \delta\alpha\rangle_r \cdot t^r = (r-1)!^{-1} \cdot \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\alpha \cdot D^r(G)(0)\cdot t^r).$$

Ici, G est aussi égal à la fonction de Coleman $\mathrm{Col}(u)$ associée à u avec $u = (u_n) \in U_\infty$, $u_n = G^{\sigma^{-(n+1)}}(\zeta_n - 1)$ et $\Phi^r_{C-W}(u) = D^r(\mathrm{Col}(u))(0)\cdot t^r$ est l'homomorphisme de Coates-Wiles. Cette formule est ce que Bloch et Kato appellent la loi explicite de réciprocité (Theorem 2.1, Theorem 2.6 de [BK], au signe près[3]):

$$\begin{aligned}\langle u, \delta\alpha\rangle_r \cdot t^r &= (r-1)!^{-1}\, \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\alpha \cdot D^r(\mathrm{Col}\,(u))(0))\cdot t^r\\ &= (r-1)!\, \mathrm{Tr}_{H/\mathbb{Q}_p}(\alpha \cdot \Phi^r_{C-W}(G)).\end{aligned}$$

On en obtient ainsi une autre démonstration. Remarquons que leur démonstration (ainsi que celle de Fontaine [F2], les idées de cette lettre sont reprises dans [F3]) s'appuie également sur un argument de déformation par twist à partir du cas $r=1$. Plus généralement, pour n un entier $\geqq -1$, on obtient la proposition suivante:

Proposition. *Soit r un entier positif. L'application $\alpha \in H_n \mapsto (u \mapsto \langle u, \delta\alpha\rangle_r \cdot t^r)$ de Bloch-Kato (Fontaine-Messing) est donnée par*

$$\alpha \mapsto (u \mapsto (r-1)!^{-1} \cdot \mathrm{Tr}_{H_n/\mathbb{Q}_p}(p^{-r(n+1)} \cdot D^r(\mathrm{Col}(u)^{\sigma^{-(n+1)}})(\zeta_n - 1)\cdot\alpha)\cdot t^r).$$

Démonstration. Il s'agit de faire en sens inverse et pour r le chemin suivi dans la démonstration du théorème 4.3.2 pour $r=1$.

Remerciements. Ce travail a été commencé en 1988, souvent abandonné, toujours repris et n'est certainement pas achevé. Je me dois de remercier Jean-Marc Fontaine pour de nombreuses discussions mathématiques et pour m'avoir souvent en- (resp. dé-)couragée! Signalons ici que la variable X est faite pour être remplacée par $\gamma - 1$ où $\gamma \in \Gamma$ et que la variable T peut être vue comme $e^t - 1$ dans B_{cris}. En théorie classique d'Iwasawa, le passage de l'un à l'autre est donnée par la transformée de Mellin, comme il est rappelé dans les pars. 1.2.3 et suivants. Enfin, je remercie vivement le rapporteur de sa lecture attentive; il m'a entre autres choses signalé une erreur de signe dans la définition des ℓ_r.

Références

[A] Amice, Y.: Les nombres p-adiques. Paris: Presses Université de France 1975

[AV] Amice, Y., Vélu, J.: Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. (Astérisque, vols. 24–25, pp. 119–131) Paris: Soc. Math. Fr. 1975

[BK] Bloch, S., Kato, K.: L functions and Tamagawa numbers of motives. In: The Grothendieck Festschrift, vol. 1, pp. 333–400) Prog. Math., vol. 86, Boston: Birkhäuser 1990

[C1] Coleman, R.F.: Division values in local fields. Invent. Math. **53**, 91–116 (1979)

[C2] Coleman, R.F.: The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. **48**, 449–466 (1981)

[C3] Coleman, R.F.: The dilogarithm and the norm residue symbol. Bull. Soc. Math. Fr. **109**, 373–402 (1981)

[F1] Fontaine, J.-M.: Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115**, 529–577 (1982)

[3] Le referee remarque que Fontaine [F2] obtient aussi un signe différent de celui de [BK]: il utilise une normalisation différente pour l'application de Fontaine-Messing, mais sa formule finale est la même que celle de [BK]

[F2] Fontaine, J.-M.: Sur un théorème de Bloch et Kato (lettre à B. Perrin-Riou, 3 mars 1989), en appendice à cet article

[F3] Fontaine, J.-M.: Représentations p-adiques des corps locaux. In: The Grothendieck Festschrift, vol. 2. (Prog. Math., vol. 86, pp. 249–309) Boston: Birkhäuser 1990

[FL] Fontaine, J.-M., Laffaille, G.: Construction de représentations p-adiques. Ann. Sci. Éc. Norm. Super. **15**, 547–608 (1982)

[FM] Fontaine, J.-M., Messing, B.: p-adic periods and étale cohomology. Contemp. Math. **67**, 179–207 (1987)

[Bu] Séminaire sur les périodes p-adiques (tenu à Bures en 1988), actes en préparation dans Astérisque

[FP1] Fontaine, J.-M., Perrin-Riou, B.: Autour des conjectures de Bloch et Kato. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, **313**, (1991); I. Cohomologie galoisienne, 189–196; II. Structures motiviques f-closes, 349–356 III. Le cas général, 421–428

[FP2] Fontaine, J.-M., Perrin-Riou, B.: Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. Dans: Proceedings d'une conférence sur les motifs à Seattle (à paraitre)

[FP3] Fontaine, J.-M., Perrin-Riou, B.: Autour des conjectures de Bloch et Kato. IV. L'équation fonctionnelle (en préparation)

[H] Ha Huy Khoai: P-adic interpolation and the Mellin-Mazur transform. Acta Math. Vietnam. **5**, 77–100 (1980)

[I] Iwasawa, K.: On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields. Ann. Math. **98**, 246–326 (1973)

[MTT] Mazur, B., Tate, J., Teitelbaum, J.: On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. Invent. Math. **84**, 1–48 (1986)

[Mi] Milne, J.S.: Arithmetic duality theorems. (Perspect. Math., vol. 1) Boston: Academic Press 1986

[P1] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa p-adique locale et globale. Invent. Math. **99**, 247–292 (1990)

[P2] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques. Invent. Math. **109**, 137–185 (1992)

[P3] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques: le cas local. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **315**, 629–632 (1992)

[P4] Perrin-Riou, B.: Fonctions L p-adiques d'une courbe elliptique et points rationnels. (Preprint 1992). Ann. Inst. Fourier **43** à paraitre (1993)

[P5] Perrin-Riou, B.: Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques (en préparation)

[Ta1] Tate, J.: p-divisible groups. In: Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, pp. 158–183. Berlin Heidelberg New York, Springer 1967

[Ta2] Tate, J.: Relations between K_2 and Galois cohomology. Invent. Math. **36**, 257–274 (1976)

[V] Visik, M.M.: Non-archimedian measures connected with Dirichlet series. Math. USSR, Sb. **28**, 216–228 (1976)