Invent. math. 101, 261–333 (1990)

Inventiones mathematicae

Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs

J.-B. Bost
Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35 route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Table des matières

1. Introduction . . . 261
2. Enoncé des résultats . . . 267
3. Préliminaires sur les algèbres $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ . . . 272
4. Réductions . . . 280
5. «Ellipticité» et surjectivité de $\bar{\delta}$. Applications aux algèbres $\mathcal{O}^{\infty}(J)$ . . . 290
6. Résolution de l'equation $u^{-1} \cdot \bar{\delta} u = v$ . . . 298
7. Applications aux algèbres produits croisés . . . 307
8. Applications à la géométrie différentielle non commutative . . . 318
Appendice . . . 324
Bibliographie . . . 332

1. Introduction

1.1. Un théorème d'isomorphisme en K-théorie

Ce travail a pour origine les questions suivantes:

Soient A et B deux algèbres de Banach et i: $A \to B$ un morphisme d'algèbres continu, injectif et d'image dense. Que dire des applications

$$i_*: K_j(A) \to K_j(B) \qquad (j=0, 1)$$

déterminées par i entre les groupes de K-théorie topologique des algèbres A et B?

(Q) En particulier, les applications i_* sont-elles des isomorphismes?

La réponse à cette dernière question est négative en général, comme le montrent des exemples simples (*cf.* n° 1.2). Toutefois, il importe de connaître des critères sur i assurant que les applications i_* sont des isomorphismes, par exemple lorsque l'on applique la K-théorie des algèbres de Banach à l'étude des représentations des groupes ou à la «géométrie différentielle non commutative» (*cf.* [Co 2], [Co 3]).

Dans cet article, nous présentons un tel critère adapté à ce genre d'application. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 1.1.1. *Soit B une algèbre de Banach complexe, munie d'un groupe à un paramètre, fortement continu, d'automorphismes d'algèbre isométriques $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit $\mathcal{O}(I)$ la sous-algèbre dense de B formée des éléments x tels que $\alpha_t(x)$, comme fonction de t, admette un prolongement holomorphe sur $\mathbb{R}+i\mathring{I}$ et continu sur $\mathbb{R}+iI$. L'injection d'algèbres i: $\mathcal{O}(I)\to B$ détermine des isomorphismes*

$$i_*\colon K_j(\mathcal{O}(I))\to K_j(B) \qquad (j=0,1).$$

La démonstration du théorème 1.1.1 est inspirée directement des méthodes de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. En fait, le théorème 1.1.1 apparaît comme un avatar du «principe d'Oka», affirmant, que sur une variété analytique complexe de Stein, les obstructions à construire certains objets analytiques (sections ou isomorphismes de fibrés, par exemple) sont de nature purement topologique (*cf.* n° 4.5 et 4.6).

Dans les applications de la K-théorie des algèbres de Banach évoquées plus haut, la question (Q) se pose naturellement avec, typiquement, pour B, une algèbre produit-croisé d'une C^*-algèbre ou d'une algèbre de Banach C par un groupe localement compact G et, pour A, une sous-algèbre de B définie par des conditions de décroissance à l'infini sur les éléments de B, considérés comme fonctions de G vers C. Le théorème 1.1.1, appliqué à l'action «duale» de $\mathbb{R}$ sur B définie par un morphisme de G dans $\mathbb{R}$, permet de montrer que, pour certaines paires d'algèbres A et B de ce type, l'inclusion i: $A\hookrightarrow B$ détermine des isomorphismes en K-théorie (*cf.* n° 2.3 et 7.2).

Voici deux applications du théorème 1.1 qui illustrent ces remarques dans des cas très simples.

Exemple 1.1.2. Soit

$$\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$$

et soit B l'algèbre $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$[1], munie de la norme de la convergence uniforme.

Soient par ailleurs ρ_1 et ρ_2 deux nombres réels tels que $0<\rho_1<1<\rho_2$, soit

$$C=\{z\in\mathbb{C}\mid \rho_1\leqq|z|\leqq\rho_2\}$$

et soit A la sous-algèbre de $\mathscr{C}(C)$ formée des fonctions continues φ: $C\to\mathbb{C}$ holomorphes sur $\mathring{C}$. L'algèbre A est fermée dans $\mathscr{C}(C)$ munie de la norme $\|\cdot\|$ de la convergence uniforme, donc $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach.

L'application i: $A\to B$ qui associe à une fonction dans A sa restriction à $\mathbb{S}^1$ est continue, injective (d'après le principe du prolongement analytique) et d'image dense (d'après le théorème de Stone-Weierstrass). Le théorème 1.1.1 montre que cette injection détermine des isomorphismes entre groupes de K-

[1] Nous notons $\mathscr{C}(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace compact X.

théorie. En effet, on définit un groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbf{R}}$, fortement continu, d'automorphismes isométriques de B en posant

$$(\alpha_t f)(z)=f(e^{-it}z),$$

et on vérifie aisément que, lorsque $I=[\log\rho_1, \log\rho_2]$, la sous-algèbre $\mathcal{O}(I)$ de B s'identifie à algèbre A.

Exemple 1.1.3. Soit B l'algèbre de convolution $l^1(\mathbb{Z})$.

Soit par ailleurs R un nombre réel >0, et soit

$$A=\left\{(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}\,\middle|\,\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{R|n|}|a_n|<+\infty\right\}.$$

On vérifie aisément que A est une sous-algèbre de $B=l^1(\mathbb{Z})$, qui munie de la norme $\|\cdot\|_R$ définie par

$$\|(a_n)\|_R=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{R|n|}|a_n|$$

devient une algèbre de Banach, et que l'inclusion $i\colon A\hookrightarrow B$ est continue et d'image dense.

Le théorème 1.1.1 montre ici encore que i induit des isomorphismes entre groupes de K-théorie. En effet, l'algèbre de Banach B est munie d'un groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbf{R}}$, fortement continu, d'automorphismes isométriques de B, défini par

$$\alpha_t(a_n)=(e^{\mathrm{int}}a_n)$$

et, si $I=[-R, R]$, la sous-algèbre $\mathcal{O}(I)$ de B, associée à ce groupe à un paramètre, s'identifie à l'algèbre A.

On observera que, *via* la transformation de Fourier, cet exemple apparaît comme une variante du précédent.

1.2. K-théorie d'une algèbre involutive et de sa C^*-algèbre enveloppante

Dans les applications, la question (Q) se pose souvent avec, pour A, une algèbre de Banach involutive et, pour B, sa C^*-algèbre enveloppante, $C^*(A)$.

Ainsi, en «géométrie différentielle non commutative» (*cf.* [Co2] et [Co3]), les cocycles et les modules de Fredholm obtenus par des constructions géométriques naturelles sont définis sur des algèbres de Banach involutives qui ne sont pas, en général, des C^*-algèbres. Ces cocycles cycliques et ces modules de Fredholm déterminent des formes linéaires sur la K-théorie de ces algèbres involutives. Or, si A désigne l'une de ces algèbres, c'est la K-théorie de la C^*-algèbre enveloppante $C^*(A)$, et non celle de A, qui est associée à la topologie de «l'objet non commutatif» représenté par A. Par conséquent, la mise en relation des invariants de nature géométrique (cocycles cycliques) ou analytique (modules de Fredholm, indices) associés à une «variété non commutative» et de ses invariants topologiques conduit à comparer $K_*(A)$ et $K_*(C^*(A))$[2].

Montrons par un exemple que la question (Q) ne possède pas en général une réponse positive, même lorsque A est une algèbre de Banach involutive commutative, que B est sa C^*-algèbre enveloppante et que le morphisme canonique $i: A \to C^*(A)$ est injectif.

Exemple 1.2.1. Soit A l'algèbre de Banach de fonctions holomorphes sur la couronne C introduite dans l'exemple 1.1.2. On définit une involution $*$ sur A, qui en fait une algèbre de Banach involutive, en posant

$$f^*(z) = \bar{f}(\bar{z}).$$

On peut montrer que le spectre de A, $\operatorname{Sp} A$, s'identifie à C par l'application qui, à un élément de C, associe l'évaluation en ce point[3] et que l'action de l'involution sur $\operatorname{Sp} A$ devient alors la conjugaison complexe sur C. Par conséquent, la partie fermée $\operatorname{Sp}_h A$ de $\operatorname{Sp} A$ formée des caractères hermitiens de A s'identifie à $C \cap \mathbb{R} = [-\rho_2, -\rho_1] \cup [\rho_1, \rho_2]$. Il en découle que $C^*(A)$ est isomorphe à $\mathscr{C}(C \cap \mathbb{R})$, *via* la transformation de Gelfand, et que le morphisme i: $A \to C^*(A)$ s'identifie au morphisme de restriction à $C \cap \mathbb{R}$ et est donc injectif d'après le principe du prolongement analytique.

Il vient ainsi

$$K_0(C^*(A)) \simeq K^0(C \cap \mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$
$$K_1(C^*(A)) \simeq K^1(C \cap \mathbb{R}) = \{0\},$$

tandis que, d'après l'exemple 1.1.2, on a

$$K_0(A) \simeq K^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$
$$K_1(A) \simeq K^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, l'application

$$i_*: \; K_j(A) \to K_j(C^*(A))$$

n'est pas surjective lorsque $j=0$ et n'est pas injective lorsque $j=1$.

On observera que, lorsque $\rho_2 = \rho_1^{-1}$, A peut être muni d'une seconde involution $*$, définie par

$$f^*(z) = \bar{f}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right),$$

---

[2] A la fin de l'article (§ 8), nous illustrons cette démarche par deux exemples liés aux «structures transverses» sur les variétés.

[3] Cela découle aisément de la densité dans A des polynômes de Laurent. Ce résultat est à son tour une conséquence immédiate du théorème de Mergelyan, ou du corollaire 3.2.4 appliqué à l'action par translation de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1) \cong \mathscr{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

qui fait encore de A une algèbre de Banach involutive. Le spectre hermitien de A s'identifie alors à $\mathbb{S}^1$, $C^*(A)$ s'identifie à $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$, et le morphisme $i: A \to C^*(A)$ s'identifie au morphisme de restriction à $\mathbb{S}^1$ et détermine donc des isomorphismes entre groupes de K-théorie topologique d'après l'exemple 1.1.1.

Ainsi, même si l'on n'a pas $K_*(A) \approx K_*(C^*(A))$ en général, le théorème 1.1.1 permet d'établir de tels isomorphismes pour certaines algèbres de Banach involutives. Les théorèmes, mentionnés plus haut, sur la comparaison des groupes de K-théorie d'algèbres produits-croisés fourniront d'autres exemples de cette situation (*cf.* n° 2.3 et 7.2).

1.3. Critères d'isomorphisme en K-théorie

Nous rappelons maintenant deux théorèmes qui apportent une réponse affirmative à la question (Q), sous des hypothèses convenables, et nous discutons brièvement leurs relations avec le théorème 1.1.1.

1.3.1 Sous-algèbres stables par calcul fonctionnel holomorphe

Commençons par le plus classique des critères d'isomorphisme en K-théorie.

Nous notons $\mathscr{A}^{-1}$ le groupe des éléments inversibles d'une algèbre unifère $\mathscr{A}$.

Théorème 1.3.1 (Swan, Karoubi; *cf.* [Sw], 2.2 et 3.1, [Ka], p. 109, [Co 1], VI.3 et *infra* théorème A.2.1). *Soient A et B deux algèbres de Banach unifères et soit $\rho: A \to B$ un morphisme d'algèbres continu tel que $\rho(1)=1$. Si $\rho(A)$ est dense dans B et si $A^{-1}=\rho^{-1}(B^{-1})$, alors les morphismes*

$$\rho_*: K_j(A) \to K_j(B) \qquad (j=0,1)$$

sont des isomorphismes.

En général, on s'intéresse à des situations où ρ est injectif, et où A peut donc être considérée comme une sous-algèbre de B. La condition $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$ signifie alors que A est une *sous-algèbre pleine* de B, *i.e.* que tout élément de A inversible dans B est inversible dans A. On exprime encore cette propriété en disant que A est une sous-algèbre de B *stable par calcul fonctionnel holomorphe.* En effet, on vérifie sans peine que cette propriété est équivalente à la suivante:

Pour tout x dans A et toute fonction holomorphe f sur un voisinage du spectre de x dans B, l'élément $f(x)$, défini au moyen du calcul fonctionnel holomorphe dans B, appartient à A.

Le théorème 1.3.1 est un résultat de base, dont la démonstration ne fait appel qu'à des propriétés élémentaires des algèbres de Banach (calcul fonctionnel holomorphe à une seule variable). Il est fréquemment utilisé lors de l'étude de la K-théorie des algèbres de Banach et des C^*-algèbres (*cf.* par exemple [Co 1]) ou lors de ses applications (*cf.* [Co 2] et [Co 3] pour des applications dans le contexte décrit au début du 1.2). Dans ce travail, nous y ferons appel à de nombreuses reprises, tant pour établir que pour appliquer le théorème 1.1.

On peut voir le théorème 1.3.1 comme un théorème de «régularisation», généralisant le fait que la K-théorie d'une variété différentiable compacte X peut être définie indifféremment au moyen des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels continus ou des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de classe $C^k (k \in \mathbb{N}^*)$. On retrouve en effet ce résultat en appliquant le théorème 1.3.1 au morphisme d'inclusion $\mathscr{C}^k(X) \hookrightarrow \mathscr{C}(X)$.

Signalons enfin que la condition $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$ sur le morphisme ρ est une condition assez restrictive. Par exemple, si A est une algèbre de Banach involutive, B sa C^*-algèbre enveloppante et ρ: $A \to B$ le morphisme canonique, cette condition exprime que A est une algèbre *symétrique*; elle n'est pas satisfaite en général par l'algèbre de convolution $L^1(G)$ d'un groupe localement compact G (elle n'est jamais satisfaite si G est un groupe de Lie semi-simple non compact et ne l'est pas non plus pour certains groupes de Lie connexes résolubles; *cf.* [L-P]). Bien entendu, elle n'est pas non plus satisfaite en général par le morphisme d'inclusion i: $\mathcal{O}(I) \to B$ dans le théorème 1.1.1; ainsi, dans l'application du théorème 1.1.1 considérée en 1.1.2, où l'algèbre B est $\mathscr{C}(\mathbb{S}^1)$, l'algèbre $\mathcal{O}(I)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur la couronne C et holomorphes sur $\mathring{C}$, $\mathcal{O}(I)^{-1}$ est formé des éléments de $\mathcal{O}(I)$ qui ne s'annulent pas sur C, tandis que $i^{-1}(B^{-1})$ est formé des éléments de $\mathcal{O}(I)$ qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{S}^1$.

1.3.2. Le théorème d'Arens, Eidlin et Novodvorskii et le théorème de Grauert

Arens, Eidlin et Novodvorskii ont établi le théorème suivant (*cf.* [T2]):

Théorème 1.3.2. *Soit A une algèbre de Banach unifère commutative et soit X son spectre. La transformation de Gelfand*

$$\mathscr{G}\colon A \to \mathscr{C}(X)$$

détermine des isomorphismes

$$\mathscr{G}_*\colon K_j(A) \to K_j(\mathscr{C}(X)) = K^j(X). \qquad (j=0,1).$$

Indiquons comment ce théorème est relié à la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes et des variétés de Stein.

Soit H une partie compacte d'une variété de Stein Ω, holomorphiquement convexe, et soit A la sous-algèbre de Banach de $\mathscr{C}(H)$ adhérence de l'algèbre des fonctions sur H admettant un prolongement holomorphe sur un voisinage de H dans Ω. On déduit facilement les résultats suivants des théorèmes classiques sur les variétés de Stein (théorèmes A et B; *cf.* [Ho], chapter VII):

i) le spectre de l'algèbre A s'identifie à l'espace H par l'application qui, à un élément z de K, associe l'évaluation au point z (*cf.* [Ho], theorem 7.2.10);

ii) le groupe $K_0(A)$ est le groupe de K-théorie défini au moyen des classes d'isomorphisme de germes de fibrés vectoriels holomorphes au voisinage de H.

Le théorème 1.3.2 montre alors que ce dernier groupe s'identifie au groupe $K^0(F)$, défini au moyen des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels topologiques sur H.

L'identification de ces deux groupes découle aussi d'un théorème de Grauert assurant l'existence et l'unicité d'une structure holomorphe sur tout fibré vectoriel topologique au-dessus d'une variété de Stein («principe d'Oka»; *cf.* [Gr], [Ca 2] et [C-G]). En fait, la démonstration du théorème 1.3.2 consiste à déduire ce théorème du cas particulier que nous venons de considérer, c'est-à-dire à le déduire du théorème de Grauert, à l'aide du calcul fonctionnel holomorphe dans A.

Le théorème 1.1 est lui aussi, nous l'avons déjà mentionné, un avatar des résultats classiques sur les variétés de Stein, et plus particulièrement du théorème de Grauert. On peut remarquer à ce propos que l'isomorphisme de l'exemple 1.1.2, que nous avions déduit du théorème 1.1.1, est aussi une conséquence immédiate du théorème 1.3.2 et de la détermination du spectre de l'algèbre B (décrit dans l'exemple 1.2.1). Toutefois, notre démonstration du théorème 1.1.1 ne procède pas par réduction à des énoncés classiques – cela tient à ce que l'algèbre B est en général *non commutative* – mais conduit à généraliser divers résultats sur les fonctions analytiques aux éléments des sous-algèbres $\mathcal{O}(I)$, c'est-à-dire aux éléments de l'algèbre B analytiques relativement au groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Nos résultats sont décrits avec plus de détails dans la prochaine section (§ 2). La démonstration du «théorème principal» (théorèmes 1.1.1 et 2.2.1) occupe les § 3 à 6. Nous présentons ensuite des conséquences de ce théorème concernant la K-théorie des algèbres obtenues par produit-croisé (§ 7). Nous terminons l'article par deux applications de ces résultats à la «géométrie différentielle non commutative» (§ 8).

Les résultats de cet article ont été annoncés, sous une forme moins générale, dans la note [Bo].

2. Énoncé des résultats

2.1. Notations et définitions

2.1.1. Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre A, nous noterons $\tilde{A}$ l'algèbre déduite de A par adjonction d'une unité. Elle contient A comme idéal bilatère et, comme espace vectoriel, est égale à la somme directe $A \oplus \mathbb{C}1_{\tilde{A}}$. Si A est une algèbre topologique (resp. une algèbre de Banach, resp. une C^*-algèbre), $\tilde{A}$ sera munie de la structure d'algèbre topologique (resp. d'algèbre de Banach, resp. de C^*-algèbre), telle que la bijection $\tilde{A} \cong A \times \mathbb{C}$ déterminée par cette décomposition en somme directe soit un homéomorphisme.

Nous noterons aussi Idem A l'ensemble des idempotents de A (c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de A tels que $x^2 = x$), $M_n(A)$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans A et, si A possède une unité, $GL_n(A)$ le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$.

Pour tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\varphi: A \to B$, nous noterons

$$\tilde{\varphi}: \tilde{A} \to \tilde{B}$$

son unique prolongement en un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres unifères et

$$M_n(\varphi): M_n(A) \to M_n(B)$$

le morphisme entre algèbres de matrices défini par

$$M_n(\varphi)(a_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq n} = (\varphi(a_{ij}))_{1 \leqq i, j \leqq n}.$$

2.1.2. Par *action d'un groupe localement compact G sur une algèbre de Banach complexe A*, nous entendrons une action fortement continue et isométrique, c'est-à-dire une application

$$\begin{aligned} \alpha: G \times A &\to A \\ (g, a) &\mapsto \alpha_g a \end{aligned}$$

telle que:

i) pour tout $g \in G$, α_g soit un automorphisme de l'algèbre A, et pour tout $a \in A$

$$\|\alpha_g a\| = \|a\|;$$

ii) pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$, $\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}$;

iii) pour tout $a \in A$, l'application $(g \mapsto \alpha_g a)$ de G vers A soit continue lorsque A est munie de la topologie normique.

2.1.3. Nous dirons qu'un morphisme continu d'algèbres de Banach complexes (ou plus généralement de bonnes algèbres topologiques; *cf.* A.1.2)

$$\varphi: A \to B$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie, lorsque les applications

$$M_n(\tilde{\varphi}): \text{Idem}\, M_n(\tilde{A}) \to \text{Idem}\, M_n(\tilde{B})$$

et

$$M_n(\tilde{\varphi}): GL_n(\tilde{A}) \to GL_n(\tilde{B})$$

sont des équivalences d'homotopie pour tout entier $n \geqq 1$. Les applications

$$\varphi_*: K_i(A) \to K_i(B) \quad (i = 0, 1)$$

entre groupes de K-théorie topologique déterminées par φ sont alors des isomorphismes (*cf.* Appendice, n° A.2[4]).

Pour illustrer cette notion, signalons que les morphismes ρ et $\mathscr{G}$ des théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 établissent des isomorphismes forts en K-théorie.

2.1.4. Rappelons que l'on appelle groupe abélien élémentaire un groupe topologique de la forme $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^p \times F$, où F est un groupe abélien fini. Si G est un tel groupe, nous noterons $\mathscr{S}(G)$ son espace de Schwartz, et pour tout espace de Fréchet E, nous noterons $\mathscr{S}(G; E)$ l'espace de Fréchet $\mathscr{S}(G) \hat{\otimes} E$. Cet espace s'identifie à l'espace des fonctions $f\colon G \to E$ de classe C^∞ telles que, pour toute fonction polynomiale P sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p$, considérée de façon évidente comme fonction sur G, et tout opérateur différentiel D sur G invariant par translation, l'application $(x \mapsto P(x)\, Df(x))$ de G vers E prend ses valeurs dans une partie bornée de E. La topologie de $\mathscr{S}(G; E)$ est définie par les semi-normes

$$f \mapsto \sup_{x \in G} \| P(x)\, Df(x) \|$$

où $\|\,.\,\|$, P et D décrivent respectivement les semi-normes définissant la topologie de E, les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p$ et les opérateurs différentiels invariants par translation sur G.

2.2. *Les algèbres $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ et le théorème principal*

Soient A une algèbre de Banach complexe et α une action de $\mathbb{R}^n$ sur A. Pour toute partie compacte et convexe F de $\mathbb{R}^n$, contenant 0 et d'intérieur non vide, nous définissons la sous-algèbre $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ de A comme l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que l'application $(t \mapsto \alpha_t a)$ de $\mathbb{R}^n$ vers A admette un prolongement continu sur $\mathbb{R}^n + iF \,(\subset \mathbb{C}^n)$, holomorphe sur $\mathbb{R}^n + i\mathring{F}$. Ce prolongement est alors unique, et nous noterons $\alpha_z\, a$ sa valeur en $z \in \mathbb{R}^n + iF$.

Munie de la norme $\|\,.\,\|_F$ définie par

$$\| a \|_F = \sup_{z \in iF} \| \alpha_z(a) \|,$$

l'algèbre $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ devient une algèbre de Banach (*cf.* n° 3.1). De plus, l'algèbre $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ est dense dans A (*cf.* corollaire 3.2.4).

La plus grande partie de ce travail est consacrée à la démonstration du théorème suivant, qui généralise le théorème 1.1.1:

Théorème 2.2.1. *Soit A une algèbre de Banach complexe munie d'une action α de $\mathbb{R}^n$. Pour toute partie compacte et convexe F de $\mathbb{R}^n$, contenant* 0 *et d'intérieur non vide, le morphisme d'inclusion*

$$i\colon\ \mathcal{O}(A, \alpha, F) \hookrightarrow A$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

---

[4] Les résultats sur la K-théorie des algèbres topologiques utilisés dans ce travail sont rappelés en appendice. Ces résultats sont élémentaires; par exemple, nous ne faisons jamais appel à la périodicité de Bott. Toutefois, nous avons souvent à considérer, pour des raisons techniques, la K-théorie d'algèbres topologiques qui ne sont pas des algèbres de Banach et, faute de référence adéquate sur ce sujet, il nous a paru préférable de rappeler explicitement divers résultats de base.

La définition donnée plus haut de l'algèbre $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$ conserve un sens pour toute partie compacte F de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, non nécessairement convexe, telle que $\mathring{F}$ soit connexe et que $F=\overline{\mathring{F}}$. Toutefois, le gain de généralité que l'on obtient ainsi est illusoire. En effet, si F est une partie de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant aux conditions précédentes et si F est son enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^n$, alors les algèbres $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$ et $\mathcal{O}(A,\alpha,\hat{F})$ coïncident (*cf.* n° 3.4). Ce résultat est un avatar du théorème classique de Bochner affirmant que l'enveloppe d'holomorphie d'un tube dans $\mathbb{C}^n$ est son enveloppe convexe.

2.3. *Applications aux algèbres produits croisés*

Soit $(B,\|.\|)$ une algèbre de Banach, munie d'une action β d'un groupe localement compact G.

Choisissons une mesure de Haar à gauche dg sur G. On définit une structure d'algèbre normée sur l'espace $\mathscr{C}_c(G;B)$ des applications continues à support compact de G vers B en le munissant de la norme $\|.\|_1$ et du produit $*$ définis par

$$\|\varphi\|_1=\int_G \|\varphi(g)\|\,dg$$

et

$$(\varphi*\psi)(g)=\int_G \varphi(h)\cdot\beta_h\,\psi(h^{-1}g)\,dh.$$

L'algèbre de Banach *produit croisé* de B par G est par définition l'algèbre de Banach $L^1(G;B)$ déduite par complétion de $(\mathscr{C}_c(G;B),\|.\|_1)$. Ses éléments s'identifient à des classes d'équivalence (modulo égalité dg – presque partout) d'applications boréliennes de G vers B.

Pour toute fonction continue

$$a\colon G\to\mathbb{R}_+$$

sous-additive, c'est-à-dire telle que pour tout $(g_1,g_2)\in G^2$

$$a(g_1g_2)\leqq a(g_1)+a(g_2),$$

on définit un sous-espace $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ de $L^1(G;B)$ par la condition de «décroissance exponentielle»

$$\varphi\in\mathrm{Exp}_a(G;B)\Leftrightarrow e^a\varphi\in L^1(G;B).$$

On peut facilement montrer que c'est une sous-algèbre dense de $L^1(G;B)$ et que, munie de la norme $\|.\|_a$ définie par

$$\|\varphi\|_a=\|e^a\varphi\|_1,$$

c'est une algèbre de Banach (*cf.* n° 7.1).

En appliquant le théorème 2.2.1 à $L^1(G; B)$ et $\mathrm{Exp}_a(G; B)$ munies d'une action de $\mathbb{R}^n$ convenable, nous établirons au n° 7.2 les théorèmes suivants.

Théorème 2.3.1. *Soit B une algèbre de Banach munie d'une action d'un groupe localement compact G. Pour tout morphisme de groupes continu Φ: $G \to \mathbb{R}^n$ et toute fonction convexe et positivement homogène*[5] H: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *le morphisme d'inclusion*

$$\mathrm{Exp}_{H \circ \Phi}(G; B) \hookrightarrow L^1(G; B)$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Théorème 2.3.2. *Soit B une algèbre de Banach munie d'une action d'un groupe localement compact G. Si G est extension par un groupe compact d'un groupe abélien de la forme $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$*[6]*, alors, pour toute fonction sous-additive*

$$a\colon\ G \to \mathbb{R}_+,$$

le morphisme d'inclusion

$$\mathrm{Exp}_a(G; B) \hookrightarrow L^1(G; B)$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Ce dernier théorème s'applique notamment lorsque G est un groupe abélien élémentaire.

Si B est une C^*-algèbre et si les automorphismes β_g $(g \in G)$ sont des automorphismes d'algèbre involutive, nous pouvons considérer la C^*-algèbre produit croisé $B \rtimes_\beta G$, c'est-à-dire la C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive obtenue en munissant $L^1(G; B)$ de l'involution $*$ définie, lorsque G est unimodulaire, par la formule

$$f^*(g) = \beta_g[f(g^{-1})^*].$$

Lorsque de plus G est un groupe abélien élémentaire, le théorème 2.3.2 reste valable si l'on y substitute à $L^1(G; B)$ l'algèbre $B \rtimes_\beta G$ ou l'algèbre «de Schwartz» $\mathcal{S}(G; B^\infty)$. Nous montrerons en effet au n° 7.3:

Théorème 2.3.3. *Soit B une algèbre de Banach munie d'une action β d'une groupe abélien élémentaire G et soit B^∞ l'algèbre de Fréchet des éléments de B de classe C^∞ sous l'action de G* (cf. A.2.9.).

a) *L'espace vectoriel $\mathcal{S}(G; B^\infty)$ est une sous-algèbre de $L^1(G; B)$ qui, munie de sa topologie d'espace de Fréchet, devient une bonne algèbre topologique* (cf. A.1.2). *Le morphisme d'inclusion*

$$\mathcal{S}(G; B^\infty) \hookrightarrow L^1(G; B)$$

est continu et détermine un isomorphisme fort en K-théorie (cf. A.2.1).

---

[5] Par «positivement homogène», nous entendons que, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, on a $H(tx) = tH(x)$.

[6] *i.e.* s'il existe une suite exacte de groupes topologiques $\{1\} \to K \to G \to \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q \to \{1\}$ où K est compact.

b) *Lorsque de plus B est une C^*-algèbre et que, pour tout $g \in G$, β_g est un automorphisme d'algèbre involutive, le morphisme d'inclusion*

$$\mathscr{S}(G; B^\infty) \hookrightarrow B \rtimes_\beta G$$

est continu et détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Corollaire 2.3.4. *Soit B une C^*-algèbre munie d'une action β d'un groupe abélien élémentaire G telle que les automorphismes β_g $(g \in G)$ de B soient des automorphismes d'algèbre involutive. Le morphisme d'inclusion*

$$L^1(G; B) \hookrightarrow B \rtimes_\beta G$$

détermine alors un isomorphisme fort en K-théorie.

Les théorèmes 2.3.1–2.3.3 s'appliquent à l'étude des «structures transverses» associées à l'action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété compacte orientée. Nous montrerons au § 8 qu'ils permettent, par exemple, d'associer à toute action de $\mathbb{Z}^N$ sur une variété différentiable compacte orientée V une «classe fondamentale transverse» définie sur $K_*(\mathscr{C}(V) \rtimes \mathbb{Z}^N)$, et de construire, pour tout opérateur D transversalement elliptique sur une variété différentiable compacte V feuilletée par une action localement libre de $\mathbb{R}^N$, une flèche d'indice

$$\mathrm{Ind}_D: K_0(\mathscr{C}(V) \rtimes \mathbb{R}^N) \to \mathbb{Z}.$$

Signalons que le théorème 2.2.1 admet d'autres applications aux algèbres produits croisés que celles que nous venons de mentionner, motivées par la théorie des représentations des groupes de Lie. Il permet ainsi de montrer que, pour tout groupe de Lie moyennable connexe G, le morphisme d'inclusion $L^1(G) \to C^*(G)$ induit un isomorphisme fort en K-théorie (alors que l'algèbre $L^1(G)$ n'est pas en général symétrique); cela implique que les représentations irréductibles de carré intégrable de G sont intégrables.

Les quatre prochaines sections sont consacrées à établir le théorème 2.2.1. Le § 3 contient divers résultats préliminaires sur les algèbres $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$. Au § 4, nous ramenons le théorème 2.2.1 à un théorème d'existence de solutions pour une certaine «équation aux dérivées partielles non linéaire» (théorème 4.4.1). La démonstration de ce théorème d'existence, donnée aux § 5 et 6, utilise des méthodes inspirées de celles de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Elle est assez technique et nous en décrivons les grandes lignes au n° 4.6.

3. Préliminaires sur les algèbres $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$

Dans cette section, A désigne une algèbre de Banach complexe, et α une action de $\mathbb{R}^n$ sur A [7].

[7] Le contenu de cette section ne fait pas réellement intervenir la structure d'algèbre de A et reste valable, à des modifications évidentes près, pour un espace de Banach muni d'une action isométrique fortement continue de $\mathbb{R}^n$.

3.1. *Définitions et généralités*

Soit F une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Il est commode d'étendre la définition de l'algèbre de Banach $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ donnée au n° 2.2 de la manière suivante, qui lui donne un sens même lorsque F est d'intérieur vide.

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par F. Nous définissons $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ comme la sous-algèbre de A formée des éléments a tels que l'application $(t \mapsto \alpha_t a)$ de V vers A admette un prolongement continu sur $V+iF$, holomorphe sur $V+i\mathring{F}$, où $\mathring{F}$ désigne l'intérieur de F considéré comme partie de V. Ce prolongement est alors unique: lorsque $n=1$, cela découle du principe du prolongement analytique, et du principe de symétrie de Schwarz si $0 \notin \mathring{F}$; on ramène le cas général au cas $n=1$ en considérant les actions $(\alpha_{tv})_{t\in\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$, où $v\in\mathbb{R}^n$.

Pour tout $a\in\mathcal{O}(A, \alpha, F)$, nous noterons $\alpha_z a$ la valeur en $z\in V+iF$ du prolongement analytique de $(t \to \alpha_t a)$. On vérifie immédiatement que, si $z\in V+iF$, $t\in\mathbb{R}^n$ et $a\in\mathcal{O}(A, \alpha, F)$, alors

$$\alpha_t a\in\mathcal{O}(A, \alpha, F) \tag{3.1.1}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_z \alpha_t a &= \alpha_t \alpha_z a \\ &= \alpha_{z+t} a \qquad \text{si } t\in V. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Nous poserons

$$\|a\|_F = \sup_{z\in iF} \|\alpha_z a\| = \sup_{z\in V+iF} \|\alpha_z a\|. \tag{3.1.3}$$

Munie de la norme $\|.\|_F$, l'algèbre $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ s'identifie à une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach des applications continues bornées de $V+iF$ vers A, holomorphes sur $V+iF$, munie de la norme de convergence uniforme, et devient donc une algèbre de Banach. Nous noterons parfois $\|.\|_{A,\alpha,F}$, au lieu de $\|.\|_F$, la norme sur $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$, lorsque nous voudrons spécifier l'algèbre A et l'action α.

Il est immédiat que la validité du théorème 2.2.1 implique celle du théorème analogue où F n'est plus supposé d'intérieur non vide (remplacer l'action de $\mathbb{R}^n$ par celle de V).

On a

$$\mathcal{O}(A, \alpha, \{0\}) = A \quad \text{et} \quad \|.\|_{\{0\}} = A.$$

Si F_1 et F_2 sont deux fermés convexes et compacts de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et si $F_1 \subset F_2$, alors

$$\mathcal{O}(A, \alpha, F_2) \subset \mathcal{O}(A, \alpha, F_1),$$

et, pour tout a dans $\mathcal{O}(A, \alpha, F_2)$,

$$\|a\|_{F_1} \leqq \|a\|_{F_2}.$$

L'algèbre de Fréchet limite projective

$$\varprojlim_F \mathcal{O}(A, \alpha, F)$$

où les F sont les fermés convexes et compacts de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, ordonnés par l'inclusion, s'identifie à la sous-algèbre $\mathcal{O}(A, \alpha)$ de A formée des $a \in A$ tels que l'application $(t \mapsto \alpha_t a)$ de $\mathbb{R}^n$ vers A admette un prolongement en une fonction entière de $\mathbb{C}^n$ vers A.

Plus loin, on fera usage des énoncés suivants, dont les démonstrations ne présentent pas de difficultés et sont laissées au lecteur.

Proposition 3.1.1. *Soit F une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$ contenant* 0. *Les automorphismes $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définissent une action de $\mathbb{R}^n$ sur l'algèbre de Banach* $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ (cf. n° 2.2).

Nous noterons encore α cette action.

Proposition 3.1.2. *Si F et F' sont deux parties convexes et compactes de $\mathbb{R}^n$ contenant* 0, *alors*

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}(A, \alpha, F), \alpha, F') = \mathcal{O}(A, \alpha, F + F')$$

et

$$\| \cdot \|_{\mathcal{O}(A, \alpha, F), \alpha, F'} = \| \cdot \|_{A, \alpha, F + F'}.$$

3.2. Approximation par les éléments analytiques

Nous poserons pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\pi \varepsilon)^{-n/2} \exp\left(-\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right),$$

puis, pour tout $a \in A$

$$W_\varepsilon a = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, \alpha_x\, a\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Cette intégrale est bien définie comme élément de A, puisque

$$x \mapsto \varphi_\varepsilon(x)\, \alpha_x\, a$$

est continue, que

$$\| \varphi_\varepsilon(x)\, \alpha_x\, a \| = \varphi_\varepsilon(x)\, \| a \|$$

et que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx_1 \dots dx_n = 1 < \infty.$$

Ces égalités montrent de plus que, pour tout $a \in A$

$$\| W_\varepsilon a \| \leqq \| a \|. \tag{3.2.1}$$

Proposition 3.2.1. 1) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, W_ε *envoie continûment* A *dans* $\mathcal{O}(A, \alpha)$.
2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $t \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha_t \circ W_\varepsilon = W_\varepsilon \circ \alpha_t. \tag{3.2.2}$$

Démonstration. L'assertion 2) est immédiate. Démontrons 1). Il vient, pour tout $a \in A$ et tout $t \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \alpha_t \circ W_\varepsilon(a) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, \alpha_{t+x} x\, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-t)\, \alpha_x a\, dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

L'application

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \to A \\ &\quad (x, t) \to \varphi_\varepsilon(x-t)\, \alpha_x a \end{aligned}$$

est continue, et holomorphe en la seconde variable. De plus, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout t dans le compact K_R de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$|\mathrm{Re}\, t_i| \leqq R \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, t_i| \leqq R,$$

on a

$$\| \varphi_\varepsilon(x-t)\, \alpha_x a \| = |\varphi_\varepsilon(x-t)|\, \| \alpha_x a \| \leqq f_R(x)\, \| a \| \tag{3.2.4}$$

où

$$f_R(x) = (\pi \varepsilon)^{-n/2} \exp\left[-\varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2R \sum_{i=1}^{n} |x_i| - 2nR^2 \right) \right].$$

Comme la fonction f_R est sommable sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $R \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que l'intégrale (3.2.3) définit une fonction entière de t à valeurs dans A, donc que $W_\varepsilon a$ appartient à $\mathcal{O}(A, \alpha)$. Enfin, la majoration (3.2.4) montre que

$$\| W_\varepsilon a \|_{K_R} \leqq \| f_R \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \| a \|,$$

et établit donc la continuité de $W_\varepsilon \colon A \to \mathcal{O}(A, \alpha)$. q.e.d.

Proposition 3.2.2. *Soient F un fermé convexe et compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et a un élément de $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$. Lorsque ε tend vers 0, $W_\varepsilon a$ tend vers a dans $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord la démonstration de l'énoncé suivant, bien connu, qui n'est autre que le cas particulier de la proposition où $F = \{0\}$.

Lemme 3.2.3. *Pour tout $a \in A$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| W_\varepsilon a - a \| = 0.$$

Démonstration du lemme 3.2.3. Il vient

$$\begin{aligned} W_\varepsilon a - a &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\, \alpha_t\, a\, dt - a \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\, (\alpha_x a - a)\, dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \to 0} \| W_\varepsilon a - a \| &\leqq \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\, \| \alpha_t a - a \|\, dt \\ &\leqq \Big[\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\|t\| \leqq \delta} \varphi_\varepsilon(t)\, dt\Big] \sup_{\|t\| \leqq \delta} \| \alpha_t a - a \| \\ &\quad + \Big[\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\|t\| \geqq \delta} \varphi_\varepsilon(t)\, dt\Big] \sup_{\|t\| \geqq \delta} \| \alpha_t a - a \|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\|t\| \leqq \delta} \varphi_\varepsilon(t)\, dt &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\|t\| \leqq \delta/\sqrt{\varepsilon}} \varphi_1(t)\, dt = 1, \\ \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{\|t\| \geqq \delta} \varphi_\varepsilon(t)\, dt &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\sup_{\|t\| \geqq \delta} \| \alpha_t a - a \| \leqq 2 \| a \|,$$

et donc, pour tout $\delta > 0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \| W_\varepsilon a - a \| \leqq \sup_{\|t\| \leqq \delta} \| \alpha_t a - a \|.$$

Or $(\alpha_t a - a)$ est une fonction continue de t nulle en 0; par conséquent, le membre de gauche de cette inégalité est nul. q.e.d.

Soit $a \in \mathcal{O}(A, \alpha, F)$. Comme

$$\{\alpha_z a; z \in iF\}$$

est compact dans A, il découle du lemme précédent et de l'équicontinuité des W_ε (*cf.* (3.2.1)) que $\| W_\varepsilon \alpha_z a - \alpha_z a \|$ converge uniformément vers 0 lorsque ε tend vers 0 et que z décrit iF. Or, il vient, pour tout $z \in iF$

$$W_\varepsilon \alpha_z a = \alpha_z W_\varepsilon a;$$

en effet, cette relation est satisfaite lorsque $z \in \mathbb{R}^n$, d'après (3.2.2), et donc, par prolongement analytique, lorsque $z \in V + iF$, où V désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par F. Par conséquent

$$\| W_\varepsilon a - a \|_F = \sup_{z \in iF} \| \alpha_z (W_\varepsilon a - a) \|$$

tend vers 0 avec ε. q.e.d.

Corollaire 3.2.4. *Pour toute partie F convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$ contenant* 0, *$\mathcal{O}(\alpha, A)$ est dense dans $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ et $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ est dense dans A.*

Démonstration. La première assertion est une conséquence immédiate des propositions 3.2.1 et 3.2.2. La seconde est une conséquence immédiate de la première, puisque

$$\mathcal{O}(\alpha, A) \subset \mathcal{O}(A, \alpha, F) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(A, \alpha, \{0\}) = A. \quad \text{q.e.d.}$$

3.3. *Les algèbres $\mathcal{O}^k(A, \alpha, F)$*

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et F une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Nous définissons $\mathcal{O}^k(A, \alpha, F)$ comme la sous-algèbre de $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ constituée des éléments a tels que l'application $(t \mapsto \alpha_t a)$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ soit de classe C^k.

Si $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}^k(A, \alpha, F)$ devient une algèbre de Banach lorsqu'elle est munie de la norme $\| . \|_{F,k}$ définie par

$$\| a \|_{F,k} = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^n \\ \| i \| \leq k}} \frac{k!}{i_1! \ldots i_n!} \left\| \frac{\partial^{|i|}}{\partial t^i} \alpha_t a|_{t=0} \right\|_F.$$

Munie des (semi-)normes $(\| . \|_{F,k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{O}^\infty(A, \alpha, F)$ est une algèbre de Fréchet.

On remarquera que, d'après la proposition 3.1.1, les algèbres de Banach $(\mathcal{O}^0(A, \alpha, F), \| . \|_{F,0})$ et $(\mathcal{O}(A, \alpha, F), \| . \|_F)$ coïncident. De plus, il découle immédiatement de la proposition 3.1.2 que, si F_1 et F_2 sont deux parties convexes et compactes de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et que $F_1 \subset \mathring{F}_2$, alors

$$\mathcal{O}(A, \alpha, F_2) \subset \mathcal{O}^\infty(A, \alpha, F_1). \tag{3.3.1}$$

(En effet, il existe alors un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, F' compact et convexe, tel que $F_1+F'\subset F_2$.)

Enfin, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}^k(\tilde{A},\alpha,F)\simeq\mathcal{O}^k(A,\alpha,F)^\sim.$$

Proposition 3.3.1. *Pour tout $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $\mathcal{O}^k(A,\alpha,F)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$.*

Démonstration. La densité découle du corollaire 3.2.4, puisque $\mathcal{O}^k(A,\alpha,F)$ contient $\mathcal{O}(A,\alpha)$, d'après (3.3.1). La plénitude est une conséquence immédiate de la définition de $\mathcal{O}^k(A,\alpha,F)$. q.e.d.

On a de plus, par une démonstration directe très simple, ou comme conséquence formelle de la proposition précédente:

Proposition 3.3.2. *L'algèbre de Fréchet $\mathcal{O}^\infty(A,\alpha,F)$ est une bonne algèbre topologique au sens de* A.1, i.e. *le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{O}^\infty(A,\alpha,F)^\sim$ est ouvert dans cette algèbre, et l'application $(a\mapsto a^{-1})$ est un homéomorphisme de cet ouvert sur lui-même.*

Le théorème A.2.1 donne alors:

Proposition 3.3.3. *Pour tout $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, l'inclusion*

$$i\colon\ \mathcal{O}^k(A,\alpha,F)\hookrightarrow\mathcal{O}(A,\alpha,F)$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Cette proposition complète le théorème 2.2.1 et montre que l'on obtient des énoncés équivalents à ce théorème en y substituant $\mathcal{O}^k(A,\alpha,F)$ à $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$.

3.4. L'algèbre $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$ lorsque F n'est pas convexe[8]

Soit F une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, telle que F soit connexe et que $F=\bar{\mathring{F}}$.

Nous pouvons définir $\mathcal{O}(A,\alpha,F)$ comme la sous-algèbre de A formée des éléments a tels que l'application $(t\mapsto\alpha_t\,a)$ de $\mathbb{R}^n$ vers A admette un prolongement continu borné sur $\mathbb{R}^n+iF$, holomorphe sur $\mathbb{R}^n+i\mathring{F}$. Un tel prolongement, s'il existe, est unique. Cela découle immédiatement du lemme suivant et du théorème de Hahn-Banach.

Lemme 3.4.1. *Soit $\varphi\colon\mathbb{R}^n+iF\to\mathbb{C}$ une application continue bornée holomorphe sur $\mathbb{R}^n+i\mathring{F}$. Si $\varphi|_{\mathbb{R}}=0$, alors $\varphi=0$.*

Démonstration (*cf.* [B]). Choisissons $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n\backslash F$ et posons

$$\psi(z)=\left[\prod_{i=1}^{n}(z_i-a_i)\right]^{-2}\varphi(z).$$

[8] Les résultats de cette section ne sont pas utilisés dans la suite de l'article.

Comme φ est bornée, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{R}^n + iF$,

$$|\psi(z)| \leqq C \prod_{i=1}^{n} (1 + |\mathrm{Re}\, z_i|)^{-2}.$$

Par conséquent, on peut considérer la transformée de Fourier partielle de ψ par rapport aux variables réelles

$$g(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x+iy)\, e^{-ix\cdot\xi} dx_1 \dots dx_n,$$

et l'on définit ainsi une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times F$. Comme ψ est holomorphe sur $\mathbb{R}^n + i\mathring{F}$, et satisfait donc à l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \psi(x+iy) = 0$$

sur cet ouvert, la distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathring{F}$ définie par g satisfait à l'équation

$$\left(x_j + \frac{\partial}{\partial y_j}\right) g(\xi, y) = 0.$$

Puisque F est connexe, on en déduit que, pour tout $(y, y_0) \in \mathring{F}^2$, on a

$$g(\xi, y) = e^{-\xi\cdot(y-y_0)} g(\xi, y_0).$$

Par continuité, cette égalité reste vraie pour tout $y \in F$. Elle montre que, si $\varphi|_{\mathbb{R}^n} = 0$ et donc $g(.,0) = 0$, alors $g = 0$, et donc, par injectivité de la transformation de Fourier, $\psi = 0$ et $\varphi = 0$. q.e.d.

On vérifie que les relations (3.1.1) et (3.1.2) restent valables (avec $V = \mathbb{R}^n$) et l'on définit par les formules (3.1.3) une norme $\|.\|_F$ sur $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$, qui en fait une algèbre de Banach.

Lorsque F est convexe, ces définitions de $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$ et $\|.\|_F$ sont clairement compatibles avec celles données plus haut.

Proposition 3.4.2. *Soit $\hat{F}$ l'enveloppe convexe de F dans $\mathbb{R}^n$. On a*

$$\mathcal{O}(A, \alpha, F) = \mathcal{O}(A, \alpha, \hat{F}) \quad \textit{et} \quad \|.\|_{\hat{F}} = \|.\|_F.$$

Démonstration. La démonstration de la proposition 3.2.2 reste valable avec notre nouvelle définition de $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$. Par conséquent, $\mathcal{O}(A, \alpha)$ et, *a fortiori*, $\mathcal{O}(A, \alpha, \hat{F})$ sont denses dans $\mathcal{O}(A, \alpha, F)$. Comme $(\mathcal{O}(A, \alpha, \hat{F}), \|.\|_{\hat{F}})$ est complet, il suffit, pour établir la proposition, de montrer que, pour tout $a \in \mathcal{O}(A, \alpha, \hat{F})$

$$\|a\|_{\hat{F}} = \|a\|_F.$$

Cela est une conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach et du lemme suivant:

Lemma 3.4.3. *Pour toute fonction continue bornée*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n + i\hat{F} \to \mathbb{C}$$

holomorphe sur $\mathbb{R}^n + i\mathring{\hat{F}}$ *et pour tout* $z \in \mathbb{R}^n + i\hat{F}$, *on a*

$$|\varphi(z)| \leqq \sup_{w \in \mathbb{R}^n + iF} |\varphi(w)|.$$

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur le nombre de points de F comme combinaison convexe desquels $\operatorname{Im} z$ peut s'écrire, on se ramène à établir que, si $(a,b) \in F^2$ et si $z \in \mathbb{R}^n + i[a,b]$, alors

$$|\varphi(z)| \leqq \sup_{w \in \mathbb{R}^n + i\{a,b\}} |\varphi(w)|.$$

Cela résulte immédiatement du théorème de Phragmen-Lindelöf appliqué à la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} + i[0,1] \to \mathbb{C} \\ &\lambda \mapsto \varphi[\operatorname{Re} z + \lambda a + (i - \lambda) b]. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

4. Réductions

Dans ce numéro, nous commençons par montrer que le théorème 2.2.1, dans sa forme générale, se déduit du cas particulier d'une action de $\mathbb{R}$ ($n=1$). Nous ramenons ensuite la démonstration de ce cas particulier du théorème à la construction de solutions d'une certaine «équation différentielle non linéaire», portant sur les applications d'un intervalle réel vers A.

4.1. *Réduction au cas d'une action de* $\mathbb{R}$

Reprenons les notations du théorème 2.2.1, et supposons $n \geqq 2$.

Soit F_0 la projection orthogonale de F sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ et soient $R, R' \in \mathbb{R}_+^{**}$ tels que

$$F \subset F_0 + \{0\}^{n-1} \times [-R, R].$$
$$F_0 + \{0\}^{n-1} \times [-R, R] \subset F + \{0\}^{n-1} \times [-R', R'].$$

On dispose d'isomorphismes canoniques d'algèbres de Banach (*cf.* Prop. 3.1.2)

$$\mathcal{O}(A, \alpha, F + \{0\}^{n-1} \times [-R', R']) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{O}(A, \alpha, F), \alpha, \{0\}^{n-1} \times [-R', R']) \quad (4.1.1)$$

et

$$\mathcal{O}(A, \alpha, F_0 + \{0\}^{n-1} \times [-R, R]) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{O}(A, \alpha, F_0), \alpha, \{0\}^{n-1} \times [-R, R]). \quad (4.1.2)$$

Considérons alors le diagramme suivant, dont les flèches sont des injections continues d'algèbres de Banach

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(A,\alpha,F+\{0\}^{n-1}\times[-R',R']) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(A,\alpha,F) \arrow[dr, hook, "j"] & \\
\mathcal{O}(A,\alpha,F_0+\{0\}^{n-1}\times[-R,R]) \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[ur, hook] & \mathcal{O}(A,\alpha,F_0) \arrow[r, hook, "i_3"] & A.
\end{tikzcd}$$

Il découle immédiatement de la commutativité du carré et des triangles de ce diagramme que, pour montrer que j établit un isomorphisme fort en K-théorie, il suffit de montrer qu'il en va de même de i_1, i_2 et i_3. Grâce aux isomorphismes (4.1.1) et (4.1.2), il suffit pour cela d'établir la variante du théorème 2.2.1 où F est éventuellement d'intérieur vide, lorsque l'espace vectoriel engendré par F est de dimension au plus $n-1$, c'est-à-dire d'établir le théorème 2.2.1 pour des actions de $\mathbb{R}^k$, $k=1,\dots,n-1$.

Une récurrence immédiate ramène alors la démonstration du théorème sous sa forme générale à celle du cas particulier où $n=1$.

Nous sommes ainsi conduits à établir le résultat suivant:

Théorème 4.1.1. *Soit A une algèbre de Banach unifère munie d'une action α de $\mathbb{R}$.*

Pour tout intervalle compact I de $\mathbb{R}$ contenant 0, *les inclusions*

$$\operatorname{Idem} \mathcal{O}(A,\alpha,I) \hookrightarrow \operatorname{Idem} A$$

et

$$\mathcal{O}(A,\alpha,I)^{-1} \hookrightarrow A^{-1}$$

sont des équivalences d'homotopie, lorsque $\operatorname{Idem}\mathcal{O}(A,\alpha,I)$ *et* $\mathcal{O}(A,\alpha,I)^{-1}$ (resp. $\operatorname{Idem} A$ *et* A^{-1}) *sont munis de la topologie induite par la topologie d'espace de Banach de* $\mathcal{O}(A,\alpha,I)$ (resp. *de* A).

On obtient en effet le théorème 2.2.1 avec $n=1$ en appliquant cet énoncé aux algèbres $M_p(\tilde{A})$, $p\in\mathbb{N}^*$, munies de l'action $(M_p(\tilde{\alpha}_t))_{t\in\mathbb{R}}$.

Dans la suite de ce paragraphe et dans les paragraphes 5 et 6, nous conservons les notations du théorème 4.1.1.

4.2. *Les algèbres $\mathscr{A}(J)$, $\mathcal{O}(J)$ et $\mathcal{O}^\infty(J)$*

Nous décrivons dans ce numéro et le suivant comment l'algèbre $\mathcal{O}^\infty(A,\alpha,I)$ s'identifie à une sous-algèbre des applications de I vers A définie comme le noyau d'un certain «opérateur différentiel».

Soit δ le générateur infinitésimal de $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Son domaine, $\operatorname{Dom}\delta$, est la sous-algèbre de A constituée des éléments a tels que, lorsque t tend vers 0, $t^{-1}(\alpha_t a - a)$ possède une limite, qui sera δa par définition, dans A muni de la topologie normique.

On établit très facilement l'énoncé suivant:

Lemme 4.2.1. *Pour tout* $(x, y) \in A^2$, *les assertions suivantes sont équivalentes*:

i) $x \in \operatorname{Dom} \delta$ *et* $\delta x = y$;

ii) $(t \mapsto \alpha_t x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}; A)$ *et* $y = \frac{d}{dt} \alpha_t x_{|t=0}$;

iii) $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha_t x = x + \int_0^t \alpha_u y \, du$.

Il résulte immédiatement de ce lemme que la dérivation (non bornée) δ est fermée et que

$$\operatorname{Dom} \delta = \mathcal{O}^1(A, \alpha, \{0\}).$$

En particulier, $\operatorname{Dom} \delta$ contient $\mathcal{O}(A, \alpha)$ et est donc dense dans A.

Nous noterons A^∞ la sous-algèbre de A constituée des éléments de A de classe C^∞ sous l'action du groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Cette algèbre n'est autre que $\mathcal{O}^\infty(A, \alpha, \{0\})$ et est ainsi une algèbre de Fréchet dense dans A (*cf.* Cor. 3.2.4). Elle coïncide aussi avec $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Dom} \delta^n$, et sa topologie est définie par les semi-normes $(a \mapsto \|\delta^n a\|)$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit J un intervalle compact dans $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. Nous poserons

$$\mathscr{A}(J) = \mathscr{C}^\infty(J; A^\infty).$$

C'est une algèbre, munie d'une structure naturelle d'algèbre de Fréchet définie par les semi-normes

$$x \mapsto \sup_{\tau \in J} \|\delta^i x^{(j)}(\tau)\|, \qquad (i, j) \in \mathbb{N}^2.$$

Un élément x de $\mathscr{C}(J; A)$ appartient à $\mathscr{A}(J)$ si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} + iJ &\to A \\ \sigma + i\tau &\mapsto \alpha_\sigma x(\tau) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

est de classe C^∞ (comme fonction de deux variables réelles).

Nous poserons aussi:

$$\mathcal{O}(J) = \{x \in \mathscr{C}(J; A) \mid (4.2.1) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{R} + i\mathring{J}\}$$

et

$$\mathcal{O}^\infty(J) = \mathcal{O}(J) \cap \mathscr{A}(J).$$

On déduit alors des propriétés élémentaires des fonctions analytiques d'une variable complexe à valeurs dans un espace de Banach:

Proposition 4.2.2. $\mathcal{O}(J)$ (resp. $\mathcal{O}^\infty(J)$) *est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach* $\mathscr{C}(J; A)$ (resp. *de l'algèbre de Fréchet* $\mathscr{A}(J)$), *et possède donc une structure naturelle d'algèbre de Banach* (resp. *d'algèbre de Fréchet*).

Si J' est un intervalle compact d'intérieur non vide dans $\mathring{J}$, alors l'application de restriction $\mathscr{C}(J; A) \to \mathscr{C}(J'; A)$ détermine une injection continue de $\mathcal{O}(J)$ dans $\mathcal{O}^\infty(J')$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions de $\mathcal{O}(J)$ et $\mathcal{O}^\infty(J)$.

Proposition 4.2.3. *Si $0 \in J$, alors l'algèbre de Banach $\mathcal{O}(J)$* (resp. *l'algèbre de Fréchet $\mathcal{O}^\infty(J)$*) *s'identifie à l'algèbre de Banach $\mathcal{O}(A, \alpha, J)$* (resp. *à l'algèbre de Fréchet $\mathcal{O}^\infty(A, \alpha, J)$*) *au moyen de l'application* $(x \mapsto x(0))$.

Dans la suite, nous effectuerons les identifications décrites par cette proposition, sans y référer explicitement.

Enfin, nous poserons

$$\mathcal{O} = \varprojlim_J \mathcal{O}(J) \simeq \varprojlim_J \mathcal{O}^\infty(J)$$

(les morphismes sont les morphismes de restriction (*cf.* Prop. 4.2.2)). Cette algèbre s'identifie à $\mathcal{O}(A, \alpha)$. D'après la proposition 4.2.3, elle s'identifie aussi à la sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; A^\infty)$ formée des x tels que

$$\sigma + i\tau \mapsto \alpha_\sigma x(\tau)$$

soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

L'énoncé suivant est une conséquence immédiate du corollaire 3.2.4 et de la proposition 4.2.3, compte tenu de l'invariance de la définition de l'algèbre $\mathcal{O}(J)$ relativement aux translations de l'intervalle J.

Proposition 4.2.4. *L'algèbre $\mathcal{O}$ est dense dans $\mathcal{O}(J)$.*

De même, on dispose de la variante suivante des propositions 3.3.1 et 3.3.3:

Proposition 4.2.5. *$\mathcal{O}^\infty(J)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $\mathcal{O}(J)$. L'inclusion $\mathcal{O}^\infty(J) \hookrightarrow \mathcal{O}(J)$ détermine un isomorphisme fort en K-théorie.*

4.3. La dérivation $\bar{\delta}$

Nous définissons une dérivation

$$\bar{\delta}\colon \mathscr{C}^1(I; A) \cap \mathscr{C}^0(I; \mathrm{Dom}\, \delta) \to \mathscr{C}^0(I; A)$$

en posant

$$(\bar{\delta} x)(\tau) = \tfrac{1}{2}[\delta x(\tau) + i x'(\tau)].$$

L'opérateur $\bar{\delta}$ est, en un sens évident, un opérateur local sur les applications suffisamment régulières de I vers A. Il envoie continûment l'algèbre de Fréchet $\mathscr{A}(I)$ dans elle-même.

La proposition suivante montre que $\bar{\delta}$ est analogue à l'opérateur différentiel $\partial/\partial \bar{z}$ agissant sur les fonctions C^∞ sur un domaine de $\mathbb{C}$.

Proposition 4.3.1. *L'algèbre $\mathcal{O}(J)$ est constituée des $x\in\mathscr{C}(J;A)$ tels que*

$$x_{|\mathring{J}}\in\mathscr{C}^\infty(\mathring{J};A^\infty) \quad \textit{et} \quad \bar{\delta}x_{|\mathring{J}}=0,$$

et l'algèbre $\mathcal{O}^\infty(J)$ coïncide avec le noyau de $\bar{\delta}$: $\mathscr{A}(J)\to\mathscr{A}(J)$.

Démonstration. La seconde assertion découle immédiatement de la première. Soit alors $x\in\mathscr{C}(J;A)$. D'après la proposition 4.2.2, si $x\in\mathcal{O}(J)$, alors $x_{|J}\in\mathscr{C}^\infty(\mathring{J};A^\infty)$. De plus, lorsque x satisfait à cette dernière condition, l'application

$$X:\ \mathbb{R}+i\mathring{J}\to A$$
$$\sigma+i\tau\mapsto\alpha_\sigma x(\tau)$$

est de classe C^∞, et l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial\bar{z}}(\sigma+i\tau)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial X}{\partial\sigma}(\sigma+i\tau)+i\frac{\partial X}{\partial\tau}(\sigma+i\tau)\right]=\alpha_\sigma(\bar{\delta}x(\tau)).$$

Ainsi, X est holomorphe si et seulement si $\bar{\delta}x=0$. q.e.d.

4.4. Réduction à la résolution d'une «équation différentielle» non linéaire

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}^\infty(I) & \xhookrightarrow{i} & \mathscr{A}(I) & \xhookrightarrow{j_1} & \mathscr{C}(I;A)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \wr}\, r & & & & \Big\downarrow r\\
\mathcal{O}^\infty(A,\alpha,I) & \xhookrightarrow{j_2} & \mathcal{O}(A,\alpha,I) & \hookrightarrow & A
\end{array}$$

où $rx:=x(0)$. Nous avons montré que j_2 détermine un isomorphisme fort en K-théorie (*cf.* Prop. 3.3.3). Il en va de même de r («invariance par homotopie de la K-théorie»; *cf.* A.2.1) et de j_1, puisque $\mathscr{A}(I)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $\mathscr{C}(I;A)$ (*cf.* Th. A.2.1; la plénitude est évidente, et la densité, une conséquence facile de celle de A^∞ dans A). Par conséquent, pour établir le théorème 4.1.1, il suffit de montrer que les inclusions

$$i:\ \mathrm{Idem}\,\mathcal{O}^\infty(I)\hookrightarrow\mathrm{Idem}\,\mathscr{A}(I)$$

et

$$i:\ \mathcal{O}^\infty(I)^{-1}\hookrightarrow\mathscr{A}(I)^{-1}$$

sont des équivalences d'homotopie.

Or cela découle du théorème suivant, que nous démontrerons plus loin (aux §5 et 6):

Théorème 4.4.1. *Il existe une application continue*

$$\Phi\colon \mathscr{A}(I)\to\mathscr{A}(I)^{-1}$$

telle que

i) $\Phi(0)=1$;

ii) *pour tout* $v\in\mathscr{A}(I)$,

$$\Phi(v)^{-1}\cdot\bar{\delta}\Phi(v)=v.$$

En effet, il vient par un calcul très simple:

Lemme 4.4.2. *Si Φ vérifie les conditions* i) *et* ii) *du théorème* 4.4.1, *alors*

$$\begin{aligned}\Psi_0\colon [0,1]\times\operatorname{Idem}\mathscr{A}(I)&\to\operatorname{Idem}\mathscr{A}(I)\\ (t,e)&\mapsto\Phi(t[e,\bar{\delta}e])\,e\,\Phi(t[e,\bar{\delta}e])^{-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_1\colon [0,1]\times\mathscr{A}(I)^{-1}&\to\mathscr{A}(I)^{-1}\\ (t,u)&\mapsto\Phi(-t\bar{\delta}u\cdot u^{-1})\,u\end{aligned}$$

sont respectivement des rétractions par déformation stricte de $\operatorname{Idem}\mathscr{A}(I)$ *sur* $\operatorname{Idem}\mathcal{O}^{\infty}(I)$ *et de* $\mathscr{A}(I)^{-1}$ *sur* $\mathcal{O}^{\infty}(I)^{-1}$.

4.5. Modules sur $\mathcal{O}^{\infty}(I)$ et $\bar{\delta}$-connexions[9]

Le théorème 4.4.1 appliqué aux algèbres $M_n(A)$ montre, grâce au lemme 4.4.2, la bijectivité des applications

$$\pi_0(M_n(i))\colon\ \pi_0(\operatorname{Idem} M_n(\mathcal{O}^{\infty}(I)))\to\pi_0(\operatorname{Idem} M_n(\mathscr{A}(I))),$$

et donc la bijectivité de l'application entre ensembles de classes d'isomorphisme de modules projectifs de type fini[10]:

$$i_*\colon\ \mathscr{P}(\mathcal{O}^{\infty}(I))\to\mathscr{P}(\mathscr{A}(I))$$

définie par l'extension des scalaires de $\mathcal{O}^{\infty}(I)$ à $\mathscr{A}(I)$ (*cf.* A.1.3).

Dans cette section nous présentons une seconde démonstration de la bijectivité de i_*, qui repose encore sur le théorème 4.4.1, mais qui fait ressortir l'analogie entre cette bijectivité et les théorèmes sur l'existence et l'unicité des structures holomorphes sur les fibrés vectoriels au-dessus des variétés de Stein (*cf.* [Gr], [Ca 2] et [C-G]).

---

[9] Les résultats de cette section ne seront pas utilisés dans la suite de l'article.

[10] Nous notons $\mathscr{P}(B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules projectifs de type fini sur un anneau unifère B.

Nous allons construire l'application inverse de i_* au moyen de la notion de *$\bar{\delta}$-connexion* sur un $\mathscr{A}(I)$-module (à droite) $\mathscr{E}$. Nous appellerons ainsi les applications $\mathbb{C}$-linéaires $\bar{\nabla}: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telles que, pour tout $\xi \in \mathscr{E}$ et tout $a \in \mathscr{A}(I)$

$$\bar{\nabla}(\xi a) = \bar{\nabla}\xi \cdot a + \xi \cdot \bar{\delta} a.$$

Commençons par énoncer quelques propriétés des $\bar{\delta}$-connexions dont les démonstrations sont immédiates.

Proposition 4.5.1. 1) *Les $\bar{\delta}$-connexions sur un $\mathscr{A}(I)$-module $\mathscr{E}$ constituent (s'il en existe) un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent* $\mathrm{End}_{\mathscr{A}(I)} \mathscr{E}$.

2) *Soit e un élément de* $\mathrm{Idem}\, M_n(\mathscr{A}(I))$ *et soit $\mathscr{E} = e\mathscr{A}(I)^n$ (c'est un sous-module de $\mathscr{A}(I)^n \simeq \mathbb{C}^n \otimes \mathscr{A}(I)$). On définit une $\bar{\delta}$-connexion $\bar{\nabla}$ sur $\mathscr{E}$ en posant*

$$\bar{\nabla} v = e(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \otimes \bar{\delta})\, v.$$

Par conséquent, tout $\mathscr{A}(I)$-module projectif de type fini admet une $\bar{\delta}$-connexion.

Le théorème suivant montre que l'on définit une application de $\mathscr{P}(\mathscr{A}(I))$ vers $\mathscr{P}(\mathcal{O}^\infty(I))$ inverse de i_* en associant à la classe d'un $\mathscr{A}(I)$-module projectif de type fini $\mathscr{E}$ la classe du noyau $\ker \bar{\nabla}$ d'une $\bar{\delta}$-connexion $\bar{\nabla}$ sur $\mathscr{E}$:

Théorème 4.5.2. 1) *Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}(I)$-module projectif de type fini.*

a) *Si $\bar{\nabla}$ est une $\bar{\delta}$-connexion sur $\mathscr{E}$, alors $\bar{\mathscr{E}} = \ker \bar{\nabla}$ est un $\mathcal{O}^\infty(I)$-module projectif de type fini, et l'application*

$$\bar{\mathscr{E}} \underset{\mathcal{O}^\infty(I)}{\bigotimes} \mathscr{A}(I) \to E$$

$$\xi \otimes a \mapsto \xi a$$

est un isomorphisme de $\mathscr{A}(I)$-modules.

b) *Si $\bar{\nabla}'$ est une seconde $\bar{\delta}$-connexion sur $\mathscr{E}$, il existe un automorphisme $\mathscr{U}$ du $\mathscr{A}(I)$-module $\mathscr{E}$ tel que*

$$\mathscr{U}\bar{\nabla}(\mathscr{U}^{-1}.) = \bar{\nabla}', \tag{4.5.1}$$

et $\mathscr{U}$ définit un isomorphisme de $\mathcal{O}^\infty(I)$-modules de $\bar{\mathscr{E}} = \ker \bar{\nabla}$ sur $\bar{\mathscr{E}}' = \ker \bar{\nabla}'$.

2) *Soit $\bar{\mathscr{E}}$ un $\mathcal{O}^\infty(I)$-module projectif de type fini et soit*

$$\mathscr{E} = \bar{\mathscr{E}} \underset{\mathcal{O}^\infty(I)}{\bigotimes} \mathscr{A}(I).$$

L'endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathscr{E}$

$$\bar{\nabla} = \mathrm{Id}_{\bar{\mathscr{E}}} \underset{\mathcal{O}^\infty(I)}{\bigotimes} \bar{\delta}.$$

est une $\bar{\delta}$-connexion de noyau $\bar{\mathscr{E}}$[11].

[11] $\bar{\mathscr{E}}$ s'identifie à un sous-espace de $\mathscr{E} = i_* \bar{\mathscr{E}}$ par l'application $\xi \mapsto \xi \otimes 1$, puisque $\bar{\mathscr{E}}$ est projectif et que i est une injection.

Démonstration. Dans cette démonstration, nous écrirons pour simplifier $\bar{\delta}$ au lieu de $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \otimes \bar{\delta}$ ou de $M_n(\bar{\delta})$.

Le théorème 4.4.1 montre que l'assertion 1) b) est vraie lorsque $\mathscr{E} = \mathscr{A}(I)$. En effet, on peut écrire alors $\bar{V} = \bar{\delta} + a$ et $\bar{V}' = \bar{\delta} + a'$, où a et a' appartiennent à $\mathscr{A}(I)$, et si u et u' sont des éléments de $\mathscr{A}(I)^{-1}$ tels que $u^{-1}.\ \bar{\delta} u = a$ et $u'^{-1}.\ \bar{\delta} u' = a'$, la relation (4.5.1) est satisfaite avec $\mathscr{U} = u'^{-1} u$. En remplaçant A par $M_n(A)$, on voit que l'assertion 1) b) est encore vraie lorsque $\mathscr{E}$ est un module libre de type fini.

Comme l'assertion 1) a) est évidemment vraie lorsque $\mathscr{E} = \mathscr{A}(I)^n$ et $\bar{V} = \bar{\delta}$, on déduit de ce qui précède qu'elle est vraie pour tout module libre de type fini $\mathscr{E}$ et toute $\bar{\delta}$-connexion $\bar{V}$. On voit alors que l'assertion 1) a) est vraie en général en choisissant un $\mathscr{A}(I)$-module projectif de type fini $\mathscr{E}'$ tel que $\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}'$ soit libre, puis une $\bar{\delta}$-connexion $\bar{V}'$ sur $\mathscr{E}'$, et en considérant la $\bar{\delta}$-connexion $\bar{V} \oplus \bar{V}'$ sur $\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}'$, dont le noyau est la somme directe $\ker \bar{V} \oplus \ker \bar{V}'$.

Démontrons 1) b) en général. Un argument de connexité immédiat montre qu'il suffit d'établir l'existence de $\mathscr{U}$ satisfaisant à (4.5.1) lorsque $a = \bar{V}' - \bar{V}$ est suffisamment proche de 0 dans $\mathrm{End}_{\mathscr{A}(I)} \mathscr{E}$. D'après 1) a), on peut supposer $\bar{\mathscr{E}} = \ker \bar{V}$ de la forme $e\mathscr{O}^\infty(I)^n$, où $e \in \mathrm{Idem}\, M_n(\mathscr{O}^\infty(I))$. On peut alors identifier $\mathscr{E}$ à $e\mathscr{A}(I)^n$, $\bar{V}$ à $e\bar{\delta}$ et $\mathrm{End}_{\mathscr{A}(I)} \mathscr{E}$ à $eM_n(\mathscr{A}(I))\, e$. D'après le théorème 4.4.1 appliqué à $M_n(A)$, il existe u dans $GL_n(\mathscr{A}(I))$ tel que $u^{-1} \cdot \bar{\delta} u = a$. De plus, si a est suffisamment proche de 0, u peut être choisi assez proche de 1 pour que eue soit inversible dans $eM_n(\mathscr{A}(I))\, e$. Notons $\mathscr{U}$ son inverse. Comme $\bar{\delta} e = 0$, il vient alors, pour tout $\xi \in e\mathscr{A}(I)^n$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} \bar{V}(\mathscr{U}^{-1} \xi) &= \mathscr{U} e \bar{\delta}((eue)\, \xi) \\
&= \mathscr{U} e \bar{\delta}(u \xi) \\
&= \mathscr{U} eu(\bar{\delta} \xi + a \xi) \\
&= \mathscr{U} eue(\bar{V} \xi + a \xi) \\
&= \bar{V}' \xi.
\end{aligned}$$

Démontrons 2). L'application $\bar{V}$ est une $\bar{\delta}$-connexion sur $\mathscr{E}$ car $\bar{\delta}$ est une $\bar{\delta}$-connexion sur $\mathscr{A}(I)$. De plus

$$\ker \bar{V} \simeq \bar{\mathscr{E}} \bigotimes_{\mathscr{O}^\infty(I)} \ker \bar{\delta},$$

car le $\mathscr{O}^\infty(I)$-module $\bar{\mathscr{E}}$ est plat puisque projectif. Par conséquent

$$\ker \bar{V} \simeq \bar{\mathscr{E}} \bigotimes_{\mathscr{O}^\infty(I)} \mathscr{O}^\infty(I) \simeq \bar{\mathscr{E}}. \quad \text{q.e.d.}$$

4.6. Plan de la démonstration du théorème 4.4.1

Décrivons les grandes lignes de la démonstration du théorème 4.4.1, à laquelle sont consacrés les deux prochains paragraphes.

Dans le paragraphe 5, nous établissons diverses propriétés de la dérivation $\bar{\delta}$ et des algèbres $\mathcal{O}^\infty(J)$, qui sont des avatars de résultats classiques de la théorie des fonctions analytiques:

i) Nous commençons par montrer que l'opérateur $\bar{\delta}$ vérifie des propriétés d'ellipticité analogues à celles satisfaites par l'opérateur $\partial/\partial \bar{z}$ (Proposition 5.3.1). Puis nous montrons que, pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\bar{\delta}$ est surjectif lorsqu'il opère de $\mathscr{A}(J)$ dans lui même (Proposition 5.3.5). Cette propriété est analogue à l'annulation du groupe de cohomologie $H^1(\Omega; \mathcal{O})$ lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, compte tenu de l'isomorphisme de Dolbeault

$$H^1(\Omega; \mathcal{O}) \cong \operatorname{coker}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathscr{C}^\infty(\Omega) \to \mathscr{C}^\infty(\Omega)\right).$$

Pour établir ces résultats, nous considérons des algèbres d'applications du cercle vers A dans lesquelles se plongent les algèbres $\mathscr{A}(J)$ (*cf.* n° 5.1 et n° 5.2).

ii) On déduit facilement de la surjectivité de $\bar{\delta}$ un analogue du lemme de Cousin, c'est-à-dire de la version en cohomologie de Cech de l'annulation de $H^1(\Omega; \mathcal{O})$, à savoir: si I_1 et I_2 sont deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non disjoints, tout élément f de $\mathcal{O}(I_1 \cap I_2)$ peut s'écrire $f = f_1 - f_2$, où f_i est la restriction à $I_1 \cap I_2$ d'un élément de $\mathcal{O}(I_i)$ (Proposition 5.3.6).

iii) Enfin, nous démontrons un analogue du théorème des matrices holomorphes de H. Cartan (*cf.* [Ca 1]): si I_1 et I_2 sont deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non disjoints, tout élément w de la composante neutre $\mathcal{O}^\infty(I_1 \cap I_2)_0^{-1}$ de $\mathcal{O}^\infty(I_1 \cap I_2)^{-1}$ peut s'écrire $w = w_1^{-1} w_2$, où w_i est la restriction à $I_1 \cap I_2$ d'un élément de $\mathcal{O}^\infty(I_i)_0^{-1}$ (Corollaire 5.4.6). Cet énoncé est une version multiplicative du «lemme de Cousin». En fait, il s'en déduit au moyen du théorème des fonctions implicites et d'un résultat d'approximation [12].

Ces diverses propriétés de l'opérateur $\bar{\delta}$ et des algèbres $\mathcal{O}^\infty(I)$ sont utilisées au paragraphe 6 pour construire, pour tout $v \in \mathscr{A}(I)$, une solution $u \in \mathscr{A}(I)^{-1}$ de l'équation

$$u^{-1} \cdot \bar{\delta} u = v. \tag{4.6.1}$$

Nous effectuons cette construction de la manière suivante:

iv) Tout d'abord, au moyen des propriétés de surjectivité et d'ellipticité de $\bar{\delta}$ montrées auparavant (*cf.* i)) et du théorème des fonctions implicites, nous établissons l'existence d'une solution u de l'équation (4.6.1) lorsque v est proche de 0 (lemme 6.1.3). Heuristiquement, si l'on recherche une solution de la forme $u = 1 + \varepsilon$, avec ε «petit», l'équation (4.6.1) s'écrit «au premier ordre en ε»

$$\bar{\delta} \varepsilon = v,$$

et admet donc une solution, en vertu de la surjectivité de $\bar{\delta}$.

v) On construit ensuite des solutions locales de l'équation (4.6.1) lorsque $v \in \mathscr{A}(I)$ est arbitraire. Pour cela, on observe que, pour tout $x \in I$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

[12] Les démonstrations des résultats évoqués en ii) et iii) ont été inspirées par une démonstration due à A. Douady du théorème des matrices holomorphes de H. Cartan (*cf.* [D], n° 6.2).

il existe un polynôme $u_0(\tau)$, à coefficients dans A^∞, inversible lorsque τ est voisin de x et tel que, lorsque τ tend vers x:

$$(u_0^{-1}\cdot\bar{\delta}u_0)(\tau)=v(\tau)+O((\tau-x)^N);$$

en fait, cette dernière condition s'exprime comme un système triangulaire d'équations linéaires sur les coefficients du polynôme u_0. On fabrique alors une application u à valeurs dans A^∞, définie et C^∞ sur un voisinage ouvert de x dans I et satisfaisant à (4.6.1) sur cet ouvert, en «corrigeant» la solution approchée u_0 de la manière suivante: considérons les germes d'application au voisinage de x à valeurs dans A^∞

$$v_x=u_0^{-1}\cdot\bar{\delta}u_0$$

et

$$\mu=u_0(v-v_x)\,u_0^{-1};$$

il vient:

$$\mu(\tau)=O((\tau-x)^N)\qquad(\tau\to x);$$

on peut donc prolonger le germe μ en un élément de $\mathscr{A}(I)$ (que nous noterons encore μ) assez «petit» pour qu'on puisse lui appliquer l'énoncé d'existence de l'étape iv) et donc pour qu'il existe $u'\in\mathscr{A}(I)^{-1}$ tel que

$$u'^{-1}\cdot\bar{\delta}u'=\mu.$$

(*cf.* lemme 6.2.3; N doit être choisi assez grand; $N=3$ suffit en fait); on vérifie alors immédiatement que $u=u'u_0$ satisfait à (4.6.1) au voisinage de x.

vi) Pour «recoller» les différentes solutions locales de (4.6.1) ainsi obtenues, on utilise le «théorème des matrices holomorphes» évoqué en iii) (*cf.* n° 6.3). Soient en effet I_1 et I_2 deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$ tels que

$$I_1\subset I,\qquad I_2\subset I\quad\text{et}\quad \mathring{I}_1\cap\mathring{I}_2\neq\varnothing$$

et soient u_1 et u_2 deux solutions de (4.6.1) sur I_1 et I_2 respectivement. Un calcul immédiat montre que:

$$w:=u_{1|I_1\cap I_2}\cdot u_{2|I_1\cap I_2}^{-1}$$

appartient à $\mathcal{O}^\infty(I_1\cap I_2)^{-1}$. Si de plus w appartient $\mathcal{O}^\infty(I_1\cap I_2)_0^{-1}$, d'après le «théorème des matrices holomorphes», il existe $w_1\in\mathcal{O}^\infty(I_1)_0^{-1}$ et $w_2\in\mathcal{O}^\infty(I_2)_0^{-1}$ tels que

$$w=w_{1|I_1\cap I_2}^{-1}\cdot w_{2|I_1\cap I_2}.$$

On vérifie alors très facilement que

$$u_1'=w_1\cdot u_1\in\mathscr{A}(I_1)^{-1}$$

et

$$u_2' = w_2 \cdot u_2 \in \mathscr{A}(I_2)^{-1}$$

coïncident sur $I_1 \cap I_2$ et définissent un élément u' de $\mathscr{A}(I_1 \cap I_2)^{-1}$, solution de (4.6.1) sur $I_1 \cup I_2$.

5. «Ellipticité» et surjectivité de $\bar{\delta}$. Applications aux algèbres $\mathcal{O}^\infty(J)$

5.1. *Les espaces* $\mathscr{D}_a^N$

Nous introduisons dans cette section une famille d'espaces d'applications du cercle vers A. Ils nous permettront d'établir très simplement les propriétés «d'ellipticité» de l'opérateur $\bar{\delta}$ par des calculs de séries de Fourier (*cf.* Prop. 5.3.1).

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la sous-algèbre $\mathcal{O}^q(A, \alpha, \{0\})$ de A, constituée des éléments de A de classe C^q sous l'action du groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$, coïncide avec $\operatorname{Dom} \delta^q$. Il vient, pour tout $x \in \operatorname{Dom} \delta^q$

$$\|x\|_{\{0\},q} = \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{i!} \|\delta^i x\|.$$

Nous noterons désormais $\|\cdot\|_q$ la norme $\|\cdot\|_{\{0\},q}$ sur $\operatorname{Dom} \delta^q$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si J est le cercle $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ ou un intervalle compact de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, nous poserons pour tout $f \in \mathscr{C}^p(J; \operatorname{Dom} \delta^q)$

$$\begin{aligned}\|f\|_{p,q} &= \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} \sup_{\tau \in J} \|f^{(i)}(\tau)\|_q \\ &= \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} \sup_{\tau \in J} \left(\sum_{j=0}^{q} \frac{1}{j!} \|\delta^j f^{(i)}(\tau)\| \right).\end{aligned}$$

Munie de la norme $\|\cdot\|_{p,q}$, $\mathscr{C}^p(J; \operatorname{Dom} \delta^q)$ devient une algèbre de Banach.

Par ailleurs, si g appartient à $\mathscr{C}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A)$, nous poserons:

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{a} \int_0^a g(t)\, e^{-\frac{2\pi i n t}{a}}\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Si de plus g appartient à $\mathscr{C}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^N)$, pour un certain entier naturel N, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \hat{g}(n) \in \operatorname{Dom} \delta^N$$

et l'on peut définir

$$|||g|||_N = \sum_{\substack{p+q=N \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{p!} |n|^p \|\hat{g}(n)\|_q = \sum_{\substack{p+q \leqq N \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{p!\, q!} |n|^p \|\delta^q \hat{g}(n)\| \; (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Nous poserons, pour tout entier naturel N

$$\mathscr{D}_a^N = \{g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^N) \mid |||g|||_N < \infty\}.$$

C'est une sous-algèbre de $\bigcap_{i+j=N} \mathscr{C}^i(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^j)$, qui, munie de $|||.|||_N$, devient une algèbre de Banach. En effet, on obtient par des calculs très simples:

Lemme 5.1.1. 1) *Pour tout* $(f, g) \in (\mathscr{D}_a^N)^2$,

$$|||fg|||_N \leqq |||f|||_N \, |||g|||_N.$$

2) *Si* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *et* $p+q \leqq N$, *alors*

$$\mathscr{D}_a^N \subset \mathscr{C}^p(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^q).$$

De plus, l'injection de $\mathscr{D}_a^N$ *dans* $\mathscr{C}^p(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^q)$ *est un morphisme continu d'algèbres de Banach.*

3) *L'algèbre* $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A^\infty)$ *est contenue dans* $\mathscr{D}_a^N$. *De plus, il existe une constante positive* C, *ne dépendant que de* a *et de* N, *telle que, pour tout* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A^\infty)$

$$|||f|||_N \leqq C \sup_{p+q \leqq N} \|f\|_{p+2,q}. \tag{5.1.1}$$

Les assertions 2) et 3) montrent que la structure d'espace de Fréchet de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A^\infty)$, définie par les normes $\|.\|_{p,q}((p,q) \in \mathbb{N}^2)$, est encore définie par les normes $|||.|||_N (N \in \mathbb{N})$.

Nous poserons aussi

$$\hat{\mathscr{D}}_a^N = \{f \in \mathscr{D}_a^N \mid \hat{f}(0) = 0\}.$$

5.2. Prolongement au cercle des fonctions sur un intervalle

Nous utiliserons à deux reprises le résultat de prolongement que voici (*cf.* [S]):

Proposition 5.2.1. *Soit* $J = [\alpha, \beta]$ *un intervalle compact d'intérieur non vide. Si* $a > \beta - \alpha$, *alors il existe une application linéaire*

$$p\colon \mathscr{C}(J; A) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A)$$

telle que

i) $\forall x \in \mathscr{C}(J; A)$, $p(x)_{|J} = x$;

ii) *pour tout* $(r, q) \in \mathbb{N}^2$, p *envoie continûment* $\mathscr{C}^r(J; \operatorname{Dom} \delta^q)$ *dans* $\mathscr{C}^r(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta^q)$.

Démonstration. Soient α' et $\beta' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$ et $\beta' - \alpha' < a$. Pour établir la proposition, il suffit de construire une application

$$p'\colon \mathscr{C}([\alpha, \beta]; A) \to \mathscr{C}([\alpha', \beta']; A)$$

telle que

i)′ $\forall \in \mathscr{C}([\alpha,\beta];A)$, $p'(x)_{|[\alpha,\beta]}=x$.

ii)′ Pour tout $(r,q)\in\mathbb{N}^2$, p' envoie continûment $\mathscr{C}^r([\alpha,\beta];\mathrm{Dom}\,\delta^q)$ dans $\mathscr{C}^r([\alpha',\beta'];\mathrm{Dom}\,\delta^q)$.

En effet, si l'on choisit alors $\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(]\alpha',\beta'[;\mathbb{R})$ telle que $\varphi_{|[\alpha,\beta]}=1$, on peut définir p vérifiant i) et ii) en posant:

$$\begin{aligned} &p(x)(t)=\varphi(t+ka)\cdot p'(x)(t+ka) && \text{si } t+ka\in]\alpha',\beta'[,\ k\in\mathbb{Z};\\ &p(x)(t)=0 && \text{si } t\notin]\alpha',\beta'[\quad (\mathrm{mod}\,\mathbb{Z}a).\end{aligned}$$

Pour construire p', on commence par construire deux suites de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant aux conditions suivantes (*cf.* [S], *lemma*):

$$\begin{aligned} &\bullet \forall k\in\mathbb{N},\quad b_k<0;\\ &\bullet \lim_{k\to\infty} b_k=-\infty;\\ &\bullet \forall k\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,|b_k|^n<\infty \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, b_k^n=1.\end{aligned}$$

A cet effet, on peut poser par exemple

$$a_k=\frac{2(-1)^k}{\sqrt{3}(2k+1)!}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{2k+1}$$
$$b_k=-2^{2k+1}.$$

On vérifie alors sans difficulté que, si $\rho\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est telle que

$$\rho(t)=0 \quad \text{si } t<\frac{\beta-\alpha}{3}$$

et

$$\rho(t)=1 \quad \text{si } t>\frac{\beta-\alpha}{2},$$

l'on définit une application p' vérifiant i)′ et ii)′ en posant

$$\begin{aligned} &p'(x)(t)=x(t) && \text{si } t\in[\alpha,\beta],\\ &p'(x)(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\rho(b_k(t-\alpha))\,f(\alpha+b_k(t-\alpha)) && \text{si } t\in[\alpha',\alpha[,\\ &p'(x)(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\rho(b_k(\beta-t))\,f(\beta+b_k(t-\beta)) && \text{si } t\in]\beta,\beta'].\quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

5.3. «Ellipticité» et surjectivité de $\bar{\delta}$. «Lemme de Cousin»

Proposition 5.3.1. *Soient* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $N \in \mathbb{N}$.

1) *L'opérateur* $\bar{\delta}$ *envoie continûment* $\mathscr{D}_a^{N+1}$ *dans* $\mathscr{D}_a^N$ *et établit un isomorphisme de* $\hat{\mathscr{D}}_a^{N+1}$ *sur* $\hat{\mathscr{D}}_a^N$.

2) *Si* $N \geqq 1$, *un élément* f *de* $\mathscr{D}_a^N$ *appartient à* $\mathscr{D}_a^{N+1}$ *si et seulement si* $\bar{\delta} f$ *appartient à* $\mathscr{D}_a^N$. *De plus, il existe une constante* C, *ne dépendant que de* N *et* a, *telle que*

$$\forall f \in \mathscr{D}_a^{N+1}, \qquad |||f|||_{N+1} \leqq C(|||f|||_N + |||\bar{\delta} f|||_N). \tag{5.3.1}$$

Nous noterons G_a l'isomorphisme inverse de

$$\bar{\delta}\colon \hat{\mathscr{D}}_a^{N+1} \to \hat{\mathscr{D}}_a^N.$$

Démonstration. Il vient, pour tout $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \operatorname{Dom} \delta)$

$$(\bar{\delta} f)^\wedge(n) = \frac{1}{2}\left[\delta - \frac{2\pi}{a} n\right] \hat{f}(n).$$

Par conséquent, si $\hat{f}(n)$ appartient à $\operatorname{Dom} \delta^{N+1}$, alors $(\delta f)^\wedge(n)$ appartient à $\operatorname{Dom} \delta^N$; de plus, pour tout $q \leqq N$

$$\delta^q(\bar{\delta} f)^\wedge(n) = \frac{1}{2} \delta^{q+1} \hat{f}(n) - \frac{\pi}{a} n \delta^q \hat{f}(n),$$

et donc

$$\|(\bar{\delta} f)^\wedge(n)\|_q \leqq \frac{q+1}{2} \|\hat{f}(n)\|_{q+1} + \frac{\pi}{a} |n| \, \|\hat{f}(n)\|_q.$$

Compte tenu des définitions de $|||.|||_N$ et $|||.|||_{N+1}$, cela montre que δ envoie continûment $\mathscr{D}_a^{N+1}$ dans $\mathscr{D}_a^N$ et $\hat{\mathscr{D}}_a^{N+1}$ dans $\hat{\mathscr{D}}_a^N$.

Rappelons une propriété bien connue du générateur infinitésimal d'un groupe à un paramètre d'isométries, que l'on déduit sans peine du lemme 4.2.1.

Lemme 5.3.2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$, *l'opérateur* $\lambda - \delta\colon \operatorname{Dom} \delta \to A$ *est inversible.*

Si $\operatorname{Re} \lambda > 0$, *on a*

$$(\lambda - \delta)^{-1} y = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \alpha_t y \, dt;$$

si $\operatorname{Re} \lambda < 0$, *on a*

$$(\lambda - \delta)^{-1} y = \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda t} \alpha_t y \, dt.$$

Corollaire 5.3.3. *Soit* q *un entier naturel. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$, *et tout* $y \in \operatorname{Dom} \delta^q$, $(\lambda - \delta)^{-1}$ *appartient à* $\operatorname{Dom} \delta^{q+1}$. *De plus*

$$\|(\lambda - \delta)^{-1} y\|_q \leqq |\operatorname{Re} \lambda|^{-1} \, \|y\|_q$$

et

$$\|(\lambda-\delta)^{-1}y\|_{q+1} \leqq \left[2+\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right]\|y\|_q.$$

Soient g un élément de $\mathscr{D}_a^N$, et $n \in \mathbb{Z}^*$. D'après le lemme précédent, il existe un unique $f_n \in A$ tel que

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{2}\left[\delta-\frac{2\pi}{a}n\right]f_n;$$

de plus, d'après le corollaire

$$f_n \in \mathrm{Dom}\,\delta^{N+1}$$

et, pour tout $q \leqq N$

$$\|f_n\|_q \leqq \frac{a}{\pi|n|}\,\|\hat{g}(n)\|_q$$

et

$$\|f_n\|_{q+1} \leqq 3\,\|\hat{g}(n)\|_q.$$

On en déduit immédiatement que $\bar{\delta}$ établit un isomorphisme entre les espaces de Banach $\hat{\mathscr{D}}_a^{N+1}$ et $\hat{\mathscr{D}}_a^N$. L'assertion 2) découle aussi de ces majorations, pourvu que l'on remarque que, si $\bar{\delta}f$ appartient à $\mathscr{D}_a^N$, alors $\delta\hat{f}(0)=2(\bar{\delta}f)^\wedge(0)$ appartient à Dom δ^N et

$$\|\hat{f}(0)\|_{N+1} \leqq \|\hat{f}(0)\|_N+\|(\bar{\delta}f)^\wedge(0)\|_N. \quad \text{q.e.d.}$$

Proposition 5.3.4. *Pour tout intervalle compact J d'intérieur non vide, l'application linéaire continue $\bar{\delta}$: $\mathscr{A}(J) \to \mathscr{A}(J)$ est surjective scindée.*

Démonstration. D'après la proposition 5.2.1, si a est un réel strictement plus grand que la longueur de J, alors il existe une section linéaire continue p de l'application de restriction

$$r\colon\ \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};A^\infty) \to \mathscr{C}^\infty(J;A^\infty)=\mathscr{A}(J).$$

Nous pouvons même construire une telle section de sorte que

$$\forall x \in \mathscr{A}(J), \qquad \widehat{p(x)}(0)=0. \tag{5.3.2}$$

En effet, si p_0 vérifie les conclusions de la proposition 5.2.1, il en va de même de l'application

$$p\colon\ x \mapsto p_0(x)-\hat{\varphi}(0)^{-1}\,\varphi\,\widehat{p_0(x)}(0)$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};\mathbb{R})$ positive, non identiquement nulle et de support disjoint de J. De plus, p satisfait à (5.3.2) par construction.

L'application

$$r \circ G_a \circ p\colon \mathscr{A}(J) \to \mathscr{A}(J)$$

est alors une section linéaire continue de

$$\bar{\delta}\colon \mathscr{A}(J) \to \mathscr{A}(J). \quad \text{q.e.d.}$$

Proposition 5.3.5. *Soient J_1 et J_2 deux intervalles compacts tels que $\mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2 \neq \emptyset$. L'application linéaire continue*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(J_1) \times \mathcal{O}(J_2) &\to \mathcal{O}(J_1 \cap J_2) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \psi_{|J_1 \cap J_2} - \varphi_{|J_1 \cap J_2} \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

est surjective scindée.

Démonstration. Soit $\rho \in \mathscr{C}^\infty(J_1 \cup J_2)$ telle que

$$\operatorname{supp} \rho \cap \overline{J_2 - J_1} = \emptyset \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(1-\rho) \cap \overline{J_1 - J_2} = \emptyset.$$

Le support de $\rho' (= d\rho/d\tau)$ est alors fermé dans $\mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2$.

Si $\mu \in \mathcal{O}(J_1 \cap J_2)$, alors les fonctions $\rho\mu$, $(1-\rho)\mu$ et $\rho'\mu$, définies *a priori* sur $J_1 \cap J_2$, ont leur support inclus dans, respectivement, $\mathring{J}_1 \cap J_2$, $J_1 \cap \mathring{J}_2$ et $\mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2$; aussi, en les prolongeant par 0 sur le complémentaire de ces intervalles dans J_2, J_1 et $J_1 \cup J_2$ respectivement, on définit des applications:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(J_1 \cap J_2) &\to \mathscr{C}(J_2\,; A) & \qquad \mathcal{O}(J_1 \cap J_2) &\to \mathscr{C}(J_1\,; A) \\ \mu &\mapsto \rho\mu & \mu &\mapsto (1-\rho)\mu, \\ \mathcal{O}(J_1 \cap J_2) &\to \mathscr{A}(J_1 \cup J_2) \\ \mu &\mapsto \rho'\mu. \end{aligned}$$

Ces applications sont continues. De plus, il vient, pour tout $\mu \in \mathcal{O}(J_1 \cap J_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(\rho\mu) &= (\bar{\delta}\rho)\mu + \rho\bar{\delta}\mu \\ &= i/2\,\rho'\mu \qquad (\text{sur } J_2) \end{aligned}$$

et
$$\bar{\delta}[(1-\rho)\mu] = -i/2\,\rho'\mu \qquad (\text{sur } J_1)$$

Par conséquent, si S est une section linéaire continue de $\bar{\delta}\colon \mathscr{A}(J_1 \cup J_2) \to \mathscr{A}(J_1 \cup J_2)$, l'application qui à $\mu \in \mathcal{O}(J_1 \cap J_2)$ associe (φ, ψ) défini par les formules

$$\begin{aligned} \varphi &= (1-\rho)\mu + S(i/2\,\rho'\mu)_{|J_1} \\ \psi &= \rho\mu - S(i/2\,\rho'\mu)_{|J_2} \end{aligned}$$

prend ses valeurs dans $\mathcal{O}(J_1) \times \mathcal{O}(J_2)$. On vérifie immédiatement que cette application est une section linéaire continue de l'application (5.3.3). q.e.d.

Remarque 5.3.6. Au lieu d'établir la proposition 5.3.5 en plongeant $\mathscr{A}(J)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; A^\infty)$, nous aurions pu considérer l'action de $\bar{\delta}$ sur les espaces $\mathscr{C}^k(A, \alpha, J) := \bigcap_{p+q=k} \mathscr{C}^p(J; \operatorname{Dom} \delta^q)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{k;J} = \sum_{p+q=k} \|\cdot\|_{p,q}$. Toutefois, les inégalités (5.3.1) ne sont pas satisfaites si l'on substitue les normes $\|.\|_{k;J}$ et $\|.\|_{k+1;J}$ à $|||.|||_N$ et $|||.|||_{N+1}$. Elles le deviennent lorsque $k \geqq 0$ est non entier, après que l'on a étendu les définitions de $\mathscr{C}^k(A, \alpha, J)$ à ces valeurs de k. La présentation adoptée ici évite ces développements quelque peu techniques.

5.4. Un analogue du théorème des matrices holomorphes

Proposition 5.4.1. *Soient J_1 et J_2 deux intervalles tels que $\mathring{J}_1 \cap \mathring{J}_2 \neq \emptyset$. L'application*[13]:

$$P\colon\ \mathcal{O}(J_1)_0^{-1} \times \mathcal{O}(J_2)_0^{-1} \to \mathcal{O}(J_1 \cap J_2)_0^{-1}$$

définie par

$$P(f, g) = f_{|J_1 \cap J_2}^{-1} \cdot g_{|J_1 \cap J_2}$$

est surjective.

Démonstration. Commençons par rappeler un résultat d'intérêt indépendant.

Lemme 5.4.2. *Soit $\varphi\colon B \to B'$ un morphisme continu d'algèbres de Banach unifères. Si $\varphi(B)$ est dense dans B', alors $\varphi(B_0^{-1})$ est dense dans $B_0'^{-1}$.*

Démonstration du lemme 5.4.2. Tout élément b' de $B_0'^{-1}$ peut s'écrire comme un produit fini

$$e^{x'_1} \cdot e^{x'_2} \cdot \ldots \cdot e^{x'_N}$$

où les x'_i appartiennent à B. Si $\varphi(B)$ est dense dans B', il existe une suite $((x_1^n, \ldots, x_N^n))_{n \in \mathbb{N}}$ de points de B'^N tels que $(\varphi(x_1^n), \ldots, \varphi(x_N^n))$ converge vers $(x'_1, \ldots, x'_N)$. La suite des images par φ des éléments de B_0^{-1}

$$e^{x_1^n} \cdot \ldots \cdot e^{x_N^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

converge alors vers b' dans $B_0'^{-1}$. q.e.d.

Nous pouvons appliquer le lemme précédent au morphisme de restriction

$$\rho\colon\ \mathcal{O}(J_2) \to \mathcal{O}(J_1 \cap J_2)$$

défini par

$$\rho(f) := f_{|J_1 \cap J_2}.$$

En effet, $\rho(\mathcal{O}(J_2))$ est dense dans $\mathcal{O}(J_1 \cap J_2)$ d'après la proposition 4.2.4. Nous obtenons ainsi:

Lemme 5.4.3. *$\rho(\mathcal{O}(J_2)_0^{-1})$ est dense dans $\mathcal{O}(J_1 \cap J_2)_0^{-1}$.*

Par ailleurs, il vient:

Lemme 5.4.4. *L'application P admet une section analytique Q, définie sur un voisinage ouvert Ω' de 1 dans $\mathcal{O}(J_1 \cap J_2)^{-1}$, telle que $Q(1) = (1, 1)$.*

---

[13] Nous désignons par G_0 la composante neutre d'un groupe topologique G.

Démonstration du lemme 5.4.4. L'application P est analytique[14]. Aussi, en vertu du théorème des fonctions implicites, il suffit de montrer que la différentielle de P en $(1,1)$ est surjective scindée (*cf.* [D], § 1.7). Or cela découle immédiatement du théorème 5.3.6, puisque cette différentielle est l'application

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}(J_1)\times\mathcal{O}(J_2)\to\mathcal{O}(J_1\cap J_2)\\&\qquad(\varphi,\psi)\mapsto\psi_{|J_1\cap J_2}-\varphi_{|J_1\cap J_2}\quad\text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Démontrons la proposition 5.4.1. Soit donc $h\in\mathcal{O}(J_1\cap J_2)_0^{-1}$. D'après le lemme 5.4.3, il existe $\tilde{h}\in\mathcal{O}(J_2)^{-1}$ tel que

$$h\tilde{h}^{-1}_{|J_1\cap J_2}\in\Omega'.$$

D'après le lemme 5.4.4, il existe $f\in\mathcal{O}(J_1)^{-1}$ et $g\in\mathcal{O}(J_2)^{-1}$ tels que

$$h\tilde{h}^{-1}_{|J_1\cap J_2}=f^{-1}_{|J_1\cap J_2}\,g_{|J_1\cap J_2}.$$

On a alors

$$h=P(f,g\tilde{h}).\quad\text{q.e.d.}$$

Remarque 5.4.5. Nous avons montré, pour établir le lemme 5.4.4, que la différentielle $DP(1,1)$ est surjective scindée. Il est facile d'en déduire que $DP(f,g)$ est surjective scindée pour tout $(f,g)\in\mathcal{O}(J_1)^{-1}\times\mathcal{O}(J_2)^{-1}$. Ainsi, l'application analytique P est une *submersion directe surjective.*

Corollaire 5.4.6. *Conservons les notations de la propositions* 5.4.4. *L'application*

$$P\colon\ \mathcal{O}^\infty(J_1)_0^{-1}\times\mathcal{O}^\infty(J_2)_0^{-1}\to\mathcal{O}^\infty(J_1\cap J_2)_0^{-1}\tag{5.4.1}$$

est surjective.

Démonstration. On peut trouver deux intervalles compacts $\tilde{J}_1$ et $\tilde{J}_2$ tels que

$$\begin{aligned}&J_i\subset\tilde{J}_i;\\&\tilde{J}_1\cap\tilde{J}_2=J_1\cap J_2;\\&J_1\backslash J_2\subset\mathring{\tilde{J}}_1\quad\text{et}\quad J_2\backslash J_1\subset\mathring{\tilde{J}}_2.\end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4.4, pour tout $u\in\mathcal{O}(J_1\cap J_2)_0^{-1}$, il existe $u_i\in\mathcal{O}(\tilde{J}_i)_0^{-1}(i=1,2)$ tels que

$$u^{-1}_{1|J_1\cap J_2}\cdot u_{2|J_1\cap J_2}=u.$$

Cette relation, jointe à la proposition 4.2.2, montre que, si u appartient à $\mathcal{O}^\infty(J_1\cap J_2)$, alors $u_{i|J}$ appartient à $\mathcal{O}^\infty(J_i)$, donc à $\mathcal{O}^\infty(J_i)_0^{-1}$ d'après la proposition 4.2.5. Enfin, par construction

$$u=P(u_{1|J_1\cap J_2},u_{2|J_1\cap J_2}).\quad\text{q.e.d.}$$

[14] Pour la définition et les propriétés élémentaires des applications analytiques entre ouverts d'espaces de Banach, on pourra se reporter à [D], pp. 7–10.

6. Résolution de l'équation $u^{-1} \cdot \bar{\delta} u = v$

6.1. *Résolution de l'équation* $u^{-1} \cdot \bar{\delta} u = v$ *lorsque* v *est proche de* 0

Lemme 6.1.1. *Soient* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \mathbb{C})$, *et soit*

$$\Phi\colon (\mathscr{D}_a^1)^{-1} \times A \to \mathscr{D}_a^0$$
$$(u, b) \mapsto u^{-1} \cdot \bar{\delta} u + \varphi b.$$

a) *Φ est une application analytique.*

b) *Si $\hat{\varphi}(0) \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathscr{D}_a^0$ et deux applications analytiques*

$$\Psi\colon \Omega \to (\mathscr{D}_a^1)^{-1} \quad et \quad B\colon \Omega \to A$$

tels que

$$\Phi \circ (\Psi, B) = \mathrm{Id}_\Omega, \qquad \Psi(0) = 1 \quad et \quad B(0) = 0.$$

Démonstration. L'assertion a) découle immédiatement du fait que $\mathscr{D}_a^0$ et $\mathscr{D}_a^1$ sont des algèbres de Banach, que $\mathscr{D}_a^0$ contient A et φ et que $\bar{\delta}$ est une application linéaire continue de $\mathscr{D}_a^1$ dans $\mathscr{D}_a^0$.

D'après le théorème des fonctions implicites, il suffit pour établir b) de montrer que la différentielle

$$D\Phi(1, 0)\colon \mathscr{D}_a^1 \times A \to \mathscr{D}_a^0$$

est surjective scindée (*cf.* [D], § 1.7). Or il vient immédiatement:

$$D\Phi(1, 0)(\eta, \beta) = \bar{\delta}\eta + \varphi\beta.$$

Par conséquent, si $v \in \mathscr{D}_a^0$ et si l'on pose (*cf.* n° 5.3)

$$\beta = \hat{\varphi}(0)^{-1}\, \hat{v}(0) \quad \text{et} \quad \eta = G_a(v - \varphi\beta),$$

alors

$$(\eta, \beta) \in \mathscr{D}_a^1 \times A \quad \text{et} \quad D\Phi(1, 0)(\eta, \beta) = v.$$

L'application $v \mapsto (\eta, \beta)$ ainsi définie constitue donc une section de $D\Phi(1, 0)$. Sa linéarité et sa continuité sont évidentes. q.e.d.

Lemme 6.1.2. *Soient φ, Ω, Ψ et B vérifant les conclusions du lemme* 6.1.1.

a) *Si $t \in \Omega$, alors sur le complémentaire du support de φ*

$$\Psi(t)^{-1} \cdot \bar{\delta}\Psi(t) = t. \tag{6.1.1}$$

b) *De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, si $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ et si*

$$\operatorname{supp} \rho \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset, \tag{6.1.2}$$

alors

$$\forall t\in\Omega,\quad t\in\mathscr{D}_a^N \Rightarrow \rho\Psi(t)\in\mathscr{D}_a^{N+1},$$

et l'application

$$\begin{aligned}\rho\Psi:\ \mathscr{D}_a^N\cap\Omega &\to \mathscr{D}_a^{N+1}\\ t&\mapsto\rho\Psi(t)\end{aligned}$$

est analytique (en tant qu'application d'un ouvert de l'espace de Banach $\mathscr{D}_a^N$ vers l'espace de Banach $\mathscr{D}_a^{N+1}$).

c) *Sous les mêmes hypothèses, $\rho\Psi$ envoie continûment $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};A^\infty)\cap\Omega$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};A^\infty)$.*

Démonstration. Soit $t\in\Omega$. Par hypothèse,

$$\Phi(\Psi(t),B(t))=t,$$

c'est-à-dire

$$\Psi(t)^{-1}\cdot\bar\delta\Psi(t)+\varphi B(t)=t;$$

l'égalité (6.1.1) est donc bien satisfaite en dehors du support de φ.

Etablissons b) par récurrence sur N:

- si $N=0$, b) découle de l'hypothèse sur ψ, supposée analytique de Ω vers $\mathscr{D}_a^1$.
- supposons avoir démontré b) à l'ordre N. Soient alors $t\in\mathscr{D}_a^{N+1}\cap\Omega$, et $\rho\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};\mathbb{C})$ vérifiant (6.1.2). Il vient

$$\begin{aligned}\bar\delta[\rho\Psi(t)]&=\rho\bar\delta\Psi(t)+\frac{i}{2}\rho'\Psi(t)\\&=\rho\Psi(t)\,[t-\varphi B(t)]+\frac{i}{2}\rho'\Psi(t)\\&=\Psi(t)\left(\rho t+\frac{i}{2}\rho'\right).\end{aligned}$$

Jointe à l'hypothèse de récurrence, cette formule montre que $\bar\delta\circ(\rho\Psi)$ envoie analytiquement $\mathscr{D}_a^{N+1}\cap\Omega$ vers $\mathscr{D}_a^N$. Comme $\rho\Psi$ envoie analytiquement $\mathscr{D}_a^{N+1}\cap\Omega$ vers $\mathscr{D}_a^{N+1}$ (à nouveau d'après l'hypothèse de récurrence), «l'ellipticité» de $\bar\delta$ prouve alors que $\rho\Psi$ envoie analytiquement $\mathscr{D}_a^{N+1}\cap\Omega$ vers $\mathscr{D}_a^{N+2}$ (*cf.* Prop. 5.3.1). Nous avons ainsi établi b) à l'ordre $N+1$.

Enfin, c) est une conséquence immédiate de b) (*cf.* n° 5.1). q.e.d.

Lemme 6.1.3. *Il existe $\eta>0$ et une application continue $\mathscr{N}$ définie sur l'ouvert Ω_η de $\mathscr{A}(I)$ déterminé par*

$$t\in\Omega_\eta \Leftrightarrow \sup_{\tau\in I}(\|t(\tau)\|+\|t'(\tau)\|+\|t''(\tau)\|)<\eta$$

à valeurs dans $\mathscr{A}(I)^{-1}$ *telle que*:

i) $\mathcal{N}(0)=1$;

ii) $\forall t \in \Omega_\eta$, $\mathcal{N}(t)^{-1} \cdot \bar{\delta}\mathcal{N}(t)=t$.

Démonstration. Soit a un réel strictement plus grand que la longueur de I. Donnons-nous $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};\mathbb{C})$ de support disjoint de I et tel que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$, puis construisons Ω, Ψ et B comme dans le lemme 6.1.1. Si p vérifie les conclusions de la proposition 5.2.1 avec $J=I$, et si η est suffisamment petit, alors d'après les inégalités (5.1.1)

$$t \in \Omega_\eta \Rightarrow p(t) \in \Omega.$$

On peut alors poser

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 \colon \Omega_\eta &\to \mathscr{A}(I)^{-1} \\ t &\mapsto \Psi[p(t)]_{|I}. \end{aligned}$$

Le lemme 6.1.2 montre que $\mathcal{N}_0$ est continue. En effet, si $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};\mathbb{C})$ vaut 1 sur I et admet un support disjoint de celui de φ, $\rho\Psi$ envoie continûment $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};A^\infty) \cap \Omega$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}/a\mathbb{Z};A^\infty)$ et $\mathcal{N}_0(t)=(\rho\Psi[p(t)])_{|I}$. On a de plus

$$\forall t \in \Omega_\eta, \qquad \mathcal{N}_0(t)^{-1} \cdot \bar{\delta}\mathcal{N}_0(t)=t.$$

Nous pouvons maintenant définir $\mathcal{N}$ satisfaisant à i) et ii) par la formule

$$\mathcal{N}(t)=\mathcal{N}_0(0)^{-1} \cdot \mathcal{N}_0(t). \quad \text{q.e.d.}$$

Remarque 6.1.4. L'application $\mathcal{N}$ construite dans la démonstration du lemme 6.1.3 est «beaucoup plus» que simplement continue, puisqu'elle est obtenue à partir de l'application $\rho\Psi$ du lemme 6.1.2, qui définit un système projectif d'applications analytiques.

6.2. Résolution locale de l'équation $u^{-1} \cdot \bar{\delta}u=v$

Posons, lorsque $v_0 = \operatorname{Dom} \delta^2$, $v_1 \in \operatorname{Dom} \delta$ et $v_2 \in A$,

$$\begin{aligned} P_1(v_0,v_1,v_2) &= -2iv_0; \\ P_2(v_0,v_1,v_2) &= -iv_1-2v_0^2+\delta v_0; \\ P_3(v_0,v_1,v_2) &= \tfrac{1}{3}(\delta v_1+i\delta^2 v_0-iv_2) \\ &\quad +\tfrac{2}{3}(-iv_0\cdot\delta v_0-2i\delta v_0\cdot v_0-2v_0v_1-v_1v_0+2iv_0^3). \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Lemme 6.2.1. *Pour tout germe en* 0 *d'application* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *vers* A^∞, v, *le germe en* 0 *d'application* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *vers* $(A^\infty)^{-1}$ *défini par*

$$u(\tau)=1+\sum_{j=1}^{3} P_j(v(0),v'(0),v''(0))\,\tau^j$$

est tel que, lorsque τ *tend vers* 0

$$u(\tau)^{-1}\cdot\bar{\delta}u(\tau)=v(\tau)+O(\tau^3). \tag{6.2.2}$$

Démonstration. Comme $u(\tau)$ est de la forme $1+O(\tau)$, la condition (6.2.2) est équivalente à la condition

$$\bar{\delta} u(\tau) = u(\tau)\, v(\tau) + O(\tau^3). \tag{6.2.3}$$

Lorsque $u(\tau) = \sum_{j=0}^{3} P_j \tau^j$ et que $P_0 = 1$, cette dernière condition est vérifiée si et seulement si

$$\frac{1}{2}[i(j+1)P_{j+1} + \delta P_j] = \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(j-k)!} P_k v^{(j-k)}(0), \quad j \in \{0, 1, 2\}$$

c'est-à-dire, si et seulement si

$$P_{j+1} = \frac{i}{j+1}\left[\delta P_j - 2\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(j-k)!} P_k v^{(j-k)}(0)\right], \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

Or un calcul très simple montre que P_1, P_2 et P_3 donnés par les formules (6.2.1), où l'on a fait $v_0 = v(0)$, $v_1 = v'(0)$ et $v_2 = v''(0)$, sont les (uniques) solutions de ces équations. q.e.d.

Donnons-nous maintenant $\rho \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tel que

$$\operatorname{supp} \rho \subset]-1, 1[\quad \text{et} \quad \rho = 1 \text{ sur } [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}],$$

et posons, si $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\rho_{\varepsilon, x}(\tau) = \rho\left(\frac{\tau - x}{\varepsilon}\right).$$

Lemme 6.2.2. *Soit J un intervalle compact d'intérieur non vide et soit x un point de J. Si $w \in \mathscr{C}^\infty(J; A^\infty)$ vérifie*

$$w(0) = w'(0) = w''(0) = 0,$$

alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$

$$\sup_{t \in J}(\|(\rho_{\varepsilon, x} w)(\tau)\| + \|(\rho_{\varepsilon, x} w)'(\tau)\| + \|(\rho_{\varepsilon, x} w)''(\tau)\|)$$
$$\leqq 10\varepsilon \sup_{\tau \in \mathbb{R}}(|\rho(t)| + |\rho'(t)| + |\rho''(t)|) \sup_{\tau \in J} \|w^{(3)}(\tau)\|.$$

Démonstration. Il vient:

$$(\rho_{\varepsilon, x} w)^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \rho_{\varepsilon, x}^{(i-j)} w^{(j)}.$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a, si $j\in\{0,1,2\}$ et $\tau\in J$:

$$w^{(j)}(\tau)=\int_0^1 \frac{\theta^{2-j}}{(2-j)!}(\tau-x)^{3-j}w^{(3)}[\theta(\tau-x)]\,d\theta;$$

par ailleurs

$$\rho_{\varepsilon,x}^{(i-j)}(\tau)=\varepsilon^{j-i}\rho^{(i-j)}\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right).$$

Par conséquent, si $0\leqq j\leqq i\leqq 2$ et $\varepsilon\in]0,1]$, alors, pour tout $\tau\in J$

$$\begin{aligned}\|\rho_{\varepsilon,x}^{(i-j)}(\tau)\,w^{(j)}(\tau)\| &\leqq \varepsilon^{j-i}\sup_{t\in\mathbb{R}}|\rho^{(i-j)}(t)|\frac{1}{(2-j)!}\varepsilon^{3-j}\sup_{\tau\in J}\|w^{(3)}(\tau)\|\\ &\leqq \varepsilon\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\rho(t)|+|\rho'(t)|+|\rho''(t)|]\sup_{\tau\in J}\|w^{(3)}(\tau)\|.\end{aligned}$$

(Remarquer que, puisque l'expression de gauche est nulle si $|\tau-x|\geqq\varepsilon$, on peut supposer pour la majorer que $|\tau-x|<\varepsilon$.)

La majoration à établir est maintenant évidente. q.e.d.

Posons maintenant, si $v\in\mathscr{A}(I)$ et $x\in I$:

$$\mathscr{U}_x(v)(\tau)=1+\sum_{j=1}^{3}P_j(v(x),v'(x),v''(x))(\tau-x)^j \tag{6.2.4}$$

et

$$v_x(\tau)=\mathscr{U}_x(v)(\tau)^{-1}\cdot\bar{\delta}\mathscr{U}_x(v)(\tau).$$

($\mathscr{U}_x(v)$ est inversible au voisinage de x, donc v_x est bien défini au voisinage de x).

Définissons aussi, pour tout $R>0$, B_R comme la boule

$$\{v\in\mathscr{A}(I)\,|\,|||v|||\leqq R\}$$

où $|||.|||$ désigne la norme

$$v\mapsto\sum_{i+j\leqq 3}\sup_{\tau\in I}\|\delta^i v^{(j)}(\tau)\|.$$

Lemme 6.2.3. *Pour tout $R>0$, il existe $\varepsilon(R)>0$ tel que, si $v\in B_R$ et $x\in I$, alors*

i) *$\mathscr{U}_x(v)(\tau)$ soit inversible lorsque $\tau\in[x-\varepsilon(R),x+\varepsilon(R)]$;*

ii) *pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon(R)]$, $\rho_{\varepsilon,x}\mathscr{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathscr{U}_x(v)^{-1}$ appartienne au voisinage Ω_η de 0 dans $\mathscr{A}(I)$ introduit dans le lemme* 6.1.3[15].

[15] D'après i), le produit $\mathscr{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathscr{U}_x(v)^{-1}$ définit un élément de $\mathscr{A}(I\cap[x-\varepsilon(R),x+\varepsilon(R)])$. Comme $\operatorname{supp}\rho_{\varepsilon,x}\subset]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$, le produit par $\rho_{\varepsilon,x}$ de cet élément, prolongé par 0 sur $I\backslash[x-\varepsilon(R),x+\varepsilon(R)]$, définit un élément de $\mathscr{A}(I)$ que nous notons $\rho_{\varepsilon,x}\mathscr{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathscr{U}_x(v)^{-1}$.

Démonstration. Lorsque $v \in B_R$, il vient, d'après la définition de $\mathcal{U}_x(v)$ (*cf.* (6.2.4) et (6.2.1)):

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}_x(v)(\tau)-1\| &\leqq 2R|\tau-x|+(2R+2R^2)|\tau-x|^2+1/3(4R^3+12R^2+3R)|\tau-x|^3 \\ &\leqq 20(R^3+1)|\tau-x|\end{aligned}$$

pourvu que $|\tau-x|\leqq 1$.

Par conséquent, si $|\tau-x|\leqq[40(R^3+1)]^{-1}$, alors $\mathcal{U}_x(v)(\tau)$ est inversible et

$$\|\mathcal{U}_x(v)(\tau)^{-1}\|\leqq 2. \tag{6.2.5}$$

Ainsi, i) est réalisé pourvu que $\varepsilon(R)\leqq[40(R^3+1)]^{-1}$.

De plus, par construction, $v-v_x$ est nulle en x ainsi que ses deux premières dérivées. Il en va donc de même de

$$w_x=\mathcal{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathcal{U}_x(v)^{-1}.$$

La définition de Ω_η et le lemme précédent montrent alors qu'il suffit pour établir ii) de majorer $\|w_x^{(3)}(\tau)\|$ en fonction de R lorsque τ décrit l'intervalle

$$J_x=I\cap\left[x-\frac{1}{40(R^3+1)},\,x+\frac{1}{40(R^3+1)}\right].$$

Or, d'après la définition de B_R, les dérivées d'ordre au plus 3 de v, $\mathcal{U}_x(v)$ et $\delta\mathcal{U}_x(v)$ ont leur norme dans A majorée en fonction de R sur J_x; d'après (6.2.5), il en va de même de celles de $\mathcal{U}_x(v)^{-1}$. De ces majorations découle la majoration requise sur $\|w_x^{(3)}(\tau)\|$. q.e.d.

Lemme 6.2.4. *Conservons les notations des lemmes* 6.1.3 *et* 6.2.3. *Si on pose, pour* $\varepsilon\in[0,\varepsilon(R)]$,

$$u=\mathcal{N}[\rho_{\varepsilon,x}\,\mathcal{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathcal{U}_x(v)^{-1}]\,\mathcal{U}_x(v),$$

alors, sur l'intervalle $[x-1/2\varepsilon(R),\,x+1/2\varepsilon(R)]\cap I$, *u est inversible et*

$$u^{-1}\cdot\delta u=v.$$

Démonstration. L'invertibilité de u sur l'intervalle en question découle de celle de $\mathcal{U}_x(v)$ et du fait que $\mathcal{N}$ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}(I)^{-1}$. De plus, en posant

$$\mu=\rho_{\varepsilon,x}\,\mathcal{U}_x(v)(v-v_x)\,\mathcal{U}_x(v)^{-1},$$

nous obtenons sur ce même intervalle, compte tenu des définitions de $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}_x$ et v_x, et du fait que $\rho_{\varepsilon,x}=1$ sur $[x-1/2\varepsilon(R),\,x+1/2\varepsilon(R)]$:

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta\mathcal{N}(\mu)\cdot\mathcal{U}_x(v)+\mathcal{N}(\mu)\,\delta\mathcal{U}_x(v)\\ &= \mathcal{N}(\mu)\cdot\mu\cdot\mathcal{U}_x(v)+\mathcal{N}(\mu)\,\delta\mathcal{U}_x(v)\\ &= \mathcal{N}(\mu)\,[\rho_{\varepsilon,x}\,\mathcal{U}_x(v)(v-v_x)+\delta\mathcal{U}_x(v)]\\ &= \mathcal{N}(\mu)\,\mathcal{U}_x(v)\,v\\ &= uv. \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

6.3. Résolution globale de l'équation $u^{-1}\cdot\bar{\delta}u=v$

Dans ce numéro, nous nous donnons $v\in\mathscr{A}(I)$ et nous construisons une solution $u\in\mathscr{A}(I)^{-1}$ de l'équation

$$u^{-1}\cdot\bar{\delta}u=v \tag{6.3.1}$$

au moyen du lemme 6.2.4 et du corollaire 5.4.6.

Reprenons les notations des lemmes 6.1.3 et 6.2.3. Le lemme 6.2.4 montre que, si $\varepsilon=\varepsilon(|||v|||)$, alors, pour tout $x\in I$,

$$u_x=\mathscr{N}[\rho_{\varepsilon,x}\mathscr{U}_x(v)(v-v_x)\mathscr{U}_x(v)^{-1}]\,\mathscr{U}_x(v)$$

appartient à $\mathscr{A}(I)$, que u_x est inversible sur $I_x:=[x-\varepsilon/2,x+\varepsilon/2]\cap I$ et que, sur cet intervalle

$$u_x^{-1}\cdot\bar{\delta}u_x=v.$$

De plus, la continuité de $\mathscr{N}$ et la définition de $\mathscr{U}_x$ montrent que l'application $t\mapsto u_t$ de I vers $\mathscr{A}(I)$ est continue.

Soit $(x_1,x_2)\in I^2$ tel que

$$x_1\leqq x_2<x_1+\varepsilon,$$

c'est-à-dire tel que $I_{x_1}\cap I_{x_2}$ soit d'intérieur non vide. Considérons l'application

$$\begin{aligned}[x_1,x_2]&\to\mathscr{A}(I_{x_1}\cap I_{x_2})\\ t&\mapsto u_{t|I_{x_1}\cap I_{x_2}}\cdot u_{x_1|I_{x_1}\cap I_{x_2}}^{-1}.\end{aligned}$$

Elle est continue et vaut 1 en x_1. De plus, elle prend ses valeurs dans $\mathscr{O}^\infty(I_{x_1}\cap I_{x_2})^{-1}$; en effet, pour tout $t\in[x_1,x_2]$, I_t contient $I_{x_1}\cap I_{x_2}$, de sorte que u_t est inversible sur $I_{x_1}\cap I_{x_2}$ et que, sur cet intervalle

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(u_t\cdot u_{x_1}^{-1})&=\bar{\delta}u_t\cdot u_{x_1}^{-1}-u_t\cdot u_{x_1}^{-1}\cdot\bar{\delta}u_{x_1}\cdot u_{x_1}^{-1}\\ &=u_t\cdot[u_t^{-1}\cdot\bar{\delta}u_t-u_{x_1}^{-1}\cdot\bar{\delta}u_{x_1}]\cdot u_{x_1}^{-1}\\ &=0.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$u_{x_2|I_{x_1}\cap I_{x_2}}\cdot u_{x_1|I_{x_1}\cap I_{x_2}}^{-1}\in\mathscr{O}^\infty(I_{x_1}\cap I_{x_2})_0^{-1}. \tag{6.3.2}$$

Choisissons une subdivision $a_0<a_1<\ldots<a_N$ de l'intervalle I telle que $a_{i+1}-a_i<\varepsilon/2$ $(i=0,\ldots,N-1)$, et posons

$$u_i=u_{a_i|[a_{i-1},a_{i+1}]}\qquad(i=1,\ldots,N-1).$$

Il vient, puisque $[a_{i-1},a_{i+1}]\subset I_{a_i}$:

$$u_i\in\mathscr{A}([a_{i-1},a_{i+1}])^{-1} \tag{6.3.3, i}$$

et

$$u_i^{-1}\cdot\bar{\delta}u_i=v_{|[a_{i-1},a_{i+1}]}\qquad (i=1,\ldots,N-1). \tag{6.3.4, i}$$

De plus, d'après (6.3.2)

$$u_{i+1\,|[a_i,a_{i+1}]}\cdot u_{i|[a_i,a_{i+1}]}^{-1}\in\mathcal{O}^\infty([a_i,a_{i+1}])_0^{-1}. \tag{6.3.5, i}$$

Le corollaire 5.4.6 nous permet de «recoller» les «solutions locales» u_i de l'équation (6.3.1). Plus précisément, nous pouvons établir par récurrence l'énoncé suivant:

Lemme 6.3.1. *Pour tout* $i\in\{1,\ldots,N-1\}$, *il existe* $\tilde{u}_i\in\mathscr{A}([a_0,a_{i+1}])^{-1}$ *tel que*

$$\tilde{u}_i^{-1}\cdot\bar{\delta}\tilde{u}_i=v_{|[a_0,a_{i+1}]} \tag{6.3.6, i}$$

et que, si $i<N-1$

$$u_{i+1\,|[a_i,a_{i+1}]}\cdot\tilde{u}_{i|[a_i,a_{i+1}]}^{-1}\in\mathcal{O}^\infty([a_i,a_{i+1}])_0^{-1}. \tag{6.3.7, i}$$

Lorsque $i=N-1$, ce lemme assure l'existence d'une solution dans $\mathscr{A}(I)^{-1}$ de l'équation (6.3.1).

Démonstration. D'après (6.3.3,1), (6.3.4,1) et (6.3.5,1), $\tilde{u}_1=u_1$ appartient à $\mathscr{A}([a_0,a_2])^{-1}$ et satisfait à (6.3.6,1) et (6.3.7,1).

De plus, si $i\in\{1,\ldots,N-2\}$ et si $\tilde{u}_i\in\mathscr{A}([a_0,a_{i+1}])^{-1}$ satisfait à (6.3.6, i) et (6.3.7,i), alors, d'après le corollaire 5.4.6, il existe $f\in\mathcal{O}^\infty([a_i,a_{i+2}])_0^{-1}$ et $g\in\mathcal{O}^\infty([a_0,a_{i+1}])_0^{-1}$ tels que l'égalité suivante soit vérifiée sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$:

$$f^{-1}\cdot g=u_{i+1}\cdot\tilde{u}_i^{-1}.$$

Il vient alors, toujours sur l'intervalle $[a_i,a_{i+1}]$:

$$f\cdot u_{i+1}=g\cdot\tilde{u}_i.$$

On définit donc un élément u_{i+1} de $\mathscr{A}([a_0,a_{i+2}])^{-1}$ en posant

$$\tilde{u}_{i+1}=g\cdot\tilde{u}_i\quad\text{sur}\quad[a_0,a_{i+1}]$$

et

$$\tilde{u}_{i+1}=f\cdot u_{i+1}\quad\text{sur}\quad[a_i,a_{i+2}].$$

Cet élément satisfait à (6.3.6, $i+1$), puisque

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{i+1}^{-1}\cdot\bar{\delta}\tilde{u}_{i+1}&=\tilde{u}_i^{-1}\cdot\bar{\delta}\tilde{u}_i=v\qquad\text{sur}\quad[a_0,a_{i+1}],\\&=u_{i+1}^{-1}\cdot\bar{\delta}u_{i+1}=v\quad\text{sur}\quad[a_i,a_{i+2}];\end{aligned}$$

En effet, $\bar{\delta}f=0$ et $\bar{\delta}g=0$.

Enfin, si $i+1<N-1$, il vient, sur $[a_{i+1}, a_{i+2}]$:

$$\begin{aligned} u_{i+2}\cdot\tilde{u}_{i+1}^{-1} &= u_{i+2}\cdot(f\cdot u_{i+1})^{-1} \\ &= (u_{i+2}\cdot u_{i+1}^{-1})\cdot f^{-1} \end{aligned}$$

et donc, d'après $(6.3.5, i+1)$ et la définition de f, la condition $(6.3.7,\ i+1)$ est aussi satisfaite. q.e.d.

6.4. *Fin de la démonstration du théorème* 4.4.1

Au numéro précédent, nous avons établi la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathscr{A}(I)^{-1} &\to \mathscr{A}(I) \\ u &\mapsto u^{-1}\cdot\bar{\delta}u. \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration du théorème 4.4.1, il reste à établir que π est non seulement surjective, mais encore admet une section continue. Cela fait l'objet de ce numéro.

Lemme 6.4.1. *Pour tout couple (u_1, u_2) d'éléments de $\mathscr{A}(I)^{-1}$, les assertions suivantes sont équivalentes:*
 i) $\pi(u_1)=\pi(u_2)$;
 ii) $u_2\in\mathscr{O}^{\infty}(I)^{-1}\cdot u_1$.

Démonstration. Cela découle immédiatement de l'identité

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(u_2\cdot u_1^{-1}) &= \bar{\delta}u_2\cdot u_1^{-1} - u_2\cdot u_1^{-1}\cdot\bar{\delta}u_1\cdot u_1^{-1} \\ &= u_2\cdot(u_2^{-1}\cdot\bar{\delta}u_2 - u_1^{-1}\cdot\bar{\delta}u_1)\cdot u_1^{-1}. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Lemme 6.4.2. *Pour tout $u\in\mathscr{A}(I)^{-1}$, il existe un voisinage Ω de $\pi(u)$ dans $\mathscr{A}(I)$ et une section continue σ de π définie sur Ω telle que $\sigma(\pi(u))=u$.*

Démonstration. Le lemme 6.1.3 assure l'existence d'une telle σ lorsque $u=1$. On ramène le cas général à ce cas particulier, au moyen de l'identité

$$\pi(vu)=\pi(u)+u^{-1}\pi(v)\,u.$$

On vérifie ainsi immédiatement que l'ouvert

$$\Omega=u^{-1}\cdot(\Omega_\eta+\pi(u))\cdot u$$

et l'application σ définie par

$$\sigma(x)=\mathscr{N}[u\cdot(x-\pi(u))\cdot u^{-1}]\cdot u$$

satisfont aux conditions requises. q.e.d.

Joints à la surjectivité de π, les deux lemmes précédents montrent que, si l'on munit $\mathscr{A}(I)^{-1}$ de l'action par multiplication à gauche de $\mathcal{O}^\infty(I)^{-1}$, alors

$$\pi\colon\ \mathscr{A}(I)^{-1} \to \mathscr{A}(I)$$

devient une $\mathcal{O}^\infty(I)^{-1}$-fibration principale, localement triviale. Or l'espace topologique $\mathscr{A}(I)$ est paracompact (puisque métrisable) et contractile, si bien que toute fibration principale localement triviale de base $\mathscr{A}(I)$ est triviale. En particulier, l'application π admet une section continue Φ_0 définie sur tout $\mathscr{A}(I)$. L'application

$$\Phi = \Phi_0(0)^{-1} \cdot \Phi$$

satisfait alors aux conclusions du théorème 4.4.1.

7. Applications aux algèbres produits croisés

Cette section est consacrée à la démonstration des résultats énoncés au n° 2.3.

7.1. Préliminaires

7.1.1. Soit $a \in \mathscr{C}(G;\mathbb{R}_+)$ une fonction sous-additive.

Proposition 7.1.1. *L'espace* $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ *est une sous-algèbre dense de* $L^1(G;B)$ *qui, munie de la norme* $\|\cdot\|_a$, *devient une algèbre de Banach.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}(G;B) &\to L^1(G;B) \\ \varphi &\mapsto e^a\varphi \end{aligned}$$

est bijective, envoie $\mathscr{C}_c(G;B)$ sur $\mathscr{C}_c(G;B)$ et est une isométrie lorsque $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ et $L^1(G;B)$ sont munies respectivement des normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_1$. Il en découle que $\mathrm{Exp}_a(G;B)$, muni de la norme $\|\cdot\|_a$, est un espace de Banach contenant $\mathscr{C}(G;B)$ comme sous-espace dense, puisqu'il en va ainsi de $L^1(G;B)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

La proposition 7.1.1 est maintenant une conséquence immédiate de l'énoncé suivant:

Lemme 7.1.2. *Pour tout couple* $(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathscr{C}_c(G;B)^2$, *on a*

$$\|\varphi_1 * \varphi_2\|_a \leqq \|\varphi_1\|_a\,\|\varphi_2\|_a.$$

Démonstration. Il vient:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 * \varphi_2\|_a &= \int_G e^{a(g)} \Big\| \int_G \varphi_1(h)\cdot\beta_h\varphi_2(h^{-1}g)\,dh \Big\|\,dg \\ &\leqq \int_{G\times G} e^{a(g)} \|\varphi_1(h)\|\,\|\varphi_2(h^{-1}g)\|\,dh\,dg \\ &\leqq \int_{G\times G} e^{a(h_1h_2)} \|\varphi_1(h_1)\|\,\|\varphi_2(h_2)\|\,dh_1\,dh_2 \\ &\leqq \int_G e^{a(h_1)}\|\varphi_1(h_1)\|\,dh_1 \cdot \int_G e^{a(h_2)}\|\varphi_2(h_2)\|\,dh_2 \\ &= \|\varphi_1\|_a\,\|\varphi_2\|_a \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Remarque 7.1.2. On vérifie immédiatement que, si a et b sont deux fonctions sous-additives de G vers $\mathbb{R}_+$ et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $g \in G$, $a(g) \leqq b(g)+M$, alors $\mathrm{Exp}_b(G;B)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ et le morphisme d'inclusion $\mathrm{Exp}_b(G;B) \to \mathrm{Exp}_a(G;B)$ est continu.

7.1.3. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}_0(G;B) \cap L^1(G;B)$ de $L^1(G;B)$. Muni de la norme $|||\cdot|||$ définie par

$$|||\varphi||| = \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_1 = \sup_{g \in G} \|\varphi(g)\| + \int_G \|\varphi(g)\| \, dg,$$

c'est un espace de Banach. On vérifie aisément qu'il contient $\mathscr{C}_c(G;B)$ comme sous-espace dense.

Lemme 7.1.3. *Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in L^1(G;B)$. Si φ_2 appartient à $\mathscr{C}_0(G;B)$, alors $\varphi_1 * \varphi_2$ appartient à $\mathscr{C}_0(G;B)$ et*

$$\|\varphi_1 * \varphi_2\|_\infty \leqq \|\varphi_1\|_1 \, \|\varphi_2\|_\infty . \tag{7.1.1}$$

Démonstration. Il suffit d'établir l'inégalité (7.1.1) lorsque φ_1 et φ_2 appartiennent à $\mathscr{C}_c(G;B)$. Or, il vient alors, pour tout $g \in G$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 * \varphi_2(g)\| &= \Big\| \int_G \varphi_1(h)\, \beta_h\, \varphi_2(h^{-1}g)\, dh \Big\| \\ &\leqq \int_G \|\varphi_1(h)\| \, \|\varphi_2\|_\infty \, dh = \|\varphi\|_1 \, \|\varphi_2\|_\infty . \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de ce qui précède la proposition suivante:

Proposition 7.1.4. *L'espace $\mathscr{C}_0(G;B) \cap L^1(G;B)$ est un idéal à gauche (donc une sous-algèbre) dense de l'algèbre $L^1(G;B)$, qui, munie de la norme $\|\cdot\|$ devient une algèbre de Banach.*

Observons que la proposition A.2.8 s'applique ici et montre que *le morphisme d'inclusion*

$$\mathscr{C}_0(G;B) \cap L^1(G;B) \to L^1(G;B)$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Des considérations analogues s'appliquent à la sous-algèbre de $\mathrm{Exp}_a(G,B)$ formée des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}_0(G;B)$ telles que $e^a \varphi$ appartienne à $\mathscr{C}_0(G;B) \cap L^1(G;B)$, et permettent de formuler des variantes des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2 mettant en jeu ces sous-algèbres.

7.2. *Démonstration des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2*

7.2.1. Nous commençons par établir la proposition suivante au moyen du théorème 2.2.1; nous en déduirons ensuite les théorèmes 2.3.1 et 2.3.2.

Proposition 7.2.1. *Soit B une algèbre de Banach munie d'une action β d'un groupe localement compact G.*

Pout tout morphisme de groupes continu Φ: $G \to \mathbb{R}^n$, toute fonction convexe, positivement homogène et linéaire par morceaux L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et toute fonction continue sous-additive a: $G \to \mathbb{R}_+$, le morphisme d'inclusion

$$\mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B) \to \mathrm{Exp}_a(G;B)$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie.

Rappelons que l'on définit une bijection entre l'ensemble des fonctions convexes et positivement homogènes L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et l'ensemble des parties K de $\mathbb{R}^n$, compactes, convexes et contenant 0, en posant

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle \xi, x\rangle + L(x) \geqq 0\}. \tag{7.2.1}$$

On a alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$L(x) = \sup_{\xi \in K} -\langle \xi, x\rangle$$

et l'on dit que L est la *fonction d'appui* de K. La fonction L est linéaire par morceaux si et seulement si le compact K est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration de la proposition 7.2.1

Pour tout $f \in L^1(G;B)$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, nous définissons un élément $\alpha_\xi f$ de $L^1(G;B)$ en posant

$$\alpha_\xi f(g) = e^{i\langle \xi, \Phi(g)\rangle} f(g).$$

On vérifie immédiatement que α_ξ est un automorphisme de l'algèbre $L^1(G;B)$ et que, pour tout $(\xi, \xi') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\alpha_\xi \circ \alpha_{\xi'} = \alpha_{\xi+\xi'}.$$

Il est clair que $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ est stable par α_ξ et que α_ξ détermine un automorphisme isométrique de l'algèbre de Banach $(\mathrm{Exp}_a(G;B), \|\cdot\|_a)$. De plus, pour tout $f \in \mathrm{Exp}_a(G;B)$, l'application $(\xi \mapsto \alpha_\xi f)$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ est continue, d'après le théorème de convergence dominée. Nous disposons ainsi d'une action $\alpha = (\alpha_\xi)_{\xi \in \mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Exp}_a(G;B)$.

Soit K la partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ dont L est la fonction d'appui. D'après le théorème 2.2.1 (ou plutôt sa généralisation au cas où K est éventuellement d'intérieur vide, *cf.* n° 3.1), il suffit, pour établir la proposition 7.2.1, de montrer que les algèbres $\mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$ et $\mathcal{O}(\mathrm{Exp}_a(G;B), \alpha, K)$ coïncident et que les normes $\|\cdot\|_{a+L\circ\Phi}$ et $\|\cdot\|_K := \|\cdot\|_{\mathrm{Exp}_a(G;B), \alpha, K}$ sur cette algèbre sont équivalentes.

D'après la définition de K, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n + iK$ et tout $g \in G$, on a

$$|e^{a(g)} e^{i\langle \xi, \Phi(g)\rangle}| \leqq e^{a(g) + L\circ\Phi(g)}.$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$, on définit un élément f_ξ de $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ en posant

$$f_\xi(g) = e^{i\langle\xi,\Phi(g)\rangle} f(g).$$

De plus, il découle du théorème de convergence dominée que l'application $(\xi \mapsto f_\xi)$ de $\mathbb{R}^n + iK$ vers $\mathrm{Exp}_a(G;B)$ est continue et «prolonge analytiquement» l'application $(\xi \mapsto \alpha_\xi f)$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathrm{Exp}_a(G;B)$. Cela montre que $\mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$ est inclus dans $\mathcal{O}(\mathrm{Exp}_a(G;B), \alpha, K)$.

Soit F une partie finie de $\mathbb{R}^n$ dont K est l'enveloppe convexe. Comme toute fonction continue convexe sur K prend ses valeurs maxima en des points de F, il vient, si $f \in \mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$

$$\begin{aligned}\|f\|_{a+L\circ\Phi} &= \int_G \|f(g)\|\, e^{a(g)+L\circ\Phi(g)}\, dg \\ &= \int_G \|f(g)\| \sup_{\xi\in F} e^{a(g)-\langle\xi,\Phi(g)\rangle}\, dg\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|f\|_K &= \sup_{\xi\in K} \int_G \|f(g)\|\, e^{a(g)-\langle\xi,\Phi(g)\rangle}\, dg \\ &= \sup_{\xi\in F} \int_G \|f(g)\|\, e^{a(g)-\langle\xi,\Phi(g)\rangle}\, dg.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\|f\|_K \leqq \|f\|_{a+L\circ\Phi} \leqq (\mathrm{Card}\, F)\, \|f\|_K.$$

Pour établir que les algèbres $\mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$ et $\mathcal{O}(\mathrm{Exp}_a(G;K), \alpha, K)$ coïncident, il suffit maintenant de prouver que la première d'entre elles est dense dans la seconde. Cela découle du fait que les fonctions de $L^1(G;B)$ à support compact appartiennent à $\mathrm{Exp}_{a+L\circ\Phi}(G;B)$ et sont denses dans $\mathcal{O}(\mathrm{Exp}_a(G;K), \alpha, K)$, comme le montre aisément un raisonnement par troncature. q.e.d.

7.2.2. Démonstration du théorème 2.3.1

Choisissons une fonction convexe, positivement homogène et linéaire par morceaux $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que $H \leqq L$: par exemple si $R \in \mathbb{R}_+$ est suffisamment grand, la fonction définie par

$$L(x) = R \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

convient. Considérons alors le diagramme suivant, dont les flèches sont des injections continues d'algèbres de Banach (*cf.* Remarque 7.1.2):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Exp}_{H\circ\Phi+L\circ\Phi}(G;B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{Exp}_{L\circ\Phi}(G;B) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Exp}_{H\circ\Phi}(G;B) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hookleftarrow] & L^1(G;B). \end{tikzcd}$$

Le carré et les triangles de ce diagramme sont commutatifs; de plus, les flèches verticales déterminent des isomorphismes forts en K-théorie, d'après la proposition 7.2.1. Cela entraîne que les flèches horizontales déterminent des isomorphismes forts en K-théorie. q.e.d.

7.2.3. *Démonstration du théorème 2.3.2*

Il existe, par hypothèse, une suite exacte de groupes topologiques

$$\{1\} \to K \to G \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q \to \{1\}$$

où K est un groupe compact. Notons Φ le morphisme de G vers $\mathbb{R}^{p+q}$ obtenu par composition de π et du morphisme d'inclusion $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^{p+q}$ et posons, si $R \in \mathbb{R}_+$

$$H_R\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}_+$$
$$(x_i)_{1 \leqq i \leqq p+q} \mapsto R \sum_{i=1}^{p+q} |x_i|.$$

On vérifie facilement que, si l'on choisit

$$R = \sup a[\Phi^{-1}([-1,1]^{p+q})],$$

alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $g \in G$

$$a(g) \leqq H_R \circ \Phi(g) + M.$$

On peut alors considérer le diagramme suivant, dont les flèches sont des injections continues d'algèbres de Banach (*cf.* Remarque 7.1.2):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Exp}_{a+H_R\circ\Phi}(G;B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{Exp}_{H_R\circ\Phi}(G;B) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Exp}_a(G;B) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hookleftarrow] & L^1(G;B). \end{tikzcd}$$

Le carré et les triangles de ce diagramme sont commutatifs; de plus les flèches verticales déterminent des isomorphismes forts en K-théorie, d'après la proposition 7.2.1. Cela entraîne que les flèches horizontales déterminent des isomorphismes forts en K-théorie.

7.3. *Démonstration du théorème 2.3.3*

7.3.1. *Démonstration de* a). Pour tout $g \in G$, on définit un multiplicateur U_g de $L^1(G; B)$ en posant

$$(\varphi * U_g)(h) = \varphi(h-g)$$
$$(U_g * \varphi)(h) = \beta_g[\varphi(h-g)],$$

quel que soit $\varphi \in L^1(G; B)$.

Soit $\hat{G}$ le groupe dual de G. On vérifie immédiatement que l'on définit une action $\hat{\beta}$ – appelée *action duale* – de $\hat{G}$ sur l'algèbre de Banach $L^1(G; B)$ en posant

$$(\hat{\beta}_\chi \varphi)(g) = \chi(g)\,\varphi(g).$$

Observons que, comme G, $\hat{G}$ est un groupe abélien élémentaire.

Notons A l'algèbre de Banach $L^1(G; B)$ et, pour tout $a \in A$, posons

$$\Phi_a \colon \hat{G} \times G \times G \to A$$
$$(\chi, g_1, g_2) \mapsto \hat{\beta}_\chi(U_{g_1} * a * U_{g_2}).$$

Lemme 7.3.1. *L'ensemble des éléments a de A tels que l'application Φ_a soit C^∞ est une sous-algèbre pleine*[16] $\mathscr{A}$ *de A. Munie de la topologie la moins fine rendant continue l'application*

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &\to \mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G; A) \cong \mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G) \hat{\otimes} A \\ a &\mapsto \Phi_a, \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

l'algèbre $\mathscr{A}$ devient une bonne algèbre de Fréchet.

Démonstration. L'application (7.3.1) identifie $\mathscr{A}$ au sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G; A)$ formé des applications Φ telles que

$$\Phi(\chi, g_1, g_2) = \hat{\beta}_\chi(U_{g_1} * \Phi(0,0,0) * U_{g_2}).$$

Comme $\mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G; A)$ est un espace de Fréchet, cela montre que la topologie initiale sur $\mathscr{A}$ définie par (7.3.1) est une topologie d'espace de Fréchet.

L'identité

$$\Phi_{ab}(\chi, g_1, g_2) = \Phi_a(\chi, g_1, 0) * \Phi_b(\chi, 0, g_2)$$

---

[16] Rappelons que cela signifie que tout élément de $\tilde{\mathscr{A}}$ inversible dans $\tilde{A}$ est inversible dans $\tilde{\mathscr{A}}$.

entraîne que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de A et que la structure d'algèbre ainsi définie sur $\mathscr{A}$ est compatible avec sa topologie.

Soit $a \in \mathscr{A}$ tel que $1+a$ soit inversible dans $\tilde{A}$. Si l'on pose $(1+a)^{-1}=1+b$, il vient, par un calcul facile:

$$\Phi_b(\chi, g_1, g_2) = -\Phi_a(\chi, g_1, g_2) + \Phi_a(\chi, g_1, 0) * (1+\hat{\beta}_\chi a)^{-1} * \Phi_a(\chi, 0, g_2),$$

tandis que $\hat{\beta}_\chi a = \Phi_a(\chi, 0, 0)$. Ces identités montrent que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre pleine de A et une bonne algèbre topologique. q.e.d.

Notons A_0 l'algèbre de Banach $L^1(G; B) \cap \mathscr{C}_0(G; B)$ (*cf.* 7.1.3).

La proposition suivante généralise la caractérisation de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ comme espace des vecteurs C^∞ de la représentation de Schrödinger du groupe de Heisenberg.

Proposition 7.3.2. *Soit $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

i) *a appartient à $\mathscr{A}$;*

ii) *Φ_a appartient à $\mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G; A_0)$;*

iii) *a appartient à $\mathscr{S}(G; B^\infty)$.*

La preuve de cette proposition fait l'objet du prochain numéro.

Corollaire 7.3.3. *En tant qu'algèbre topologique, $\mathscr{A}$ coïncide avec $\mathscr{S}(G; B^\infty)$.*

Démonstration. Cela découle de l'équivalence des assertions i) et iii) de la proposition 7.3.2 et du théorème du graphe fermé (remarquer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{S}(G; B^\infty)$ s'injectent continûment dans A). q.e.d.

Observons que $\mathscr{S}(G; B^\infty)$ est un sous-espace dense de $L^1(G; B)$. En effet, on peut identifier $\mathscr{S}(G; B^\infty)$ à $\mathscr{S}(G) \hat{\otimes}_\pi B^\infty$ et $L^1(G; B)$ à $L^1(G) \hat{\otimes}_\pi B$, tandis que $\mathscr{S}(G)$ est dense dans $L^1(G)$ et que B^∞ est dense dans B. En joignant cette remarque au lemme 7.3.1 et au corollaire 7.3.3, on obtient:

Proposition 7.3.4. *L'espace vectoriel $\mathscr{S}(G; B^\infty)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L^1(G; B)$ qui, munie de sa topologie d'espace de Fréchet, est une bonne algèbre topologique.*

Les assertions du théorème 2.3.3, a) découlent de cette proposition et du théorème A.2.1.

7.3.2. Démonstration de la proposition 7.3.2

i)$\Rightarrow$ii). Cette implication découle de la conjonction des deux lemmes suivants.

Lemme 7.3.5. *Soit N un entier naturel. Pour tout $a \in \mathscr{A}$ et tout $\psi \in \mathscr{C}_c^N(G)$, l'application $\Phi_{a*\psi}$ appartient à $\mathscr{C}^N(\hat{G} \times G \times G; A_0)$.*

Démonstration du lemme 7.3.5. Il vient, pour tout $(\chi, g_1, g_2) \in \hat{G} \times G \times G$

$$\Phi_{a*\psi}(\chi, g_1, g_2) = \Phi_a(\chi, g_1, 0) * \hat{\beta}_\chi(\psi * U_{g_1}).$$

Or l'application Φ_a appartient à $\mathscr{C}^\infty(\hat{G}\times G\times G; A)$ et l'application $((\chi, g_1)\mapsto\hat{\beta}_\chi(\psi * U_{g_1}))$ appartient à $\mathscr{C}^N(\hat{G}\times G; A_0)$. Le lemme découle donc du lemme 7.1.3. q.e.d.

Lemme 7.3.6. *Soit $a\in\mathscr{A}$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe a_1, a_2 dans $\mathscr{A}$ et ψ_1, ψ_2 dans $\mathscr{C}_c^N(G)$ tels que*

$$a=a_1*\psi_1+a_2*\psi_2.$$

Démonstration du lemme 7.3.6. Soit D un opérateur différentiel invariant par translation sur G et soit p son ordre. Si $a\in A$ et si l'application $(g\mapsto U_g*a)$ (resp. $(g\mapsto a*U_g)$) de G vers A est de classe C^p, nous poserons:

$$D*a=D_g(a*U_g)_{|g=0}(\in A) \tag{7.3.2}$$

$$a*D=D_g(U_g*a)_{|g=0} \tag{7.3.3}$$

On vérifie aisément que, si ψ appartient à $\mathscr{C}_c^p(G)$, alors

$$(a*D)*\psi=a*D\psi \tag{7.3.4}$$

$$\psi*(D*a)=D a*\psi \tag{7.3.5}$$

De plus, si ψ_1 et ψ_2 appartiennent à $\mathscr{C}_c(G)$ et satisfont à l'égalité de distributions

$$D\psi_1+\psi_2=\delta_0, \tag{7.3.6}$$

alors

$$(a*D)*\psi_1+a*\psi_2=a \tag{7.3.7}$$

$$\psi_1*(D*a)+\psi_2*a=a. \tag{7.3.8}$$

En effet, il découle de (7.3.4) que, pour toute $\psi\in\mathscr{C}_c^\infty(G)$, l'identité déduite de (7.3.7) par multiplication (à droite) de ses deux membres par ψ est satisfaite. On établit de même (7.3.8).

Si a appartient à $\mathscr{A}$, alors $D*a$ et $a*D$ sont bien définis. De plus, on a

$$\begin{aligned}\Phi_{a*D}(\chi, g_1, g_2)&=D_h[\hat{\beta}_\chi(U_{g_1}*a*U_h*U_{g_2})]_{|h=0}\\&=D_h\,\Phi_a(\chi, g_1, g_2+h)_{|h=0}\end{aligned}$$

et

$$\Phi_{D*a}(\chi, g_1, g_2)=D_h\,\Phi_a(\chi, g_1+h, g_2)_{|h=0}.$$

Ainsi, Φ_{a*D} et Φ_{D*a} appartiennent à $\mathscr{C}^\infty(\hat{G}\times G\times G; A)$ et donc $a*D$ et $D*a$ appartiennent à $\mathscr{A}$.

Soient N un entier naturel et a un élément de $\mathscr{A}$. Il existe un opérateur différentiel D invariant par translation sur G et des fonctions ψ_1 et ψ_2 dans $\mathscr{C}_c^N(G)$ telles que l'identité (7.3.6) soit satisfaite: il suffit de le montrer lorsque $G=\mathbb{R}^n$; dans ce cas, on peut prendre, par exemple, pour D l'opérateur $\left(1-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^p$, où $p>\frac{1}{2}(N+n)$, et pour ψ_1 le produit d'une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

valant 1 au voisinage de 0 et de la transformée de Fourier inverse de la fonction $\left(1+\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{-p}$ sur $\mathbb{R}^n$. Il vient alors, d'après (7.3.7)

$$a=a_1*\psi_1+a_2*\psi_2$$

où $a_1=a*D$ et $a_2=a$ appartiennent à $\mathscr{A}$. q.e.d.

ii)$\Rightarrow$iii). Rappelons que pour tout opérateur différentiel invariant D sur $\hat{G}$, il existe une fonction polynomiale P_D sur $\hat{G}$ telle que

$$D_\chi\,\chi(g)=P_D(g)\,\chi(g) \tag{7.3.9}$$

et que l'application $D\mapsto P_D$ établit une bijection entre opérateurs différentiels invariants sur $\hat{G}$ et fonctions polynomiales sur G. Nous noterons χ_0 le caractère trivial de G.

Supposons que Φ_a appartienne à $\mathscr{C}^\infty(\hat{G}\times G\times G;A_0)$. Pour tout opérateur différentiel D invariant par translation sur $\hat{G}$, l'application

$$\begin{gathered} G\times G\to\mathscr{C}_0(G;B)\\ (g_1,g_2)\mapsto[D_\chi\,\Phi_a(\chi,g_1,g_1+g_2)]_{\chi=\chi_0} \end{gathered}$$

est alors de classe C^∞. Or on a

$$[D_\chi\,\Phi_a(\chi,g_1,g_1+g_2)]_{\chi=\chi_0}(g)=P_D(g)\,\beta_{g_1}[a(g_2+g)].$$

Par conséquent, pour tout opérateur différentiel D' invariant par translation sur G, l'application $(g\mapsto P_D(g)\cdot D'a(g))$ appartient à $\mathscr{C}_0(G;B^\infty)$. Cela montre que a appartient à $\mathscr{S}(G;B^\infty)$.

iii)$\Rightarrow$i). Il vient, pour tout $a\in A$

$$\Phi_a(\chi,g_1,g_2)(g)=\chi(g)\,\beta_{g_1}[a(g_2-g_1+g)].$$

Lorsque a appartient à $\mathscr{S}(G;B^\infty)$, cette dernière expression est de classe C^∞ en χ, g_1 et g_2 et ses dérivées d'ordre donné par rapport aux variables χ, g_1 et g_2 ont leur norme dans B uniformément bornée par une fonction de g dans $L^1(G)$. Par conséquent, Φ_a définit une fonction de classe C^∞de $\hat{G}\times G\times G$ vers $L^1(G;B)=A$. q.e.d.

7.3.3. *Démonstration de* b)

Supposons maintenant que B soit une C^*-algèbre et que les automorphismes β_g soient des automorphismes d'algèbre involutive. Rappelons quelques propriétés de la C^*-algèbre produit croisé $B\rtimes_\beta G$ (*cf.* [P]):

i) Pour tout $g\in G$, le multiplicateur U_g de $L^1(G;B)$ se prolonge par continuité en un multiplicateur de $B\rtimes_\beta G$, que nous noterons encore U_g.

ii) Pour tout $\chi \in \hat{G}$, l'automorphisme $\hat{\beta}_\chi$ est un automorphisme de l'algèbre de Banach involutive $L^1(G;B)$ et se prolonge donc en un automorphisme de la C^*-algèbre $B \rtimes_\beta G$. On définit ainsi une action $\hat{\beta}$ de $\hat{G}$ sur $B \rtimes_\beta G$.

iii) Soient φ_1 et φ_2 des éléments de $L^2(G)$. L'application

$$\begin{aligned} L^1(G;B) &\to \mathscr{C}_0(G;B) \\ \psi &\mapsto \varphi_1 * \psi * \varphi_2 \end{aligned}$$

se prolonge par continuité à $B \rtimes_\beta G$. Plus précisément, on dispose de l'inégalité suivante (conséquence de [P], 7.7.5 et 7.7.7) pour tout $\psi \in L^1(G;B)$:

$$\|\varphi_1 * \psi * \varphi_2\|_\infty \leqq \|\psi\|_{C^*} \|\varphi_1\|_{L^2} \|\varphi_2\|_{L^2}, \tag{7.3.10}$$

où $\|\cdot\|_{C^*}$ désigne la norme de C^*-algèbre de $B \rtimes_\beta G$.

Nous allons montrer que si A désigne l'algèbre $B \rtimes_\beta G$, le lemme 7.3.1, la proposition 7.3.2 et le corollaire 7.3.3 restent vrais, l'algèbre $\mathscr{A}$ étant maintenant définie comme l'ensemble des éléments a de $B \rtimes_\beta G$ tels que Φ_a appartienne à $\mathscr{C}^\infty(\hat{G} \times G \times G; B \rtimes_\beta G)$. Comme $\mathscr{S}(G; B^\infty)$ est un sous-espace dense de $B \rtimes_\beta G$, puisque c'est un sous-espace dense de $L^1(G,B)$, lui même dense dans $B \rtimes_\beta G$, il en découlera que la proposition 7.3.4 est elle-aussi encore vraie si l'on y substitue $B \rtimes_\beta G$ à $L^1(G,B)$. Grâce au théorème A.2.1, cela démontrera le théorème 2.3.3, b).

Avec cette nouvelle définition de $\mathscr{A}$, les démonstrations du lemme 7.3.1 et du corollaire 7.3.3 restent valables sans aucune modification, de même évidemment que la démonstration de l'implication ii)$\Rightarrow$iii) dans la proposition 7.3.2. L'implication iii)$\Rightarrow$i) découle de la même implication dans le cas où $A = L^1(G;B)$, puisque $L^1(G;B)$ s'injecte continûment dans $B \rtimes_\beta G$. L'implication i)$\Rightarrow$ii) découle de la conjonction des deux lemmes suivants:

Lemme 7.3.7. *Soient $N \in \mathbb{N}$, $a \in B \rtimes_\beta G$ et φ, $\varphi' \in \mathscr{C}_c^N(G)$. Si l'application*

$$\begin{aligned} \hat{G} &\to B \rtimes_\beta G \\ \chi &\mapsto \hat{\beta}_\chi a \end{aligned}$$

est de classe C^{N+d+1}, où d désigne la dimension du groupe de Lie $\hat{G}$, alors $\Phi_{\varphi * a * \varphi'}$ appartient à $C^N(\hat{G} \times G \times G; A_0)$.

Lemme 7.3.8. *Soit $a \in \mathscr{A}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $a_i \in \mathscr{A}$ et φ_i, $\varphi_i' \in \mathscr{C}_c^N(G)$, $1 \leqq i \leqq 4$, tels que*

$$a = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i * a_i * \varphi_i'.$$

La démonstration du lemme 7.3.7 repose sur le résultat suivant:

Lemme 7.3.9. *Soient φ, $\varphi' \in \mathscr{C}_c(G)$ et $a \in B \rtimes_\beta G$. Si l'application*

$$\begin{aligned} \hat{G} &\to B \rtimes_\beta G \\ a &\mapsto \hat{\beta}_\chi a \end{aligned}$$

est de classe C^{d+1}, alors $\varphi * a * \varphi'$ appartient à A_0. De plus, pour toute base $(X_1, \dots, X_d)$ de l'algèbre de Lie de $\hat{G}$ (considérée comme espace d'opérateurs différentiels sur $\hat{G}$) et pour toute partie compacte K de G, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, si

$$\operatorname{supp} \varphi \subset K \quad et \quad \operatorname{supp} \varphi' \subset K,$$

alors[17]

$$|||\varphi * a * \varphi'||| \leqq C \|\varphi\|_{L^2} \|\varphi'\|_{L^2} \left[\|a\|_{C^*} + \sum_{i=1}^{d+1} \|X_i^{d+1} (\chi \mapsto \hat{\beta}_\chi a)_{|\chi=0}\|_{C^*} \right]. \tag{7.3.11}$$

Démonstration du lemme 7.3.9. Observons que l'algèbre des éléments de $L^1(G; B)$ de classe C^{d+1} sous l'action $\hat{\beta}$ est dense dans l'algèbre de Banach des éléments de $B \rtimes_\beta G$ de classe C^{d+1} sous l'action $\hat{\beta}$: on établit cela en approchant un élément de ce dernier espace par un élément de $L^1(G; B)$, puis en «régularisant celui-ci par convolution», comme au n° 3.2. Par conséquent, il suffit d'établir l'inégalité (7.3.11) lorsque $(\chi \mapsto \beta_\chi a)$ appartient à $\mathscr{C}^{d+1}(\hat{G}; L^1(G; B))$. Dans ce cas[18], c'est une conséquence immédiate de l'inégalité (7.3.10) et du fait que si b appartient à $\mathscr{C}_0(G; B)$ et si $(\chi \mapsto \hat{\beta}_\chi b)$ appartient à $\mathscr{C}^{d+1}(\hat{G}; \mathscr{C}_0(G; B))$, alors b appartient à $L^1(G; B)$ et

$$\|b\|_1 \leqq M \left[\|b\|_\infty + \sum_{i=1}^{d} \|X_i^{d+1} (\chi \mapsto \hat{\beta}_\chi b)\|_\infty \right],$$

où M désigne une constante positive indépendante de b. Cette dernière égalité découle à son tour du fait que, avec la notation (7.3.9), la fonction $\left[1 + \sum_{i=1}^{d} |P_{X_i^{d+1}}| \right]^{-1}$ appartient à $L^1(G)$. q.e.d.

Démonstration du lemme 7.3.7. Le lemme 7.3.7 découle du lemme 7.3.9 et de l'identité suivante:

$$\Phi_{\varphi * a * \varphi'}(\chi, g_1, g_2) = \hat{\beta}_\chi(U_{g_1} * \varphi) * \hat{\beta}_\chi(a) * \hat{\beta}_\chi(\varphi' * U_{g_2}).$$

En effet, les applications

$$(\chi, g_1) \mapsto \hat{\beta}_\chi(U_{g_1} * \varphi) \quad \text{et} \quad (\chi, g_2) \mapsto \hat{\beta}_\chi(\varphi' * U_{g_2})$$

appartiennent à $\mathscr{C}^N(\hat{G} \times G; L^2(G))$; les supports de $\hat{\beta}_\chi(U_{g_1} * \varphi)$ et $\hat{\beta}_\chi(\varphi' * U_{g_2})$ sont inclus dans un compact fixe de G lorsque g_1 et g_2 décrivent un compact; enfin, l'application

$$(\chi \mapsto (\chi' \mapsto \hat{\beta}_{\chi'} \circ \hat{\beta}_\chi(a))$$

appartient à $\mathscr{C}^N(\hat{G}; \mathscr{C}^{d+1}(\hat{G}; B \rtimes_\beta G))$. q.e.d.

---

[17] Rappelons que $|||\cdot|||$ désigne la norme $\|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_1$ sur A_0.

[18] La réduction à ce cas particulier n'aurait pas été nécessaire si l'on avait précédemment établi que $B \rtimes_\beta G$ s'identifie à un sous-espace d'un espace de distributions à valeurs vectorielles sur G contenant $\mathscr{C}_0(G; B)$.

Démonstration du lemme 7.3.8. Nous suivons une méthode analogue à celle utilisée pour établir le lemme 7.3.4.

On vérifie aisément que, avec notre nouvelle définition de $\mathscr{A}$, les formules (7.3.2) et (7.3.3) définissent des éléments $a*D$ et $D*a$ de $\mathscr{A}$ pour tout élément a de $\mathscr{A}$ et tout opérateur différentiel D invariant par translation sur G, et que l'égalité (7.3.6) entraîne encore les égalités (7.3.7) et (7.3.8).

Choisissons donc un opérateur différentiel D invariant par translation et ψ_1, ψ_2 dans $\mathscr{C}_c^N(G)$ tels que

$$D\psi_1 + \psi_2 = \delta_0.$$

D'après ce qui précède, on dispose alors de l'identité suivante, qui établit le lemme:

$$\begin{aligned} a = \psi_1 * [D*(a*D)] * \psi_1 + \psi_2 * (a*D) * \psi_1 \\ + \psi_1 * (D*a) * \psi_2 + \psi_2 * a * \psi_2. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

8. Applications à la géométrie différentielle non commutative

Dans cette section, nous présentons deux applications du théorème 2.2.1 à la géométrie différentielle non commutative au sens de Connes (*cf.* [Co2], [Co3]), afin d'illustrer l'usage des critères de comparaison en K-théorie, discuté dans l'introduction. Ces applications ne sont discutées ici que brièvement, quoiqu'elles soient susceptibles de nombreux développements, sur lesquels nous comptons revenir plus tard.

8.1. La classe fondamentale transverse associée à une action de $\mathbb{Z}^n$ sur une variété (cf. [Co3])

Dans ce numéro, nous utilisons les notions de n-cocycle cyclique et de n-trace définies par Connes dans [Co2] et [Co3]. En particulier, nous faisons appel aux faits qu'un cocycle cyclique peut être défini au moyen d'un morphisme vers une algèbre différentielle graduée munie d'une trace graduée fermée et qu'un n-cocycle sur une algèbre A (resp. une n-trace sur une algèbre de Banach A) détermine un morphisme de $K_{\bar{n}}(A)$ vers $\mathbb{C}$, si $\bar{n}$ désigne la classe de n modulo 2.

Soit V une variété différentiable compacte orientée de dimension n et soit Γ un groupe discret agissant sur V par difféomorphismes préservant l'orientation. Rappelons une construction due à Connes ([Co3]).

L'action de Γ sur V détermine naturellement une action de Γ sur $\mathscr{C}^\infty(V)$ et sur $\mathscr{C}(V)$. On peut donc considérer les algèbres produits croisés $\mathscr{C}_c(\Gamma;\mathscr{C}(V))$ $(\cong \mathscr{C}_c(V\times\Gamma))$, $l^1(\Gamma;\mathscr{C}(V))$ et $\mathscr{C}(V) \rtimes_{\mathrm{red}} \Gamma$. L'algèbre $\mathscr{C}_c(\Gamma;\mathscr{C}(V))$ contient $\mathscr{C}_c^\infty(V \times \Gamma)$ comme sous-algèbre dense; nous la noterons aussi $\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma$, car elle s'identifie au produit croisé «algébrique» de $\mathscr{C}^\infty(V)$ par Γ, formé des applications de support fini de Γ dans $\mathscr{C}^\infty(V)$. Soit $\Omega^i(V)$ l'espace des formes différentielles

C^∞ de degré i sur V. L'action naturelle de Γ sur l'algèbre graduée $\Omega^*(V)$ commute avec la différentiation extérieure d et laisse invariante la «classe fondamentale»

$$\begin{aligned} \Omega^n(V) &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \int_V \omega. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'algèbre graduée produit croisé $\Omega^*(V) \rtimes_f \Gamma$ devient une algèbre différentielle graduée si on la munit de la dérivation d définie par

$$(d\omega)(\cdot, \gamma) = d(\omega(\cdot, \gamma)) \qquad (\gamma \in \Gamma),$$

et l'application

$$\begin{aligned} \int: \ \Omega^n(V) \rtimes_f \Gamma &\to \mathbb{C} \\ \omega &\mapsto \int_V \omega(\cdot, e) \end{aligned}$$

est une trace graduée fermée sur cette algèbre différentielle graduée. Nous noterons τ le n-cocycle cyclique sur $\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma$ définie par $(\Omega^*(V) \rtimes_f \Gamma, \int)$. Explicitement, pour tout $(f^0, f^1, \ldots, f^n) \in (\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma)^{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} \tau(f^0, f^1, \ldots, f_n) &= \int f^0 df^1 \ldots df^n \\ &= \sum_{\substack{\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \Gamma \\ \gamma_0 \ldots \gamma_n = e}} \int_V f^0(\cdot, \gamma^0) \cdot \gamma_0^{-1*} df^1(\cdot, \gamma_1) \wedge (\gamma_0 \gamma_1)^{-1*} df^2(\cdot, \gamma_2) \\ &\quad \wedge \ldots \wedge (\gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_{n-1})^{-1*} df^n(\cdot, \gamma_n). \end{aligned}$$

Munissons V d'une métrique riemannienne $\|\cdot\|$ et posons pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$a_0(\gamma) = \log \sup \{ \|\gamma^{-1*} \xi\| ; \xi \in T^* V, \|\xi\| = 1 \}.$$

On vérifie aisément que a_0 est une fonction sous-additive de Γ vers $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $(b^1, \ldots, b^n)$ dans $(\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma)^n$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(x^1, \ldots, x^n) \in (\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma)^n$, on ait

$$\left| \int x^1 \cdot db^1 \cdot x^2 \cdot db^2 \ldots x^n \cdot db^n \right| \leqq C \prod_{i=1}^n \|x^i\|_{(n-i+1)a_0},$$

où $\|\cdot\|_{(n-i+1)a_0}$ désigne la norme sur l'algèbre de Banach $\mathrm{Exp}_{(n-i+1)a_0}(\Gamma; \mathscr{C}(V))$. En particulier, pour toute fonction sous-additive a: $\Gamma \to \mathbb{R}_+$ telle que $a \geqq n a_0$, le n-cocycle cyclique τ sur $\mathscr{C}^\infty(V) \rtimes_f \Gamma$ définit une n-trace sur l'algèbre de Banach $\mathrm{Exp}_a(\Gamma; \mathscr{C}(V))$ et donc un morphisme de groupes

$$K_{\bar{n}}(\mathrm{Exp}_a(\Gamma; \mathscr{C}(V))) \to \mathbb{C} \qquad (\bar{n} \equiv n \bmod 2).$$

Lorsque l'injection

$$\mathrm{Exp}_a(\Gamma; \mathscr{C}(V)) \to \mathscr{C}(V) \rtimes_{\mathrm{red}} \Gamma$$

détermine un isomorphisme en K-théorie, par exemple lorsque Γ est un groupe abélien de type fini (théorème 2.3.2 et corollaire 2.3.4), nous obtenons par composition un morphisme de groupes

$$K_{\bar{n}}(\mathscr{C}(V) \rtimes_{\mathrm{red}} \Gamma) \to \mathbb{C}.$$

Ce morphisme joue le rôle d'une classe fondamentale pour «l'espace non commutatif V/Γ» (comparer à [Co 3], § 5 et 6).

8.2. L'indice d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre nul transversalement elliptique relativement à une action de $\mathbb{R}^n$

8.2.1. *L'application «indice» associée à un pré-module de Fredholm sur une algèbre produit croisé.*

a) Soit B une algèbre de Banach, munie d'une action β (fortement continue et isométrique) d'un groupe abélien localement compact G. Soient de plus $\mathscr{H} = \mathscr{H}^+ \oplus \mathscr{H}^-$ un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué et $\mathscr{L}_0(\mathscr{H}) = \mathscr{L}(\mathscr{H}^+) \oplus \mathscr{L}(\mathscr{H}^-)$ la C^*-algèbre des endomorphismes bornés de degré 0 de $\mathscr{H}$, et soient

$$\varphi\colon\; B \to \mathscr{L}_0(\mathscr{H})$$

un morphisme d'algèbres de Banach et

$$\pi\colon\; G \to \mathscr{L}_0(\mathscr{H})$$

une représentation fortement continue (non nécessairement unitaire) de G dans $\mathscr{H}$.

Supposons que β, φ et π soient *compatibles*, c'est-à-dire que, pour tout $(g, b) \in G \times B$, on ait

$$\pi(g) \circ \varphi(b) = \varphi(\beta_g\, b) \circ \pi(g).$$

Pour toute fonction sous-additive $a \in \mathscr{C}(G; \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\text{pour tout } g \in G, \qquad e^{a(g)} \geqq \|\pi(g)\|, \tag{8.2.1}$$

on dispose alors d'un morphisme continu d'algèbres de Banach

$$\begin{aligned} \Phi\colon\; \mathrm{Exp}_a(G; B) &\to \mathscr{L}_0(\mathscr{H}) \\ f &\mapsto \int_G \varphi[f(g)]\, \pi(g)\, dg. \end{aligned}$$

Observons qu'il existe effectivement des fonctions sous-additives $a \in \mathscr{C}(G; \mathbb{R}_+)$ satisfaisant à (8.2.1). Cela découle des deux remarques suivantes:

(i) D'après la continuité forte de π et le théorème de Banach-Steinhaus, la fonction $\|\pi\|\colon g \mapsto \|\pi(g)\|$ est localement bornée sur G. De plus, $\|\pi\|$ est semi-continue inférieurement et, pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$, on a

$$\|\pi\|\,(g_1 g_2) \leqq \|\pi\|\,(g_1) \cdot \|\pi\|\,(g_2).$$

Ainsi, $\log \|\pi\|$ et donc $\max(0, \log \|\pi\|)$ sont des fonctions sous-additives boréliennes.

(ii) Pour toute fonction sous-additive borélienne a_0: $G \to \mathbb{R}_+$, il existe une fonction $a \in \mathscr{C}(G; \mathbb{R}_+)$ telle que $a \geqq a_0$. En fait, on peut même trouver une telle a telle que de plus $a - a_0$ soit bornée; comme on le vérifie aisément, il suffit de poser pour cela

$$a = \psi * a_0 + \int_G \psi(h)\, a_0(h)\, dh$$

où ψ est un élément de $\mathscr{C}_c(G; \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\int_G \psi(g)\, dg = 1.$$

b) Supposons de plus qu'il existe un opérateur $F \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ et une sous-algèbre dense $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}_c(G; B)$ tels que, lorsque $\mathscr{H}$ est muni de l'action de $\mathscr{C}$ définie par la restriction à $\mathscr{C}$ de Φ, le couple $(\mathscr{H}, F)$ soit un pré-module de Fredholm (pair) sur $\mathscr{C}$, au sens de [Co 2], p. 305, c'est-à-dire que

1) F soit un opérateur sur $\mathscr{H}$ de degré f impair, *i.e.* s'écrivent

$$F = \begin{bmatrix} 0 & F_- \\ F_+ & 0 \end{bmatrix},$$

où $F_+ \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_+, \mathscr{H}_-)$ et $F_- \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}_+)$;

2) pour tout $a \in \mathscr{C}$, $\Phi(a)(F^2 - 1)$ et $[F, \Phi(a)]$ soient des opérateurs de $\mathscr{L}(H)$ compacts.

Il découle immédiatement du fait que les opérateurs compacts de $\mathscr{H}$ forment un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ que, pour toute fonction sous-additive $a \in \mathscr{C}(G; \mathbb{R}_+)$ telle que $a \geqq \log \|\pi\|$, le couple $(\mathscr{H}, F)$ est un pré-module de Fredholm sur $\operatorname{Exp}_a(G; B)$. Pour toute a de ce type, on peut donc définir (*cf.* [Co 3], Proposition 5, p. 307) un morphisme de groupes

$$\operatorname{Ind}_{(\mathscr{H}, F)}\colon\ K_0(\operatorname{Exp}_a(G; B)^{\sim}) \to \mathbb{Z}, \tag{8.2.2}$$

en associant à la classe d'un idempotent e de $M_n(\operatorname{Exp}_a(G; B)^{\sim})$ l'indice de l'opérateur de Fredholm

$$[M_n(\tilde{\Phi})(e)] \cdot (F_+ \otimes \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n}) \in \mathscr{L}(E_+, E_-)$$

où

$$E_\pm = [M_n(\tilde{\Phi})(e)]\, (\mathscr{H}^\pm \otimes \mathbb{C}^n).$$

On observera que la construction précédente ne fait pas réellement intervenir le choix d'un produit scalaire hilbertien spécifique sur $\mathscr{H}$, mais seulement la structure d'espace vectoriel topologique (hilbertisable) de $\mathscr{H}$.

Par ailleurs, l'invariance par homotopie de l'indice d'un opérateur de Fredholm montre que, si pour tout $t \in [0, 1]$, F_t est un opérateur dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ tel que $(\mathscr{H}, F_t)$ soit un pré-module de Fredholm sur $\mathscr{C}$ et si l'application $(t \mapsto F_t)$

de [0, 1] vers $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est continue lorsque $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est muni de la topologie normique, alors le morphisme $\mathrm{Ind}_{(\mathscr{H}, F_t)}$ est indépendant de t.

c) Lorsque de plus G est un groupe abélien élémentaire, que B est une C^*-algèbre et que, pour tout $g \in G$, β_g est un automorphisme de C^*-algèbre, on peut composer le morphisme «indice» (8.2.2) avec les isomorphismes inverses des isomorphismes

$$K_0(\mathrm{Exp}_a(G; B)) \xrightarrow{\sim} K_0(L^1(G; B))$$

et

$$K_0(L^1(G; B)) \xrightarrow{\sim} K_0(B \rtimes_\beta G)$$

établis dans le théorème 2.3.2 et dans le corollaire 2.3.4, et l'on définit ainsi un morphisme «indice»

$$\mathrm{Ind}_{(\mathscr{H}, F)}\colon K_0(B \rtimes_\beta G) \to \mathbb{Z}.$$

Les constructions qui précèdent s'étendent, *mutatis mutandis*, aux modules de Fredholm impairs, et permettent d'associer à un pré-module de Fredholm impair sur $\mathscr{C}$ un morphisme «indice» à valeurs dans $\mathbb{Z}$ défini sur $K_1(\mathrm{Exp}_a(G; B))$ ou $K_1(B \rtimes_\beta G)$.

8.2.2. *L'indice d'un opérateur transversalement elliptique.*

a) Soit V une variété différentiable compacte munie d'une action de classe C^∞ d'un groupe de Lie G, et soient E^+ et E^- deux fibrés vectoriels de classe C^∞, G-équivariants, sur V.

L'action de G sur V, E^+ et E^- détermine naturellement une action de G sur $B = \mathscr{C}(V)$ et des représentations de G dans les espaces hilbertisables $L^2(E^+)$ et $L^2(E^-)$ des sections de classe L^2 de E^+ et E^-, compatibles avec l'action par multiplication de $\mathscr{C}(V)$ sur $L^2(E^+)$ et $L^2(E^-)$.

En posant $B = \mathscr{C}(V)$ et $\mathscr{H}^\pm = L^2(E^\pm)$, nous sommes donc dans la situation de 8.2.1.a).

b) Soit de plus D un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, opérant de $L^2(E^+)$ vers $L^2(E^-)$. Supposons que l'action de G soit localement libre et que D soit transversalement elliptique relativement au feuilletage de V défini par l'action de G, c'est-à-dire que le symbole transverse de D, défini comme la restriction du symbole principal $\sigma(D)$ de D au fibré conormal à ce feuilletage, soit invariant par l'action de G et inversible hors d'un compact. Soit Q un opérateur pseudo-différentiel de degré nul, opérant de $L^2(E^-)$ vers $L^2(E^+)$ et possédant $\sigma(D)^{-1}$ comme symbole transverse en dehors d'un compact et soit

$$F = \begin{bmatrix} 0 & Q \\ D & 0 \end{bmatrix}.$$

Il découle de [Co 2], lemma 3, p. 294, que $(\mathscr{H}, F)$ est un pré-module de Fredholm sur la sous-algèbre $\mathscr{C}_c^\infty(G; \mathscr{C}^\infty(V))$ ($\cong \mathscr{C}_c^\infty(G \times V)$) de $\mathscr{C}_c(G; B)$.

Nous sommes ainsi dans la situation de 8.2.2.b), et nous pouvons donc construire une application

$$\mathrm{Ind}_{(\mathscr{H},F)}\colon\ K_0(\mathrm{Exp}_a(G;\mathscr{C}(V)))\to\mathbb{Z}$$

pour toute fonction $a\in\mathscr{C}(G;\mathbb{R}_+)$ sous-additive suffisamment grande. D'après la remarque à la fin de 8.2.2.b), cette application ne dépend que de la classe d'homotopie du symbole principal transverse de D.

c) Lorsque, en outre, G est un groupe abélien élémentaire, nous sommes dans la situation du 8.2.3.b), et nous disposons donc d'un morphisme «d'indice transverse»

$$\mathrm{Ind}_D:=\mathrm{Ind}_{(\mathscr{H},F)}\colon\ K_0(\mathscr{C}(V)\rtimes G)\to\mathbb{Z}$$

ne dépendant, lui aussi, que de la classe d'homotopie du symbole principal tranverse de D.

Rappelons que, pour un tel G, le groupe $K_0(\mathscr{C}(V)\rtimes G)$ se calcule en termes des groupes $K^*(V)$ et de l'action de G sur ces groupes (Pimsner-Voiculescu, Connes). Par exemple, si $G=\mathbb{R}^n$, il existe d'après [Co 1] un isomorphisme canonique

$$\mathscr{T}\colon\ K^{\bar n}(V)\xrightarrow{\sim}K_0(\mathscr{C}(V)\rtimes G),$$

où $\bar n$ désigne la classe modulo 2 de n. Dans ce cas, il est possible de donner une expression purement topologique du morphisme composé $\mathrm{Ind}_D\circ\mathscr{T}$. Notons N^* le fibré sur V conormal à l'action de G, π l'application canonique de N^* sur V et $[D]$ l'élément de $K_c^0(N^*)$ défini par $(\sigma(D)_{|N^*},\ \pi^*E^+,\ \pi^*E^-)$. On peut alors établir la formule de l'indice suivante:

Pour tout $F\in K^{\bar n}(V)$, on a

$$\mathrm{Ind}_D\circ\mathscr{T}(F)=\langle\pi^*\mathrm{td}(N^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\cdot\mathrm{ch}[D]\cdot\pi^*\mathrm{ch}\,F,[N^*]\rangle$$

où td *et* ch *désignent respectivement la classe de Todd et le caractère de Chern, et* $[N^*]$ *la classe fondamentale de* N^* (convenablement orienté).

Nous présenterons ailleurs la démonstration de cette formule, ainsi que la généralisation des constructions précédentes aux complexes d'opérateurs pseudo-différentiels (d'ordre non nécessairement nul) transversalement elliptiques.

Remerciements. Je remercie Alain Connes pour ses questions et ses remarques sur ce travail, et Stéphane Hoguet pour de nombreuses discussions sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Appendice

A.1. Bonnes algèbres topologiques et K-théorie

A.1.1. Soit A un anneau[1]. Notons $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs de type fini. Muni de l'opération de somme directe, c'est un monoïde commutatif. Le groupe $K_0(A)$ est, par définition, le groupe abélien symétrisé de ce monoïde.

[1] Nous utilisons la terminologie classique, suivant laquelle un anneau possède nécessairement une unité, et les morphismes d'anneaux préservent les unités.

Un morphisme d'anneaux φ: $A \to B$ détermine par extension des scalaires un morphisme de monoïdes φ_*: $\mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ et donc un morphisme de groupes φ_*: $K_0(A) \to K_0(B)$. On construit ainsi un foncteur K_0 de la catégorie des anneaux vers celle des groupes abéliens.

Soit A une algèbre (sur $\mathbb{C}$). Rappelons (*cf.* n° 2.1) que l'on note $\tilde{A}$ l'algèbre déduite de A par adjonction d'une unité. L'algèbre quotient $\tilde{A}/A$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{C}$. On dispose ainsi d'une suite exacte

$$0 \to A \hookrightarrow \tilde{A} \xrightarrow{\varepsilon_A} \mathbb{C} \to 0,$$

qui est scindée: le morphisme d'algèbres ε_A admet comme rétraction r_A: $\mathbb{C} \to \tilde{A}$, définie par $r_A(\lambda) = \lambda 1_{\tilde{A}}$.

Lorsque A possède une unité, $\tilde{A}$ s'identifie à l'algèbre $A \oplus \mathbb{C}$ et ε_A à la seconde projection $A \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, et donc $K_0(A)$ s'identifie au noyau de ε_{A*}:$K_0(\tilde{A}) \to K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$. On étend la définition de K_0 aux algèbres (sur $\mathbb{C}$) sans unité en posant, pour toute algèbre A, $K_0(A) = \ker \varepsilon_{A*}$.

Si φ: $A \to B$ est un morphisme d'algèbres (sur $\mathbb{C}$), non nécessairement unifères, alors $\tilde{\varphi}$: $\tilde{A} \to \tilde{B}$ est un morphisme d'anneaux et $\varepsilon_B \circ \tilde{\varphi} = \varepsilon_A$ (*cf.* n° 2.1), de sorte que la restriction à $K_0(A)$ de $\tilde{\varphi}_*$ définit un morphisme de groupes abéliens φ_*: $K_0(A) \to K_0(B)$. On construit ainsi un foncteur de la catégorie des algèbres (sur $\mathbb{C}$), non nécessairement unifères, vers la catégorie des groupes abéliens.

A.1.2. Nous dirons qu'une algèbre topologique unifère A est une *bonne algèbre topologique* si A^{-1} est ouvert dans A et si l'application $(a \mapsto a^{-1})$ de A^{-1} vers A est continue. Nous dirons qu'une algèbre topologique sans unité A est une bonne algèbre topologique si $\tilde{A}$ est une bonne algèbre topologique. Nous appellerons *bonne algèbre de Fréchet* toute bonne algèbre topologique qui, en tant qu'espace vectoriel topologique, est un espace de Fréchet.

Toute algèbre de Banach est une bonne algèbre topologique. Il n'en va pas de même des algèbres de Fréchet. Par example, l'algèbre $A = \mathcal{O}(\mathring{D}(0;1))$ des fonctions holomorphes sur le disque $\mathring{D}(0;1)$ devient une algèbre de Fréchet si on la munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathring{D}(0;1)$. Toutefois, A^{-1} n'est pas ouvert: la fonction $(z \mapsto z-1)$ est un élément inversible de A, et est limite dans A de la suite $((z \to z-1+1/n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments non inversibles.

En décomposant les matrices proches de l'identité en produit de facteurs élémentaires et d'une matrice diagonale (*cf.* [Sw], corollary 1.2), on établit la proposition suivante:

Proposition A.1.1. *Si A est une bonne algèbre topologique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(A)$ est une bonne algèbre topologique.*

A.1.3. Soit A une bonne algèbre topologique avec unité, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. A tout idempotent e de $M_n(A)$ est associé un élément de $\mathscr{P}(A)$, à savoir la classe du A-module eA^n. Deux éléments e et e' de la même composante connexe de Idem $M_n(A)$ déterminent le même élément de $\mathscr{P}(A)$. En effet, si e' est suffisamment proche de e, alors $u = e'e + (1-e')(1-e)$ appartient à un voisinage connexe Ω de 1 dans A^{-1}, donc $e' = ueu^{-1}$ appartient à une partie connexe de Idem $M_n(A)$ contenant e.

On définit ainsi des applications

$$\pi_0(\text{Idem } M_n(A)) \to \mathscr{P}(A),$$

compatibles avec les applications

$$\pi_0(\text{Idem } M_n(A)) \to \pi_0(\text{Idem } M_{n+1}(A)).$$

déterminées par les morphismes

$$i_n\colon\ M_n(A) \to M_{n+1}(A)$$
$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application

$$\varinjlim \pi_0(\text{Idem } M_n(A)) \to \mathscr{P}(A)$$

qui s'en déduit *est une bijection.* Elle est en effet surjective, puisque tout A-module projectif de type fini est, par définition, facteur direct d'un module isomorphe à A^n, donc isomorphe à un module de la forme eA^n, où $e \in \operatorname{Idem} M_n(A)$. Prouvons qu'elle est injective.

Soient donc e et e' deux idempotents de $M_n(A)$ et soit $\varphi\colon eA^n \to e'A^n$ un isomorphisme de A-modules. En regardant eA^n et $e'A^n$ comme des facteurs directs de A^n, on voit qu'il existe $p \in e'M_n(A)e$ et $q \in eM_n(A)e'$ tels que $pq = e'$, $qp = e$ et que, pour tout $\xi \in eA^n$ et $\eta \in e'A^n$, $\varphi(\xi) = p\xi$ et $\varphi^{-1}(\eta) = q\eta$.

Posons alors

$$u = \begin{pmatrix} p & 1-e' \\ 1-e & q \end{pmatrix} \quad (\in M_{2n}(A)).$$

Un calcul immédiat montre que u est inversible, d'inverse

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} q & 1-e \\ 1-e' & p \end{pmatrix},$$

et que

$$u \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^{-1} = \begin{pmatrix} e' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité dans $M_{4n}(A)$

$$\begin{pmatrix} e' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

prouve que e' et e définissent les mêmes éléments de $\varinjlim \pi_0(\operatorname{Idem} M_n(A))$. En effet, $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à la composante neutre de $GL_{4n}(A)$, comme le montre la décomposition

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-u^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u-u^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si A et B sont deux bonnes algèbres topologiques, tout morphisme d'algèbres continu $\varphi\colon A \to B$ détermine des applications

$$\pi_0(M_n(\tilde{\varphi}))\colon \ \pi_0(\operatorname{Idem} M_n(\tilde{A})) \to \pi_0(\operatorname{Idem} M_n(\tilde{B})),$$

donc, par passage aux limites inductives, une application $\mathscr{P}(\tilde{A}) \to \mathscr{P}(\tilde{B})$. Cette application coïncide avec celle définie par l'extension des scalaires de $\tilde{A}$ à $\tilde{B}$ déterminée par $\tilde{\varphi}$.

A.1.4. Soit A une bonne algèbre topologique avec unité. Posons

$$j_n\colon \ GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$$
$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1_A \end{pmatrix}.$$

Le groupe de K-théorie topologique $K_1(A)$ est défini comme la limite inductive du système de groupes

$$\pi_0(j_n)\colon \ \pi_0(GL_n(A)) \to \pi_0(GL_{n+1}(A)), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

C'est un groupe abélien (*cf.* [T 1], p. 147).

Le groupe $K_1(\tilde{A})$ s'identifie canoniquement à $K_1(A)$, et l'on étend la définition de K_1 en posant $K_1(\tilde{A}) = K_1(A)$ si A est une bonne algèbre topologique sans unité.

Si A et B sont deux bonnes algèbres topologiques, tout morphisme d'algèbres continu $\varphi\colon A \to B$ détermine des morphismes de groupes continus

$$M_n(\tilde{\varphi})\colon \ GL_n(\tilde{A}) \to GL_n(\tilde{B}),$$

compatibles au plongement de GL_n dans GL_{n+1}, donc, par passage aux limites inductives, un morphisme de groupes

$$\varphi_*: K_1(A) \to K_1(B).$$

On construit ainsi un foncteur K_1 de la catégorie des bonnes algèbres topologiques, non nécessairement unifères, avec comme morphismes les morphismes d'algèbres continus, vers la catégorie des groupes abéliens.

A.1.5. Les bonnes algèbres topologiques séparées localement convexes et complètes forment une catégorie d'algèbres naturelle sur laquelle définir des foncteurs de K-théorie «topologique» K_0 et K_1. Par exemple, la démonstration classique de l'isomorphisme de périodicité de Bott pour les algèbres de Banach (*cf.* par exemple [T 1], § 9 ou [Ka], § III.1) s'étend immédiatement aux bonnes algèbres topologiques séparées, localement convexes et complètes. Cela tient au fait que l'on dispose d'un *calcul fonctionnel holomorphe* dans une telle algèbre.

Indiquons les grandes lignes de la construction de ce calcul fonctionnel, qui suit en fait la construction classique du calcul fonctionnel holomorphe dans une algèbre de Banach.

Soit a un élément d'une bonne algèbre topologique A, séparée, localement convexe et complète, et soit $\operatorname{Sp} a$ son spectre dans $\tilde{A}$. C'est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} a)$ l'algèbre des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\operatorname{Sp} a$. Pour tout $f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} a)$, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ relativement compact de $\operatorname{Sp} a$, à bord C^∞, et une fonction F définie et holomorphe sur un voisinage ouvert de $\bar{\mathcal{U}}$, dont f soit le germe. Il découle du théorème de Cauchy que l'élément de A

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} F(z)(z-a)^{-1} dz$$

ne dépend que de f et a. On le note $f(a)$. Il vient

$$f(a) \in A \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

De plus, le calcul fonctionnel holomorphe satisfait aux propriétés suivantes:

i) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\operatorname{Sp} a) &\to \tilde{A} \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres unifères.

ii) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction holomorphe sur Ω. L'ensemble

$$V = \{a \in A \mid \operatorname{Sp} a \subset \Omega\}$$

est ouvert dans A et l'application[2]

$$\begin{aligned} V &\to \tilde{A} \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

est continue.

A.2. Isomorphismes forts en K-théorie

A.2.1. Soient A et B deux bonnes algèbres et φ: $A \to B$ un morphisme d'algèbres continu. Nous dirons que φ *détermine un isomorphisme fort en K-théorie* si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les applications

$$M_n(\tilde{\varphi}): \operatorname{Idem} M_n(\tilde{A}) \to \operatorname{Idem} M_n(\tilde{B}) \tag{A.2.1}$$

et

$$M_n(\tilde{\varphi}): GL_n(\tilde{A}) \to GL_n(\tilde{B}) \tag{A.2.2}$$

[2] Nous notons abusivement par f le germe dans $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} a)$ défini par f.

sont des équivalences d'homotopie. L'application

$$\tilde{\varphi}_*\colon \mathscr{P}(\tilde{A}) \to \mathscr{P}(\tilde{B})$$

est alors bijective et les applications

$$\varphi_*\colon K_i(A) \to K_i(B) \qquad (i=0,1)$$

sont des isomorphismes.

On vérifie aisément que si (A.2.1) est une équivalence d'homotopie, alors il en va de même de

$$M_n(\varphi)\colon \operatorname{Idem} M_n(A) \to \operatorname{Idem} M_n(B). \tag{A.2.3}$$

Réciproquement, lorsque A et B possèdent une unité et que $\varphi(1_A)=1_B$, l'application (A.2.1) est une équivalence d'homotopie si (A.2.3) en est une. De plus, toujours lorsque φ est un morphisme d'algèbres unifères, l'application (A.2.2) est une équivalence d'homotopie si et seulement si

$$M_n(\varphi)\colon GL_n(A) \to GL_n(B)$$

en est une.

Illustrons par deux exemples la notion d'isomorphisme fort en K-théorie.

Soit A une bonne algèbre topologique.

L'algèbre $\mathscr{C}([0,1];A)$, munie de la topologie de la convergence uniforme, est une bonne algèbre topologique. On vérifie sans peine que, pour tout $t \in [0,1]$, le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} r_t\colon \mathscr{C}([0,1];A) &\to A \\ a &\mapsto a(t) \end{aligned}$$

détermine un isomorphisme fort en K-théorie, et qu'il en va de même du morphisme

$$\begin{aligned} i\colon A &\to \mathscr{C}([0,1];A) \\ a &\mapsto (t \mapsto a). \end{aligned}$$

En fait, les applications

$$M_n(\tilde{r}_t)\colon \operatorname{Idem} M_n(\mathscr{C}([0,1];A)^\sim) \to M_n(\tilde{A})$$

et

$$M_n(\tilde{\imath})\colon \operatorname{Idem} M_n(\tilde{A}) \to \operatorname{Idem} M_n(\mathscr{C}([0,1];A)^\sim)$$

d'une part, et

$$M_n(\tilde{r}_t)\colon GL_n(\mathscr{C}([0,1];A)^\sim) \to GL_n(\tilde{A})$$

et

$$M_n(\tilde{\imath})\colon GL_n(\tilde{A}) \to GL_n(\mathscr{C}([0,1];A)^\sim)$$

d'autre part, sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre («invariance par homotopie de la K-théorie»).

Soit $j\colon A \to M_2(A)$ le morphisme d'algèbres défini par

$$j(a)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les applications $j_*\colon K_i(A) \to K_i(M_2(A))$ $(i=0,1)$ déterminées par j sont des isomorphismes («invariance par équivalence de Morita de la K-théorie»; cela découle aisément des définitions des foncteurs K_i données plus haut). Toutefois, en général, j ne détermine pas un isomorphisme fort en K-théorie. Par exemple, si $A=\mathbb{C}$, $\pi_0(\operatorname{Idem} \tilde{A})$ a 4 éléments tandis que $\pi_0(\operatorname{Idem} \widetilde{M_2(A)})$ en a 6, de sorte que

$$j_*\colon \pi_0(\operatorname{Idem} \tilde{A}) \to \pi_0(\operatorname{Idem} \widetilde{M_2(A)})$$

ne peut être bijective; en fait l'application

$$j_*\colon \mathscr{P}(\tilde{A}) \to \mathscr{P}(\widetilde{M_2(A)})$$

elle-même n'est pas surjective.

A.2.2. Cette section est consacrée à la démonstration du résultat suivant (comparer avec [Sw], 2.2 et 3.1, [Ka], p. 109, [Co1] VI.3):

Théorème A.2.1. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme continu de bonnes algèbres de Fréchet. Si $\varphi(A)$ est dense dans B et si $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{B}^{-1}) = \tilde{A}^{-1}$, alors φ détermine un isomorphisme fort en K-théorie.*

Nous dirons qu'un morphisme continu d'algèbres topologiques unifères $\varphi\colon A \to B$ satisfait à la condition $(\mathscr{C})$ lorsque

$(\mathscr{C}1)$ $\varphi(A)$ est dense dans B;
$(\mathscr{C}2)$ $A^{-1} = \varphi^{-1}(B^{-1})$.

Proposition A.2.2. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme continu d'algèbres topologiques unifères. Si B est une bonne algèbre topologique et si φ satisfait à la condition $(\mathscr{C})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le morphisme*

$$M_n(\varphi)\colon M_n(A) \to M_n(B)$$

satisfait à la condition $(\mathscr{C})$.

Démonstration (*cf.* [Sw], lemma 2.1). Il est évident que $M_n(\varphi)$ satisfait à $(\mathscr{C}1)$. Montrons qu'il satisfait à $(\mathscr{C}2)$.

Soit A' l'algèbre topologique définie comme l'algèbre A munie de la topologie la moins fine faisant de φ une application continue. Comme B est une bonne algèbre et que φ satisfait à $(\mathscr{C}2)$, A' est une bonne algèbre topologique. La proposition A.1.1 montre alors que $M_n(A')$ est une bonne algèbre topologique. En particulier, $M_n(A')^{-1}$ est ouvert dans $M_n(A')$, *i.e.* $GL_n(A)$ est l'image inverse par $M_n(\varphi)$ d'un ouvert de $M_n(B)$. Que $M_n(\varphi)$ satisfasse à $(\mathscr{C}2)$ découle maintenant du lemme suivant appliqué à $M_n(\varphi)$:

Lemme A.2.3. *Soit $\psi\colon C \to D$ un morphisme continu d'algèbres topologiques unifères. Si $\psi(C)$ est dense dans D et s'il existe un ouvert non vide U de B tel que $\psi^{-1}(U) \subset C^{-1}$, alors $\psi^{-1}(D^{-1}) = C^{-1}$.*

Démonstration. Soit $x \in C$ tel que $\psi(x) \in D^{-1}$. Comme $\psi(C)$ est dense dans D, il existe $x' \in C$ tel que:

$$\psi(x') \in \psi(x)^{-1}\, U \cap U\, \psi(x)^{-1}.$$

Comme $\psi(xx')$ et $\psi(x'x)$ appartiennent à $\mathscr{U}$, xx' et $x'x$ sont inversibles dans A, et donc x est inversible. q.e.d.

Nous dirons qu'une algèbre topologique A satisfait à la condition $(\mathscr{R}(\mathscr{U}))$, où $\mathscr{U}$ désigne un voisinage ouvert de 0 dans A, s'il existe une application continue $r\colon \mathscr{U} \to A$ telle que

$(\mathscr{R}1)$ $r(0) = 0$;
$(\mathscr{R}2)$ $\forall x \in \mathscr{U},\ r(x)^2 - r(x) = x$;
$(\mathscr{R}3)$ $\forall x \in \mathscr{U},\ \forall y \in A,\ [x, y] = 0 \Rightarrow [r(x), y] = 0$.

Toute algèbre de Banach satisfait à la condition $(\mathscr{R}(\mathscr{U}))$ avec

$$\mathscr{U} = \{x \in A \mid \|x\| < 1/4\}.$$

Il suffit en effet de poser

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\, x^n.$$

Plus généralement, on a:

Lemme A.2.4. *Toute bonne algèbre topologique séparée localement convexe complète A satisfait à $(\mathscr{R}(\mathscr{U}))$, avec*

$$\mathscr{U} = \{x \in A \mid \operatorname{Sp} x \subset \mathring{D}(0; 1/4)\}.$$

Démonstration. On construit r au moyen du calcul fonctionnel holomorphe (*cf.* A.1.5) en posant $r(x)=f(x)$, où f est la fonction holomorphe sur $\mathring{D}(0;1/4)$ définie par $f(z)=(1-\sqrt{1+4z})/2$ (on choisit «la détermination de $\sqrt{\ }$» valant 1 en 1). q.e.d.

Lemme A.2.5. *Soit A une bonne algèbre topologique localement convexe. Supposons qu'il existe un voisinage convexe $\mathscr{U}$ de 0 dans A tel que A satisfasse à ($\mathscr{R}(\mathscr{U})$). Si Ω est un voisinage ouvert convexe de 0 dans A tel que, pour tout $x\in\Omega$, $1-4x$ soit inversible (dans A) et que $x(1-4x)^{-1}$ appartienne à $\mathscr{U}$, alors* Idem A *est un rétract par déformation stricte de*

$$\mathscr{V}_\Omega=\{a\in A\,|\,a-a^2\in\Omega\}$$

et l'inclusion i: Idem $A\hookrightarrow\mathscr{V}_\Omega$ *est* a fortiori *une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Soit $r\colon\mathscr{U}\to A$ une application continue satisfaisant à ($\mathscr{R}1$), ($\mathscr{R}2$) et ($\mathscr{R}3$). Si $\mathscr{U}\in\mathscr{V}_r$, alors $(1-2u)^2=1-4(u-u^2)$ est inversible et $(u-u^2)\,(1-2u)^{-2}$ appartient à $\mathscr{U}$. Ainsi, on peut poser, pour tout $(t,u)\in[0,1]\times\mathscr{V}_\Omega$:

$$F(t,u)=u+(1-2u)\,r[t(u-u^2)(1-2u)^{-2}].$$

Il vient, par un calcul très simple:

$$F(t,u)-F(t,u)^2=(1-t)\,(u-u^2). \tag{A.2.4}$$

Par conséquent, $F(t,u)-F(t,u)^2$ appartient à Ω et F est une application continue de $[0,1]\times\mathscr{V}_\Omega$ dans $\mathscr{V}_\Omega$. L'identité (A.2.4) montre aussi que $F(1,.)$ envoie $\mathscr{V}_\Omega$ dans Idem A, et l'on vérifie immédiatement que, pour tout $t\in[0,1]$, $F(t,.)\circ i=\mathrm{Id}_{\mathrm{Idem}\,A}$ tandis que $F(0,.)=\mathrm{Id}_{\mathscr{V}}$. q.e.d.

Proposition A.2.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables, $\psi\colon E\to F$ une application linéaire continue et V un ouvert de F. Si $\psi(E)$ est dense dans F, alors*

$$\psi\colon\ \psi^{-1}(V)\to V$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Il suffit de montrer que c'est une équivalence d'homotopie faible, puisque $\psi^{-1}(V)$ et V ont mêmes types d'homotopie que les CW-complexes, d'après [Mil].

L'application $\pi_0(\psi)$: $\pi_0(\psi^{-1}(V))\to\pi_0(V)$ est surjective, puisque toute composante connexe de V est ouverte, donc rencontre $\psi(E)$. Montrons qu'elle est injective. Soient x et y dans $\psi^{-1}(V)$ tels que $\psi(x)$ et $\psi(y)$ appartiennent à la même composante de V. Il existe une suite $(t_i)_{0\leqq i\leqq N}$ de points de V telle que $t_0=\psi(x)$, $t_1=\psi(y)$ et que les segments $[t_{i-1},t_i]$ $(1\leqq i\leqq N)$ soient dans V. Comme V est ouvert, il existe des voisinages Ω_i des t_i tels que, si $u\in\Omega_{i-1}$ et $v\in\Omega_i$, alors le segment $[u,v]$ est inclus dans V. Comme $\overline{\psi(E)}=F$, on peut trouver $w_1,\dots,w_{N-1}$ dans $\psi^{-1}(V)$ tels que $\psi(w_i)\in\Omega_i$. Les segments $[x,w_1]$, $[w_1,w_2]$, $\dots$, $[w_{i-1},w_i]$, $\dots$, $[w_{N-1},y]$ sont alors tous dans $\psi^{-1}(V)$, et donc x et y sont dans la même composante de $\psi^{-1}(V)$.

Montrons que, pour tout $a\in\psi^{-1}(V)$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, l'application

$$\pi_k(\psi)\colon\ \pi_k(\psi^{-1}(V);a)\to\pi_k(V;\psi(a)) \tag{A.2.5}$$

est bijective. Soit s un «point de base» sur la sphère $\mathbf{S}^k$. Posons

$$\begin{aligned}
E_k&=\{\rho\in\mathscr{C}(\mathbf{S}^k;E)\,|\,\rho(s)=0\},\\
F_k&=\{\rho\in\mathscr{C}(\mathbf{S}^k;F)\,|\,\rho(s)=0\},\\
\psi_k&:\ E_k\to F_k\\
&\quad\ \rho\ \mapsto\psi\circ\rho
\end{aligned}$$

et

$$V_k=\{\rho\in F_k\,|\,\forall x\in\mathbf{S}^k,\ \rho(x)\in V-\psi(a)\}.$$

Si E_k et F_k sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{S}^k$, alors E_k, F_k, ψ_k et V_k satisfont aux mêmes conditions que E, F, ψ et V. Ainsi, d'après la première partie de la démonstration, l'application

$$\psi_{k_*}\colon\ \pi_0(\psi_k^{-1}(V_k)) \to \pi_0(V_k)$$

est bijective. Or V_k s'identifie à

$$\{\sigma \in \mathscr{C}(\mathbb{S}^k; V) \mid \sigma(s) = \psi(a)\}$$

par l'application $(\rho \mapsto \rho + \psi(a))$, et donc $\pi_0(V_k)$ s'identifie à

$$[(\mathbb{S}^k, s), (V, \psi(a))] = \pi_k(V; \psi(a)).$$

De même, $\pi_0(\psi_k^{-1}(V_k))$ s'identifie à $\pi_k(\psi^{-1}(v); a)$, tandis que $\pi_0(\psi_k)$ devient l'application (A.2.5) après ces identifications. La bijectivité de (A.2.5) découle alors de la première partie de la démonstration. q.e.d.

Lemme A.2.7. *Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme continu de bonnes algèbres topologiques localement convexes métrisables unifères satisfaisant à ($\mathscr{C}$). S'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de 0 dans B tel que B vérifie ($\mathscr{R}(\mathscr{U})$) et A vérifie ($\mathscr{R}(\varphi^{-1}(\mathscr{U}))$), alors l'application*

$$\varphi\colon\ \operatorname{Idem} A \to \operatorname{Idem} B$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. Soient $\mathscr{U}_0$ un voisinage convexe de 0 dans $\mathscr{U}$ et Ω un voisinage ouvert convexe de 0 dans B tels que, pour tout $x \in \Omega$, $1-4x \in \tilde{B}^{-1}$ et $x(1-4x)^{-1} \in \mathscr{U}_0$. L'ensemble $\varphi^{-1}(\mathscr{U}_0)$ est alors un voisinage convexe de 0 dans $\varphi^{-1}(\mathscr{U})$ et $\varphi^{-1}(\Omega)$ est un voisinage ouvert convexe de 0 dans A. De plus, comme $\tilde{\varphi}$ satisfait à ($\mathscr{C}$), il vient, pour tout $x \in \varphi^{-1}(\Omega)$,

$$1-4x \in \tilde{A}^{-1} \quad \text{et} \quad x(1-4x)^{-1} \in \varphi^{-1}(\mathscr{U}_0).$$

Le lemme A.2.5 montre alors que les inclusions de Idem A et Idem B dans

$$\mathscr{V}_{\varphi^{-1}(\Omega)} = \{a \in A \mid a - a^2 \in \varphi^{-1}(\Omega)\},$$

et

$$\mathscr{V}_\Omega = \{b \in B \mid b - b^2 \in \Omega\},$$

respectivement, sont des équivalences d'homotopie.

Par ailleurs, $\mathscr{V}_{\varphi^{-1}(\Omega)} = \varphi^{-1}(\mathscr{V}_\Omega)$, si bien que

$$\varphi\colon\ \mathscr{V}_{\varphi^{-1}(\Omega)} \to \mathscr{V}_\Omega$$

est une équivalence d'homotopie d'après la proposition A.2.6.

Le lemme découle maintenant de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Idem} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Idem} B \arrow[d, hook] \\ \mathscr{V}_{\varphi^{-1}(\Omega)} \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{V}_\Omega \end{tikzcd}$$

q.e.d.

Démonstration du théorème A.2.1. Pour établir que les applications

$$M_n(\tilde{\varphi})\colon \ \mathrm{Idem}\, M_n(\tilde{A}) \to \mathrm{Idem}\, M_n(\tilde{B})$$

sont des équivalences d'homotopie, il suffit de vérifier que les applications

$$M_n(\tilde{\varphi})\colon \ M_n(\tilde{A}) \to M_n(\tilde{B})$$

satisfont aux hypothèses du lemme A.2.7. Or $M_n(\tilde{A})$ et $M_n(\tilde{B})$ sont de bonnes algèbres topologiques localement convexes métrisables et $M_n(\tilde{\varphi})$ satisfait à $(\mathscr{C})$, d'après les propositions A.1.1 et A.2.2. De plus, si l'on pose

$$\mathscr{U} = \{x \in M_n(\tilde{B}) \mid \mathrm{Sp}\, x \subset \mathring{D}(0; 1/4)\}$$

alors l'algèbre $M_n(\tilde{B})$ satisfait à $(\mathscr{R}(\mathscr{U}))$ d'après le lemme A.2.4, car c'est une bonne algèbre topologique localement convexe complète. De même, $M_n(\tilde{A})$ satisfait à $(\mathscr{R}(\tilde{\psi}^{-1}(\mathscr{U})))$, puisque

$$\tilde{\psi}^{-1}(\mathscr{U}) = \{x \in M_n(\tilde{A}) \mid \mathrm{Sp}\, x \subset \mathring{D}(0; 1/4)\};$$

en effet,

$$\tilde{\psi}^{-1}(M_n(\tilde{B})^{-1}) = M_n(\tilde{A})^{-1}.$$

Grâce à la proposition A.2.6, cette dernière égalité et la densité de $\tilde{\psi}(M_n(\tilde{A}))$ dans $M_n(\tilde{B})$ montrent aussi que

$$\tilde{\psi}\colon \ GL_n(\tilde{A}) \to GL_n(\tilde{B})$$

est une équivalence d'homotopie. q.e.d.

A.2.3. Présentons maintenant quelques applications du théorème A.2.1.

Proposition A.2.8. *Soit A une bonne algèbre de Fréchet et soit J une sous-algèbre de A, munie d'une topologie plus fine que la topologie de A, qui fasse de J une algèbre de Fréchet.*

1) *S'il existe un entier $n > 0$ tel que $J^n A J^n \subset J$, alors J est bonne algèbre topologique et une sous-algèbre pleine de A.*

2) *Si, de plus, J est dense dans A, alors le morphisme d'inclusion $i\colon J \hookrightarrow A$ détermine un isomorphisme fort en K-théorie.*

Observons que la condition dans 1) est satisfaite lorsque J est un idéal de A.

Démonstration. Démontrons 1). D'après le théorème du graphe fermé, l'application

$$\begin{aligned} P\colon \ & J^n \times A \times J^n \to J \\ & (a_1, \ldots, a_n, b, c_1, \ldots, c_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot b \cdot \prod_{i=1}^{n} c_i \end{aligned}$$

séparément continue comme application à valeurs dans A, est séparément continue. Comme P est une application multilinéaire sur un produit d'espaces de Fréchet, cela implique que P est continue.

La «plénitude» de J dans A découle de l'identité suivante, valable pour tout $(x, \lambda) \in A \times \mathscr{C}$ tel que $x + \lambda \in \tilde{A}^{-1}$

$$(x+\lambda)^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \lambda^{-k-1} x^k\right] + \lambda^{-2n} x^n (x+\lambda)^{-1} x^n.$$

En effet, si $x \in J$, alors

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \lambda^{-k-1} x^k \in \tilde{J}$$

et

$$x^n(x+\lambda)^{-1}\,x^n \in J^n\tilde{A}J^n = J^nAJ^n + J^{2n} \subset J.$$

Cette identité, jointe à la continuité de P, montre aussi la continuité de l'application $(a \mapsto a^{-1})$ de $\tilde{J}^{-1}$ vers $\tilde{J}$.

L'assertion 2) est une conséquence immédiate du théorème A.2.1. q.e.d.

Proposition A.2.9. *Soient A une algèbre de Banach, G un groupe de Lie et $(\alpha_g)_{g\in G}$ une action de G sur l'algèbre A, fortement continue et isométrique.*

1) *L'ensemble A^∞ des éléments de A de classe C^∞ sous l'action de G forme une sous-algèbre dense et pleine de A.*

2) *On définit des semi-normes sur A^∞ associées aux éléments P de l'algèbre enveloppante $U(\text{Lie } G)$ en posant*

$$\|a\|_P = \|[P(g \mapsto \alpha_g(a))]\,(e)\|.$$

Munie de ces semi-normes, A^∞ est une bonne algèbre de Fréchet.

3) *Le morphisme d'inclusion i: $A^\infty \hookrightarrow A$ détermine un isomorphisme fort en K-théorie.*

Les assertions 1) et 2) découlent des propriétés classiques des éléments C^∞ d'un espace de Banach muni de l'action d'un groupe de Lie. L'assertion 3) est une conséquence des assertions 1) et 2) et du théorème A.2.1.

Bibliographie

[B] Bochner, S.: Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals. Am. J. Math. **59**, 732–738 (1937)

[Bo] Bost, J.B.: K-théorie des produits croisés et principe d'Oka. C.R. Acad. Sci. Paris. (I)-**301**, 189–192 (1985)

[Ca 1] Cartan, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. Pures Appl. **19**, 1–26 (1940)

[Ca 2] Cartan, H.: Espaces fibrés analytiques. Symposium Internacional de Topologia algebraica, Mexico (1958), 97–121

[Co 1] Connes, A.: An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of $\mathbb{R}$. Adv. Math. **39**, 31–55 (1981)

[Co 2] Connes, A.: Non-commutative differential geometry. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **62**, 44–144 (1986)

[Co 3] Connes, A.: Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation. In: Araki, H., Effros, E.G., (ed.) Geometric methods in operator algebras, London: Longman 1986

[C-G] Cornalba, M., Griffiths, P.: Analytic cycles and vector bundles on noncompact algebraic varieties. Invent. Math. **28**, 1–106 (1975)

[D] Douady, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier **16**, 1–95 (1966)

[Gr] Grauert, H.: Approximationsätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Math. Ann. **133**, 139–159 (1957); Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Math. Ann. **133**, 450–472 (1957); Analytische Faserungen über holomorphe-vollständigen Räumen. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958)

[Ho] Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. North-Holland 1973

[Ka] Karoubi, M.: K-theory, an introduction. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978

[L-P] Leptin, H., Poguntke, D.: Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups. J. Funct. Anal. **33**, 119–134 (1979)

[Mil] Milnor, J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Am. Math. Soc. **90**, 272–280 (1959)

[P] Pedersen, G.K.: C^*-algebras and their automorphism groups. New York: Academic Press 1979

[S] Seeley, R.T.: Extensions of C^∞-functions defined in a half-space. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 625–626 (1964)

[Sw] Swan, R.G.: Topological examples of projective modules. Trans. Am. Math. Soc. **230**, 201–234 (1977)

[T1] Taylor, J.L.: Banach algebras and topology. In: Algebra in Analysis, Williamson, J.H., (Ed.). New York: Academic Press 1975

[T2] Taylor, J.L.: Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra. Adv. Math. **19**, 149–206 (1976)

Oblatum 16-X-1989