Zu einem Satz von G. Trautmann über den Rang gewisser kohärenter analytischer Moduln

Von

UDO VETTER

0. In [4] wird bewiesen: Ist $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf dem $\mathbf{C}^n$, die außerhalb einer analytischen Menge S lokal-frei ist, für die ferner $\dim S + \operatorname{rang} \mathscr{F} \leqq n - 2$ und $\operatorname{codh} \mathscr{F} \geqq n - 1$ gilt, dann ist $\mathscr{F}$ lokal-frei. In einer hieran anschließenden Arbeit ([5]) zeigt Trautmann, daß es für gerades $n \geqq 4$ kohärente analytische Garben $\mathscr{F}$ auf dem $\mathbf{C}^n$ gibt mit $\operatorname{rang} \mathscr{F} = n - 2$ und $\operatorname{codh} \mathscr{F} \geqq 2$, die über $\mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ nicht aber über $\mathbf{C}^n$ lokal-frei sind.

Bei genauerer Betrachtung des von Trautmann angegebenen Beispiels (4.2.4) in [5] erweist sich diese Existenzaussage für beliebiges $n \geqq 4$ als richtig (s. Abschnitt 3). Das soll zusammen mit einer etwas allgemeineren, algebraischen Formulierung des Satzes von Trautmann (s. Abschnitt 2) in der vorliegenden Note bewiesen werden.

1. Im folgenden sei R ein noetherscher Ring. Alle betrachteten R-Moduln seien unitär.

S sei die Menge der Nichtnullteiler von R. Ein R-Modul M heißt *torsionsfrei*, wenn die natürliche Abbildung $M \to M_S$ injektiv ist. Ist M endlich erzeugt und M_S ein freier R_S-Modul, dann heißt der Rang von M_S der *Rang von* M; wir bezeichnen ihn mit $\operatorname{rang} M$. (Zu dieser Def. vgl. [3], § 6.)

$\mathfrak{a}$ sei ein von R verschiedenes Ideal in R. Unter dem *Grad von* $\mathfrak{a}$ verstehen wir die Tiefe von R bzgl. $R/\mathfrak{a}$, d.h. die wohlbestimmte Anzahl der Elemente einer R-Folge von Elementen aus $\mathfrak{a}$ maximaler Länge. Wir bezeichnen den Grad von $\mathfrak{a}$ mit $\operatorname{grad} \mathfrak{a}$ und definieren zusätzlich $\operatorname{grad} R := \infty$. Es gilt bekanntlich $\operatorname{codim} \mathfrak{a} \geqq \operatorname{grad} \mathfrak{a}$. ($\operatorname{codim} \mathfrak{a}$ sei die Kodimension oder Höhe von $\mathfrak{a}$.) Für den Fall, daß R lokal ist, hat man $\operatorname{grad} \mathfrak{a} \geqq \operatorname{codh} R - \dim \mathfrak{a}$. ($\operatorname{codh} R$ sei die homologische Kodimension oder Tiefe von R und $\dim \mathfrak{a}$ die Dimension von $R/\mathfrak{a}$.) Ist R ein lokaler Cohen-Macaulay-Ring, dann gilt in beiden Fällen das Gleichheitszeichen.

M sei ein endlicher R-Modul. Dann ist M Restklassenmodul eines freien R-Moduls R^n nach einem von endlich vielen Elementen $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $1 \leqq i \leqq m$, erzeugten Untermodul. Mit $\mathfrak{b}$ bezeichnen wir im folgenden das von allen m-reihigen Unterdeterminanten der Matrix (x_{ij}) erzeugte Ideal in R. Es sei $\operatorname{grad} \mathfrak{b} > 0$. Dann sind $x_1, \ldots, x_m$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ linear unabhängig über $R_{\mathfrak{p}}$ und folglich auch linear unabhängig über R; speziell ist der Rang von M wohldefiniert und zwar gleich $n - m$. Darüber hinaus hat man das folgende (für $\operatorname{grad} \mathfrak{b} \leqq 2$ schon von Lipman in [1] bewiesene) Lemma von Saito:

Lemma. ${}^{p}\bigwedge M$ *ist torsionsfrei, falls* $p <$ grad $\mathfrak{b}$ *gilt.*

Den Beweis dieses Lemmas erhält man durch Induktion über p mit elementaren Schlüssen ähnlich denen in [6]; wir skizzieren ihn hier der Vollständigkeit halber:

Im Falle $p = 0$ oder grad $\mathfrak{b} = \infty$ ist nichts zu beweisen. Es gelte also $0 < p <$ grad $\mathfrak{b} < \infty$. Ferner sei $x \in {}^{p}\bigwedge R^n$ und λ ein Nichtnullteiler aus R, so daß $\lambda x = \sum_{i=1}^{m} y_i \wedge x_i$, $y_i \in {}^{p-1}\bigwedge R^n$, ist. Man hat $x = \sum_{i=1}^{m} y_i' \wedge x_i$, $y_i' \in {}^{p-1}\bigwedge R^n$, nachzuweisen.

Es sei $\pi\colon R^n \to R^n/\lambda R^n$ die natürliche Projektion. Dann ist

$$
{}^{p-1}\bigwedge \pi(y_1) \wedge \pi(x_1) \wedge \cdots \wedge \pi(x_m) = 0 .
$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{b}}$ das Ideal $\mathfrak{b}/\lambda R$ in $R/\lambda R$, so ist grad $\bar{\mathfrak{b}} \geqq$ grad $\mathfrak{b} - 1$, also $p - 1 <$ grad $\bar{\mathfrak{b}}$. Mit Satz 1 aus [6] und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$
y_1 = \sum_{i=1}^{m} z_i \wedge x_i + \lambda y_1' \quad \text{mit} \quad z_i \in {}^{p-2}\bigwedge R^n,\ y_1' \in {}^{p-1}\bigwedge R^n .
$$

Durch Einsetzen erhält man $(x - y_1' \wedge x_1) \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m = 0$. Berücksichtigt man, daß bei $m \geqq 2$ das von allen $(m-1)$-reihigen Unterdeterminanten der von den Koordinaten von $x_2, \ldots, x_m$ gebildeten Matrix erzeugte Ideal in R das Ideal $\mathfrak{b}$ umfaßt, dann erschließt man durch Induktion über m jetzt sofort

$$
x - y_1' \wedge x_1 = \sum_{i=2}^{m} y_i' \wedge x_i ,\ y_i' \in {}^{p-1}\bigwedge R^n, \quad \text{w.z.b.w.}
$$

Anmerkung. Es gilt die folgende Umkehrung des Lemmas: *Sind* $x_1, \ldots, x_m$ *linear unabhängig und* ${}^{q}\bigwedge M$ *für* $q = 0, \ldots, p$ *torsionsfrei, dann ist* $p <$ codim $\mathfrak{b}$. Man beweist die Aussage ohne Mühe mit der Methode, die im Beweis von Satz 4 in [6] verwandt wird. Mit diesem Beweis erhält man überdies bei lokalem R unmittelbar eine etwas schwächere Formulierung des Lemmas, in der grad $\mathfrak{b}$ durch codh R — dim $\mathfrak{b}$ ersetzt ist.

Aus dem Lemma folgt direkt:

Satz 1. *Ist R lokal und gilt* rang $M + 2 \leqq$ grad $\mathfrak{b}$, *dann ist M frei.*

Beweis. Es sei $r := $ rang M. Wegen $r + 1 <$ grad $\mathfrak{b}$ ist ${}^{r+1}\bigwedge M$ torsionsfrei, aus Gründen des Ranges also gleich 0. Folglich ist M frei.

2. Als Folgerung aus Satz 1 erhält man jetzt den Satz von Trautmann:

Satz 2. *R sei ein lokaler Ring,* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal in R und M ein endlicher R-Modul, derart, daß gilt:*

(F) *Für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *in R mit* $\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{p}$ *ist* $M_{\mathfrak{p}}$ *ein freier* $R_{\mathfrak{p}}$*-Modul.*

Es sei ferner $\mathrm{dh}_R M \leqq 1$ *und* rang $M + 2 \leqq$ grad $\mathfrak{a}$. *Dann ist M frei.*

Beweis. M ist Restklassenmodul eines freien R-Moduls R^n nach einem von endlich vielen Elementen $x_1, \ldots, x_m$ erzeugten Untermodul. Wir definieren das Ideal $\mathfrak{b}$ wie in Abschnitt 1.

Wegen $\mathrm{dh}_R M \leqq 1$ dürfen wir annehmen, daß $x_1, \ldots, x_m$ linear unabhängig sind. Es sei $\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{b}$ umfassendes Primideal in R. Wegen (F) gilt dann $\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{a}$. Es folgt $\mathrm{rad}\, \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a}$, also auch $\mathrm{grad}\, \mathfrak{b} \geqq \mathrm{grad}\, \mathfrak{a}$. Aus Satz 1 ergibt sich jetzt die Behauptung.

3. R sei ein lokaler Ring und $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geqq 2$) eine Primfolge in R. Wir betrachten die $(2n-3, n)$-Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -a_3 & 0 & a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -a_5 & a_4 & 0 & -a_2 & a_1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ -a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & a_1 \\ 0 & -a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & a_2 \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(A_n entsteht so: In der $(2n-1, n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_1 \\ 0 & a_n & \cdot & \cdot & \cdots & a_2 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ersetze man in der i-ten Spalte das Element a_i durch 0, streiche die erste und die letzte Zeile und lasse schließlich in den Zeilen bei den von 0 verschiedenen Elementen das Vorzeichen alternieren.)

A_n' sei die aus den ersten $n-1$ Zeilen von A_n bestehende Teilmatrix von A_n. Wir bezeichnen die Spalten von A_n' der Reihe nach mit $A_{n1}', \ldots, A_{nn}'$, die von A_n mit $A_{n1}, \ldots, A_{nn}$. Offenbar gilt eine Gleichung

$$(*) \qquad b_1 A_{n1}' + \cdots + b_n A_{nn}' = 0,$$

$b_1, \ldots, b_n \in R$, b_1 kein Nullteiler in R. Durch Induktion über n beweist man leicht, daß dies

$$b_1 A_{n1} + \cdots + b_n A_{nn} = 0$$

impliziert. (Aus (*) folgt sogar $b_i a_j - b_j a_i = 0$ für alle i, j mit $1 \leqq i, j \leqq n$.)

Es sei N_n der von den Zeilen von A_n erzeugte Untermodul von R^n und M_n der Kern der kanonischen Abbildung $R^{2n-3} \to N_n$. Die eben angestellte Überlegung zeigt: $\operatorname{rang} N_n = n - 1$, $\operatorname{rang} M_n = n - 2$.

$\mathfrak{a}$ sei das von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Ideal in R. Dann ist $\operatorname{rang} M_n + 2 \leqq \operatorname{grad} \mathfrak{a}$. Außerdem erfüllen M_n und $\mathfrak{a}$ die Bedingung (F), da dies für N_n und $\mathfrak{a}$ zutrifft: $\mathfrak{p}$ sei ein $\mathfrak{a}$ nicht enthaltendes Primideal von R. Dann gibt es ein i mit $a_i \notin \mathfrak{p}$. Es sei d_j die Determinante der $(n-1, n-1)$-Teilmatrix von A_n, die entsteht, wenn man alle Zeilen und Spalten streicht, in denen a_j nicht vorkommt. Es ist

$$d_1 = a_1^{n-1}, \quad d_j \in \pm a_j^{n-1} + a_{j-1} R + \cdots + a_1 R \quad \text{für} \quad j > 1 .$$

Wir setzen $k := \min\{i \mid a_i \notin \mathfrak{p}\}$. Dann ist d_k eine Einheit in $R_{\mathfrak{p}}$, $(N_n)_{\mathfrak{p}}$ folglich sogar freier direkter Summand von $R_{\mathfrak{p}}^n$.

Ist $n \geqq 4$ und R regulär, dann hat man $\operatorname{dh}_R M_n > n - 4$. Andernfalls wäre $\operatorname{dh}_R (R^n/N_n) \leqq n - 2$. Da R^n/N_n nach den bisherigen Überlegungen ebenfalls (F) erfüllt, wäre R^n/N_n nach Cor. 3 zu Prop. 6 aus [2] reflexiv, als reflexiver Modul des Ranges 1 über einem regulären lokalen Ring also frei. Dann wäre auch N_n frei, was ersichtlich nicht der Fall ist.

Literaturverzeichnis

[1] J. Lipman, Free derivation modules on algebraic varieties. Amer. J. Math. **87**, 874—898 (1965).
[2] P. Samuel, Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs. Bull. Soc. Math. France **92**, 237—249 (1964).
[3] G. Scheja und U. Storch, Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. **197**, 137—170 (1972).
[4] G. Trautmann, A rank theorem for coherent analytic sheaves. Trans. Amer. Math. Soc. **157**, 495—498 (1971).
[5] G. Trautmann, Darstellung von Vektorraumbündeln über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Arch. Math. (im Druck).
[6] U. Vetter, Äußere Potenzen von Differentialmoduln reduzierter vollständiger Durchschnitte. Manuscripta Math. **2**, 67—75 (1970).

Eingegangen am 15. 5. 1972

Anschrift des Autors:
Udo Vetter
Institut für Mathematik
der Techn. Universität
3392 Clausthal-Zellerfeld
Erzstr. 1