LE DÉVELOPPEMENT DU POTENTIEL DANS LE CAS D'UNE DENSITÉ ANALYTIQUE

CONSTANTIN KHOLCHEVNIKOV

Université de Léningrad, U.S.S.R.

(Received 10 September, 1970)

Abstract. The potential of a body of revolution is expanded in a series of spherical functions. It is proved that, for a body with analytical density limited by an analytical surface the coefficients of expansion decrease in geometrical progression.

Резюме. Потенциал тела вращения разложен в ряд по сферическим функциям. Доказано, что коэффициенты разложения для тела аналитической плотности, ограниченного аналитической поверхностью, убывают в геометрической прогрессии.

1. Introduction

Actuellement pour représenter le potentiel V d'un corps de révolution T, on utilise le plus souvent le développement en fonctions sphériques

$$V(r, v) = \frac{GM}{r}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} I_n \frac{P_n(v)}{r^n}\right\} \tag{1}$$

Les notations sont: r – rayon-vecteur, v – sinus de latitude, G – constante de gravitation, M – masse du corps, $P_n(v)$ – polynôme de Legendre. Le rayon-vecteur maximal de la surface du corps est choisi comme l'unité de longueur. Le coefficient I_n est l'intégrale double

$$I_n = -\frac{2\pi}{M}\iint_s \gamma(r, v)\, r^{n+2} P_n(v)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}v, \tag{2}$$

γ étant la densité. Le domaine compact s représente l'intersection du corps T et d'un demi-plan méridien.

Dans les articles [1, 2, 3], le comportement des I_n est étudié sous des hypothèses diverses concernant la structure du corps T. En particulier, il y est démontré pour des planètes du groupe terrestre que les I_n vérifient les inégalités

$$|I_n| \leqslant \frac{\text{const}}{n^{5/2}}$$

et que ces relations sont les plus strictes possibles. En ce qui concerne le corps à densité analytique borné par une surface analytique, on n'a obtenu une évaluation exacte que sous des conditions trop restrictives. Dans l'article présent le cas analytique est examiné sous des conditions naturelles.

Celestial Mechanics **3** (1971) 232–240. *All Rights Reserved*

2. Théorème

(1) Nous ne considerons ici d'autres corps que ceux dont la surface peut-être représentée par une équation de la forme

$$r = W(v), \quad -1 \leqslant v \leqslant +1.$$

Tel est, en particulier, tout corps dont la surface a un seul point commun avec un rayon central arbitraire.

On peut écrire maintenant la formule (2) de la manière suivante

$$I_n = -\pi \int_{-1}^{1} P_n(v)\,\Phi_n(v)\,\mathrm{d}v, \tag{3}$$

où

$$\Phi_n(v) = \frac{2}{M} \int_0^{W(v)} \gamma(r, v)\, r^{n+2}\,\mathrm{d}r. \tag{4}$$

En changeant la variable d'intégration on obtient

$$\Phi_n(v) = \frac{2}{M} W^{n+3}(v) \int_0^1 \gamma(rW(v), v)\, r^{n+2}\,\mathrm{d}r. \tag{5}$$

Définition. On dit qu'un corps T à densité $\gamma(r, v)$ borné par une surface $r = W(v)$ possède une A-structure si:

(a) la fonction $W(v)$ est holomorphe sur $[-1, 1]$;

(b) la fonction $\gamma(rW(v), v)$ est bornée si

$$r \in [0, 1], \quad v \in [-1, 1];$$

(c) la fonction $\gamma(rW(v), v)$ est intégrable au sens de Lebesgue par rapport à r sur $[0, 1]$ pour tout $v \in [-1, 1]$;

(d) la fonction $\gamma(rW(v), v)$ est holomorphe par rapport à v sur $[-1, 1]$ pour tout $r \in [0, 1]$.

Soit un corps T ayant une A-structure. Désignons par $L(R)$ la famille des ellipses dans le plan complexe v ayant leurs foyers aux points ± 1; la somme de leurs demi-axes étant R. Alors il existe $R_1 > 1$ tel que $W(v)$, $\gamma(rW(v), v)$, et donc aussi $\Phi_n(v)$, sont holomorphes quand $v \in L(R)$ $(1 < R < R_1; 0 \leqslant r \leqslant 1)$. Selon la formule de Cauchy, on aura que

$$\Phi_n(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(R)} \frac{\Phi_n(\tilde{v})}{\tilde{v} - v}\,\mathrm{d}\tilde{v} \; (v \in [-1, 1]). \tag{6}$$

Substituons (6) en (3) et changeons l'ordre d'intégration

$$I_n = -\frac{1}{2i} \int\limits_{L(R)} \Phi_n(\tilde{v})\, d\tilde{v} \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(v)}{\tilde{v} - v}\, dv\,.$$

La dernière intégrale est connue:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(v)}{\tilde{v} - v}\, dv = 2Q_n(\tilde{v}),$$

Q_n étant la fonction de Legendre du second genre (voir [4]). On aboutit à mettre l'intégrale (3) sous la forme

$$I_n = i \int\limits_{L(R)} \Phi_n(v)\, Q_n(v)\, dv\,. \tag{7}$$

(2) Evaluons $\Phi_n(v)$. Introduisons la notation

$$p(R) = \frac{1}{R} \max_{v \in L(R)} |W(v)|\,. \tag{8}$$

Fondamental pour ce travail est le fait, démontré en [5], qu'il existe un nombre $R_2 > 1$ tel que l'inégalité $1 < R < R_2$ entraîne

$$p(R) < \max_{v \in [-1,\, 1]} |W(v)|\,.$$

D'après l'unité de longueur que nous avons choisie,

$$\max_{v \in [-1,\, 1]} |W(v)| = 1$$

ainsi

$$p(R) < 1\,. \tag{9}$$

Considérons un rayon R fixe mais arbitraire dans l'intervalle $1 < R < R_3 = \min(R_1, R_2)$. Simplifions les notations:

$$p = p(R), \qquad A = \max_{v \in L(R),\, r \in [0,\, 1]} |\gamma(rW(v), v)|\,.$$

On tire alors de l'égalité (5) que

$$\max_{v \in L(R)} |\Phi_n(v)| \leqslant \frac{2A}{M} (Rp)^{n+3} \int\limits_0^1 r^{n+2}\, dr = \frac{2A}{(n+3)M} (Rp)^{n+3}\,. \tag{10}$$

(3) Evaluons $Q_n(v)$. Comme on peut le voir en [4], si $v \in L(R)$

$$Q_n(v) = \frac{\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\, z^{n+1}} f(x), \tag{11}$$

où

$$z = v + \sqrt{v^2 - 1}, \qquad (|z| = R), \qquad x = \frac{1}{z^2},$$

$$f(x) = F\left(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, x\right).$$

Dans l'intégrale (7) passons à la variable z. L'ellipse $L(R)$ devient la circonférence de rayon R. Passant finalement à l'intégration par rapport à $\varphi\,(z = Re^{i\varphi})$ on aboutit au résultat

$$I_n = -\int_0^{2\pi} \Phi_n(v)\, Q_n(v) \sqrt{v^2 - 1}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Puisque

$$\max_{v \in L(R)} |\sqrt{v^2 - 1}| = \frac{R^2 + 1}{2R},$$

on a l'évaluation suivante

$$|I_n| \leqslant \frac{AR(R^2+1)\,\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{(n+3)\,M\Gamma(n+\frac{3}{2})}\, p^{n+3} \int_0^{2\pi} |f(x)|\, \mathrm{d}\varphi. \tag{12}$$

Développons la fonction hypergéométrique selon les puissances de x

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (|x| = R^{-2} < 1). \tag{13}$$

À l'aide de l'inégalité de Bouniakovsky et de la formule de Cauchy on obtient

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, \mathrm{d}\varphi \leqslant \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, \mathrm{d}\varphi} = 2\pi \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (a_k/R^{2k})^2} < 2\pi \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2}. \tag{14}$$

(4) Il ne reste plus qu'à évaluer la somme de la série (14) dans laquelle

$$a_k = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{3}{2})\,\Gamma(n+k+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+k+\frac{3}{2})}. \tag{15}$$

Utilisons la formule de Wallis

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} = \sqrt{n + \theta(n)/2}. \tag{16}$$

À partir d'ici le symbole θ, éventuellement affecté d'indices, représentera une fonction à valeurs dans l'intervalle (0, 1).

On obtient

$$a_k = \frac{(n+\frac{1}{2})\sqrt{n+k+\theta_1/2}}{(n+k+\frac{1}{2})\sqrt{\pi(k+\theta_2/2)(n+\theta_3/2)}}$$

$$< \sqrt{\frac{n+1+1/4n}{\pi k(n+k+\frac{1}{2})}} < \sqrt{\frac{n+2}{\pi k(n+k+1)}}.$$

Compte tenu du fait que $a_0 = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < 1 + \frac{n+2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k+1)}.$$

La somme de cette dernière série est élémentaire. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < 1 + \frac{n+2}{\pi(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} < 1 + \frac{n+2}{\pi(n+1)} [1 + \ln(n+1)] \tag{17}$$

L'ensemble des Formules (17), (14), (12) donne compte tenu de (16)

$$|I_n| < B_n p^{n+3}, \tag{18}$$

où

$$B_n = \frac{2AR(R^2+1)\pi\sqrt{\pi}}{M(n+3)\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \sqrt{1 + \frac{n+2}{\pi(n+1)}[1 + \ln(n+1)]}. \tag{19}$$

Le facteur $(n+2)/(n+1)$ dans (19) peut-être remplacé par 1 quand $n \geqslant 1$. La preuve en est facile, mais longue, aussi l'omettrons-nous.

Ainsi est démontré le

THÉORÈME. *Soit un corps T ayant une A-structure. Les coefficients I_n dans le développement du potentiel de ce corps diminuent en progression géométrique avec dénominateur*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|I_n|} = p_0 \leqslant p < 1 \tag{20}$$

(5) Dans le théorème il est possible d'éliminer toutes les hypothèses concernant la densité γ si les surfaces d'égale densité sont semblables à celle qui limite le corps T, donc si la densité est de la forme

$$\gamma(r, v) = \delta(r/W(v)).$$

En effet, dans ce cas la Formule (5) donne

$$\Phi_n(v) = \frac{2}{M} W^{n+3}(v) \int_0^1 \delta(r) r^{n+2} \, dr.$$

Aussi les évaluations (18), (19) sont-elles valables avec

$$A = \max_{r\in[0,1]} \delta(r) = \max_{(r,v)\in S} \gamma(r, v).$$

En ce cas A est égal à la densité la plus grande du corps T mais non au module maximum de sa continuation analytique dans le domaine complexe. Mais pour que la limite supérieure (20) soit valable il n'est même pas nécessaire que γ soit bornée, il suffit que $\delta(r)$ soit intégrable. Cette dernière condition, en vertu du théorème de Fubini, équivaut à l'existence de l'intégrale (2) qui détermine I_n.

Alors, le théorème est valable si la fonction $W(v)$ est holomorphe sur $[-1, 1]$ et si les surfaces d'égale densité sont semblables à celle qui limite le corps T.

3. Exemples

Les conditions du théorème sont assez simples. Par exemple, elles ne contiennent même pas un mot sur des points singuliers, contrairement à ce qui concerne des fonctions d'une seule variable. Une fonction $g(v)$ analytique sur $[-1, 1]$ est développable en polynômes de Legendre

$$g(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{I}_n P_n(v).$$

Cette série converge comme une progression géométrique

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\bar{I}_n|} = \bar{p} < 1,$$

et les points singuliers sont d'autant plus éloignés que $\bar{p}$ est plus petit (voir [6]). Pour des fonctions entières, on a que $\bar{p}=0$.

Dans notre cas la circonstance prépondérante est la vitesse d'accroissement de $W(v)$; p_0 ne dépend que faiblement de la disposition des points singuliers. Pour une fonction $W(v)$ même *entière* et $\gamma(r, v)$ *constante* le dénominateur de progression p_0 peut-être aussi voisin de l'unité qu'on veut, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple I. Le corps T est tel que

$$\gamma(r, v) = 1, \; W(v) = v^{2s} \quad (s\text{-entier positif})$$

En vertu de la symétrie équatoriale, toutes les harmoniques impaires s'annulent, ainsi que celles paires sont, d'après (3) et (5), égales à

$$I_{2n} = -\frac{2\pi}{M(2n+3)} \int_{-1}^{1} v^{2s(2n+3)} P_{2n}(v)\, dv \tag{21}$$

L'intégrale dernière est bien connue (voir [4]):

$$I_{2n} = -\frac{2\pi}{M(2n+3)} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(4sn+6s+1)}{2^{4sn+6s} \Gamma[(2s-1)n+3s+1]\, \Gamma[(2s+1)n+3s+\frac{3}{2}]}$$

La formule de Stirling donne

$$I_{2n} = -\frac{\omega(n)}{n^2} \left[\frac{(2s)^{4s}}{(2s-1)^{2s-1}(2s+1)^{2s+1}}\right]^n$$

avec les relations

$$0 < c_1 \leqslant \omega(n) \leqslant c_2 < \infty \; (c_1, c_2 = \text{const}).$$

Il en résulte que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|I_n|} = p_0 = \sqrt{\frac{(2s)^{4s}}{(2s-1)^{2s-1}(2s+1)^{2s+1}}}. \tag{22}$$

La quantité p_0 croît avec s car

$$\frac{\mathrm{d} \ln p_0}{\mathrm{d}s} = \ln \frac{4s^2}{4s^2-1} > 0.$$

Pour les grandes valuers de s,

$$p_0 = \sqrt{\frac{1-1/2s}{1+1/2s}}\, e^{2s \ln(1+1/4s^2-1)} = 1 - \frac{1}{4s} + \cdots$$

et on peut prendre p_0 aussi voisin de l'unité qu'on veut en choisissant s convenablement.

Voyons maintenant combien la valuer de p donnée par le théorème est voisine de la vraie valeur de p_0. Dans notre exemple

$$p(R) = \frac{1}{R} \max_{v \in L(R)} |v^{2s}| = \frac{1}{R}\left(\frac{R^2+1}{2R}\right)^{2s} \tag{23}$$

et $R_1 = R_2 = R_3 = \infty$, c'est-à-dire que tous les $R > 1$ sont admissibles. La fonction (23) prend sa valeur minimum quand

$$R = \sqrt{\frac{2s+1}{2s-1}}.$$

Donc

$$p = \min_R p(R) = \sqrt{\frac{2s-1}{2s+1}} \left[\frac{2s}{\sqrt{4s^2-1}}\right]^{2s},$$

ce qui coïncide avec la vraie valeur de p_0.

Exemple 2. Le corps T est un ellipsoïde de révolution aplati homogène:

$$\gamma(r, v) = 1, \qquad W(v) = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} v^2\right)^{-1/2}. \tag{24}$$

ε étant l'excentricité de l'ellipse méridienne.

Le développement du potentiel d'un ellipsoïde homogène est bien connu (voir [7]), et p_0 y est égal à l'excentricité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|I_n|} = p_0 = \varepsilon \tag{25}$$

Voyons quelle est la valeur de p donnée par le théorème. L'équation paramétrique d'une ellipse $L(R)$ peut-être représentée sous la forme

$$v = \frac{R^2+1}{2R}\cos E + i\,\frac{R^2-1}{2R}\sin E, \quad (E \in [0, 2\pi])$$

d'où

$$\left|1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} v^2\right|^2 = \left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)}\left[1 + \frac{R^4+1}{2R}\cos 2E\right]\right\}^2 + \frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}\,\frac{(R^4-1)^2}{16R^4}\sin^2 2E. \tag{26}$$

Cette fois la fonction (24) a des points singuliers à distance finie

$$v = \pm\, i\sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon$$

et c'est pourquoi

$$\frac{R^2-1}{2R} < \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}. \tag{27}$$

En d'autres termes

$$R < R_1 = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}. \tag{28}$$

On voit facilement compte tenu de (27) que l'expression (26) est minimale quand $\cos 2E = -1$. Il en résulte que

$$\min_{v \in L(R)} \left|1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} v^2\right|^2 = \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,\frac{(R^2-1)^2}{4R^2}\right]^2,$$

$$p(R) = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\,\frac{(R^2-1)^2}{4R^2}\right]^{-1/2}.$$

Cette dernière quantité est minimale quand $R = \sqrt{2-\varepsilon^2}/\varepsilon < R_1$, et

$$p = \min_R p(R) = \varepsilon$$

ce qui coïncide avec la valeur véritable.

Remarque. La formule (25) ne cesse pas d'être vraie même pour un ellipsoïde hétérogène dont les surfaces d'égale densité sont des ellipsoïdes semblables à l'excentricité ε. Cette formule vaut même dans le cas plus général d'un ellipsoïde hétérogène pour lequel la fonction

$$\gamma\left(r\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} v^2\right)^{-1/2}, v\right)$$

est holomorphe par rapport à v quand $r \in [0, 1]$, $v \in L(R)$

$$(1 < R < \sqrt{2-\varepsilon^2}/\varepsilon).$$

4. Conclusions

Les coefficients I_n d'un corps ayant une A-structure diminuent en progression géométrique. Les exemples examinés montrent que l'évaluation suivante du dénominateur de cette progression

$$p = \inf_{1<R<R_3} \left\{ \frac{1}{R} \max_{v \in L(R)} |W(v)| \right\} \tag{29}$$

est la meilleure possible dans les conditions du théorème.

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement le Professeur N. A. Lebedev et le Professeur H. I. Natanson de l'Université de Léningrad, le Professeur A. Deprit de Boeing Scientific Research Laboratories, qui ont relu ces notes et avec lesquels j'ai eu de fructueuses discussions.

Bibliographie

[1] Холшевников, К. В.: 1965, 'О величине коэффициентов разложения потенциала', *Вестник Лен. Унив.* № 13, 155–158.
[2] Холшевников, К. В.: 1968, 'О величине коэффициентов при тессеральных гармониках', *Вестник Лен. Унив.* № 1, 149–153.
[3] Холшевников, К. В.: 1970, 'О величине коэффициентов при зональных гармониках', сборник *Труды совещания по общим вопросам небесной механики.*
[4] Hobson, E. W.: 1931, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge.
[5] Холшевников, К. В.: 1971, 'О росте функции в окрестности отрезка голоморфности', *Вестник Лен. Унив.*, № 1.
[6] Szegö, G.: 1959, *Orthogonal Polynomials*, New York.
[7] Tisserand, F.: 1891, *Traité de mécanique céleste*, tome II, Paris.