DIE BEWEGUNG IN DER NÄHE DER DREIECKSPUNKTE DES ELLIPTISCHEN EINGESCHRÄNKTEN DREIKÖRPERPROBLEMS

J. TSCHAUNER
Messerschmitt-Bölkow-Blohm GmbH, München, Deutschland

(Eingegangen am 7. Juli, 1970)

Herrn Prof. Dr. L. Merz, TH München, zum 65. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung. Die Gleichungen der Bewegung des kleinen Körpers in der Nähe der Dreieckspunkte L_4, L_5 des elliptischen eingeschränkten Dreikörperproblems werden mit Hilfe einer einfachen Transformation explizit in zwei unabhängige Komponenten aufgespalten, welche den bekannten Bewegungsfamilien d und e des Kreisfalles entsprechen. Aufgrund dieser Zerlegung wird für die Bewegung im elliptischen Fall eine erste Stabilitätsgrenze berechnet, welche die Ergebnisse anderer Autoren präzisiert.

Die Arbeit wurde vom Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft in Bonn gefördert. Der Verfasser dankt dem Ministerium für die erwiesene Unterstützung.

Abstract. A simple transformation is used to divide explicitly the equations of motion of an infinitesimal body in the neighborhood of the triangular points L_4, L_5 in the elliptic restricted Three-Body-Problem into two independent components corresponding to the well-known families of motion d and e in the circular case. This separation immediately gives a first stability constraint for the elliptic case which is more exact than the results prior given by other authors.

The work presented in this paper was supported by the Federal Ministry of Scientific Research in Bonn, Germany. The author gratefully acknowledges the sponsorship granted by the Ministry.

1. Einleitung

Die ebene Bewegung des kleinen Körpers in der Nähe der Dreieckspunkte L_4, L_5 des elliptischen eingeschränkten Dreikörperproblems genügt einem System von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, in welches das Massenverhältnis m und die Exzentrizität e der elliptischen Revolution der beiden schweren Massen als Parameter eingehen. Für dieses System von der Gesamtordnung 4 ist keine geschlossene Lösung bekannt. Nur in den Sonderfällen $e=0$, bzw. $m=0$ kennt man geschlossene Lösungen. Im Falle $e=0$, also bei kreisförmiger Revolution der Massen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt ist das Gleichungssystem konstant und daher in geschlossener Form lösbar. In diesem Fall besteht die Bewegung, wenn das Massenverhältnis gewisse Grenzen einhält, aus zwei unabhängigen Komponenten von je 2. Ordnung, einer langperiodischen Komponente d mit der Periode T/β_1, bzw. einer kurzperiodischen Komponente e mit der Periode T/β_2, wenn T die Periode der Revolution bezeichnet (Charlier, 1899; Stumpff, 1965). Diese Komponenten lassen sich leicht trennen. Die Bewegung des kleinen Körpers erfolgt dann bei passenden Anfangsbedingungen auf infinitesimalen Ellipsen der Familie d, bzw. e mit Mittelpunkt im Dreieckspunkt.

Im Fall $m=0$ und $e\geqslant 0$ gehen die Gleichungen des Problems in die explizit lösbaren

Celestial Mechanics **3** (1971) 189–196.

Gleichungen für die Abweichungen von einer elliptischen Bezugsbewegung über. Es ist bekannt, daß diese Abweichungen mit der Zeit anwachsen, wenn nicht ganz bestimmte Anfangsbedingungen vorliegen.

Die Untersuchung der Bewegung des kleinen Körpers bei $m > 0$ und bei elliptischer Revolution der Massen wurde erst in jüngster Zeit in Angriff genommen. Sie beschäftigt sich im wesentlichen mit dem Problem der Stabilität dieser Bewegung (Danby, 1964; Szebehely, 1967; Alfriend und Rand, 1969) wobei je nach dem verwendeten Näherungsverfahren verschiedene Stabilitätsbereiche in der Ebene der Parameter m und e berechnet wurden. Das Problem der Aufspaltung der Bewegungsgleichungen des elliptischen Falles in Komponenten wie im Kreisfall wurde von anderer Seite noch nicht in Betracht gezogen. Erst in Tschauner (1969) wurde dazu ein noch unvollkommener Versuch gemacht.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe einer einfachen Transformation und durch explizite Lösung einer nichtlinearen inhomogenen Vektordifferentialgleichung eine exakte Aufspaltung der Bewegungsgleichungen des elliptischen Falles in zwei unabhängige Komponenten vorgelegt, die mit $e \to 0$ in die Gleichungen der Bewegungsfamilien d bzw. e des Kreisfalles übergehen. Man darf daher diese Komponenten als Verallgemeinerungen der Familien d bzw. e ansehen, wenn man die Bedingung fallen läßt, daß die damit definierten Bewegungen geschlossen sein müssen. Die Aufspaltung der Gleichungen des elliptischen Falles ergibt unmittelbar eine erste exakte Stabilitätsgrenze in der Ebene der Parameter m und e.

2. Die Aufspaltung der Bewegungsgleichungen

Die Bewegung des kleinen Körpers in der Nähe von L_4, L_5 genügt bei elliptischer Revolution der Massen den linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten (Alfriend und Rand, 1969).

$$\begin{aligned} x'' - 2y' &= r(\vartheta)\, c_1 x\,, \\ y'' + 2x' &= r(\vartheta)\, c_2 y\,, \end{aligned} \qquad c_1, c_2 = \tfrac{3}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - 3m(1-m)}\right). \tag{2.1}$$

In diesen Gleichungen sind x, y infinitesimale bezogene Abweichungen von Dreieckspunkt, $r(\vartheta) = 1/(1 + e\cos\vartheta)$ ist ein periodischer Faktor mit Periode $2\pi(T)$, $m = M_2/(M_1 + M_2)$ bezeichnet das Verhältnis der kleineren Masse M_2 zur Gesamtmasse des Systems und e ist die Exzentrizität der elliptischen Revolution der Massen. Der Strich deutet die Differentiation nach der wahren Anomalie ϑ der Revolution an, die als unabhängige Veränderliche benützt wird.

Nach Einführung der zweidimensionalen Vektoren $x_1 = (x, y)$, $x_2 = (x', y')$ lauten die Gleichungen (2.1) in Matrixschreibung

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ rC & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A(\vartheta) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Darin ist $A(\vartheta)$ eine periodische 4×4 Matrix und

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

sind konstante 2×2 Matrizen.

Im Kreisfall $e=0$, $r=1$ sind die Gleichungen (2.1), (2.2) konstant. Ihr charakteristisches Polynom hat mit $c_1+c_2=3$, $c_1c_2=\frac{27}{4}m(1-m)$ die biquadratische Form

$$s^4 + s^2 + \tfrac{27}{4}m(1-m) = (s^2+\beta_1^2)(s^2+\beta_2^2),$$

wobei

$$\beta_1^2, \beta_2^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-27m(1-m)}\right).$$

Die Eigenwerte sind rein imaginär und einfach, wenn die Diskriminante die Bedingungen

$$0 < \sqrt{1-27m(1-m)} < 1 \tag{2.3}$$

erfüllt. Dies ist dann gegeben, wenn

$$0 < m < m_0 = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\tfrac{23}{27}}\right) = 0{,}03852. \tag{2.4}$$

Wir formen die Gleichungen des Kreisfalles $(r=1)$ mit Hilfe der einfachen Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

mit der wir einen Vektor (y_1, y_2) einführen, um in

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Die zweidimensionalen Teilvektoren y_1, y_2 genügen daher den Gleichungen

$$y_1' = B_1 y_1, \qquad y_2' = B_2 y_2. \tag{2.7}$$

Die konstanten 2×2 Matrizen

$$\begin{aligned} B_1 &= \tfrac{1}{2}D(C+\beta_1^2 E), & B_2 &= \tfrac{1}{2}D(C+\beta_2^2 E), \\ B_1^2 &= -\beta_1^2 E, & B_2^2 &= -\beta_2^2 E \end{aligned} \tag{2.8}$$

hängen nur von β_1 bzw. β_2 ab. Sie sind verschieden, wenn β_1 und β_2 verschieden sind. Dies ist sicher dann der Fall, wenn (2.3) erfüllt wird.

Damit ist die Aufspaltung der Bewegungsgleichungen des Kreisfalles in zwei unabhängige Komponenten 2. Ordnung bewerkstelligt. Denn wählen wir etwa $y_2(0)=0$, womit auch $y_2(\vartheta)=0$, so besteht die Bewegung nur aus der Komponente y_1, die man allgemein in der Form

$$y_1(\vartheta) = \left(E\cos\beta_1\vartheta + \frac{B_1}{\beta_1}\sin\beta_1\vartheta\right) y_1(0) \tag{2.9}$$

darstellen kann. Diese Formel charakterisiert die Bewegungsfamilie d des Kreisfalles, eine periodische Bewegung mit der Periode T/β_1, wenn die Voraussetzung (2.3) gegeben ist.

Wir versuchen nun, durch eine zu (2.5) analoge Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

mit noch zu bestimmenden variablen 2×2 Matrizen P_1, P_2 die Aufspaltung der Bewegungsgleichungen (2.2) des elliptischen Falles in

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

zu vollziehen. Die zweidimensionalen Teilvektoren y_1, y_2 sollen den Gleichungen

$$y'_1 = P_1(\vartheta)\, y_1\,, \qquad y'_2 = P_2(\vartheta)\, y_2 \tag{2.12}$$

genügen. Die Aufspaltung (2.11) und (2.12) setzt voraus, daß die Matrizen P_1, P_2 verschiedene Lösungen der nichtlinearen, inhomogenen Vektordifferentialgleichung

$$P' = 2DP - P^2 + r(\vartheta)\, C \tag{2.13}$$

sind. Im Kreisfall $r=1$ hat diese Gleichung die einfachen Lösungen $P=B_1$ bzw. $P=B_2$. Wir zeigen im folgenden, daß die Gleichung (2.13) auch im elliptischen Fall zwei relativ einfache geschlossene Lösungen P_1, P_2 besitzt, da man sie auf ein System von zwei skalaren Differentialgleichungen 2. Ordnung, von denen eine linear ist, zurückführen kann, dessen Lösung mit einem einfachen Ansatz möglich ist. Die beiden Lösungen unterscheiden sich durch eine gegenüber (2.3) verallgemeinerte Diskriminante, welche von m und e abhängig ist.

3. Die Lösung der Gleichung (2.13)

Die vier Elemente p_{ij} der Matrix $P(\vartheta)$ genügen nach (2.13) den nichtlinearen, inhomogenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} p'_{11} &= \quad 2p_{21} - p_{11}^2 - p_{12}p_{21} + c_1 r(\vartheta) \\ p'_{22} &= -\,2p_{12} - p_{22}^2 - p_{12}p_{21} + c_2 r(\vartheta) \\ p'_{12} &= \quad 2p_{22} - p_{12}(p_{11} + p_{22}) \\ p'_{21} &= -\,2p_{11} - p_{21}(p_{11} + p_{22}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir formen diese Gleichungen durch Einführung neuer Variabler w, z, u, v

$$p_{11} = w + z\,, \qquad p_{22} = w - z\,, \qquad p_{12} = u - v + 1\,, \qquad p_{21} = u + v - 1 \tag{3.2}$$

um in

$$\begin{aligned} w' &= -\,1 - w^2 - z^2 - u^2 + v^2 + \tfrac{3}{2} r(\vartheta) \\ z' &= 2u - 2wz - \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)\, r(\vartheta) \\ u' &= -\,2z - 2uw \\ v' &= -\,2vw\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (3.3) erhalten wir die Darstellung

$$w = \tfrac{1}{2}v\left(\frac{1}{v}\right)', \qquad z = -\tfrac{1}{2}v\left(\frac{u}{v}\right)'. \tag{3.4}$$

Die Elemente der Matrix $P(\vartheta)$ sind jetzt durch die Formeln

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{v}{2}\left(\left(\frac{1}{v}\right)' - \left(\frac{u}{v}\right)'\right), & p_{22} &= \frac{v}{2}\left(\left(\frac{1}{v}\right)' + \left(\frac{u}{v}\right)'\right), \\ p_{12} &= v\left(\frac{1}{v} + \frac{u}{v} - 1\right), & p_{21} &= -v\left(\frac{1}{v} - \frac{u}{v} - 1\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

bestimmt, in denen nur noch die beiden Funktionen $p=1/v$, $q=u/v$ auftreten. Diese Funktionen genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &pp'' - \tfrac{1}{2}p'^2 + (2-3r)\,p^2 - 2 = -2\left(q^2 + \tfrac{1}{4}q'^2\right), \\ &\;q'' + 4q = (c_2 - c_1)\,rp. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die zweite Gleichung ist linear. Die erste Gleichung läßt sich durch nochmalige Differentiation und Berücksichtigung der zweiten auf eine lineare Gleichung zweiter Ordnung für p' zurückführen, worauf wir aber hier verzichten. Die zweite Gleichung (3.6) wird bequem lösbar sein, wenn die Funktion p die Form

$$p = k_0/r = k_0(1 + e\cos\vartheta) \tag{3.7}$$

haben sollte, da in diesem Fall ihre rechte Seite konstant wäre. Wir zeigen, daß man mit diesem Ansatz und mit einer dann passend zu bestimmenden Funktion q die Gleichungen (3.6) tatsächlich eindeutig befriedigen kann. Bei Annahme von p (3.7) mit der noch freien Konstanten k_0 hat die zweite Gleichung (3.6) die einfache Form

$$q'' + 4q = (c_2 - c_1)\,k_0$$

mit konstanter rechter Seite. Wir wählen als Lösung

$$q = (c_2 - c_1)\,k_0/4 + k_1\cos 2\vartheta \tag{3.8}$$

mit einer weiteren freien Konstanten k_1. Führen wir nun (3.7) und (3.8) in die erste Gleichung (3.6) ein, so entsteht, da sich die Terme mit $\cos\vartheta$ wegheben, der Zusammenhang

$$\begin{aligned} &k_0^2\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) + 2 - \tfrac{3}{4}k_0^2e^2\cos 2\vartheta \\ &\qquad = (c_2 - c_1)^2\,\frac{k_0^2}{8} + 2k_1^2 + (c_2 - c_1)\,k_0k_1\cos 2\vartheta. \end{aligned}$$

Um ihn zu befriedigen, müssen die Konstanten die Beziehungen

$$\begin{aligned} &k_0^2\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) + 2 = (c_2 - c_1)^2\,\frac{k_0^2}{8} + 2k_1^2, \\ &-\tfrac{3}{4}k_0^2e^2 = (c_2 - c_1)\,k_0k_1, \end{aligned}$$

erfüllen. Aus der zweiten erhalten wir $k_1 = -ke^2k_0/4$ mit $k = 3/(c_2 - c_1)$. Die erste Beziehung führt dann zu

$$k_0 = \pm 4/\sqrt{1 - 27m(1-m) + 2e^2 + k^2e^4}, \quad k^2 = [1 - 3m(1-m)]^{-1}. \tag{3.9}$$

Damit sind die Funktionen p, q vollständig und eindeutig bestimmt. Die verschiedenen Vorzeichen in (3.9) zeigen an, daß wir mit diesen Lösungen sowohl die Elemente von P_1, als auch die Elemente von P_2 berechnen können. Die P_1, P_2 sind verschieden, wenn die Diskriminante

$$c(m, e) = \sqrt{1 - 27m(1-m) + 2e^2 + k^2e^4} > 0 \tag{3.10}$$

von Null verschieden ist. Aus dieser Bedingung ergibt sich unmittelbar eine erste Stabilitätsgrenze in der Ebene der Parameter m und e

$$e^2 > \sqrt{8g(1-g)} - (1-g), \quad g = 3m(1-m), \tag{3.11}$$

eine Kurve, welche die m-Achse im Punkt $m = m_0$ $(g = \frac{1}{9})$ senkrecht trifft und sich dann in Richtung wachsender m wendet. Dieses Ergebnis zeigt, daß im elliptischen Fall Werte $m > m_0$ zulässig sein werden. Zu ähnlichen Ergebnissen führen auch die in Danby (1964); Alfriend und Rand (1969) verwendeten Näherungsverfahren. Die Grenze (3.11) ist aber jetzt nach der gelungenen Zerlegung der Gleichungen (2.1), (2.2) des elliptischen Problems exakt begründet.

Anhand von (3.7), (3.8), (3.9) erhalten wir nun die Elemente der Matrizen P_1, P_2

$$\begin{aligned}
p_{11} &= -r\left(\frac{e}{2}\sin\vartheta + \frac{ke^2}{4}\sin 2\vartheta\right), \quad p_{22} = -r\left(\frac{e}{2}\sin\vartheta - \frac{ke^2}{4}\sin 2\vartheta\right),\\
p_{12} &= r\left(a_2 + e\cos\vartheta - \frac{ke^2}{4}\cos 2\vartheta\right)\\
p_{21} &= -r\left(a_1 + e\cos\vartheta + \frac{ke^2}{4}\cos 2\vartheta\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $a_1 = \frac{1}{4}(2c_1 + 1 \mp c)$, $a_2 = \frac{1}{4}(2c_2 + 1 \mp c)$. Für $e = 0$ wird $p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{12} = (c_2 + \beta_1^2)/2$, $p_{21} = -(c_1 + \beta_1^2)/2$ bzw. $p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{12} = (c_2 + \beta_2^2)/2$, $p_{21} = -(c_1 + \beta_2^2)/2$. Dies sind gerade die Elemente der Matrizen B_1, B_2, welche die Bewegungsfamilien d bzw. e des Kreisfalles charakterisieren.

Die Matrizen P_1, P_2 enthalten den gemeinsamen Faktor $r(\vartheta)$, so daß

$$P(\vartheta) = r(\vartheta)\,Q(\vartheta).$$

Auch ihre Determinanten

$$d(\vartheta) = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = r(\vartheta)\left(\frac{1 \mp c}{2} + \tfrac{3}{2}e\cos\vartheta\right) = r(\vartheta)\,f(\vartheta) \tag{3.13}$$

haben diesen Faktor. Die Quadrate von P_1, P_2 sind durch die Formel

$$P^2 = (p_{11} + p_{22})P - \mathrm{d}(\vartheta)\,E \tag{3.14}$$

bestimmt. Da $p_{11}+p_{22}=-re\sin\vartheta=-r'/r$, erhalten wir nach Einführung von $P=rQ$ und P^2 (3.14) in (2.13) für die Matrix $Q(\vartheta)$ eine einfache, lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$Q' = 2DQ + C + f(\vartheta)\,E. \tag{3.15}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$Q(\vartheta) = e^{2D\vartheta}Q(0) + \int_0^\vartheta e^{2D(\vartheta-\tau)}(C + f(\tau)\,E)\,d\tau,$$
$$e^{2D\vartheta} = E\cos 2\vartheta + D\sin 2\vartheta$$

führt mit $Q(0)=P(0)/r(0)$ gerade wieder zu der auf anderem Wege berechneten Matrix $Q(\vartheta)=P(\vartheta)/r(\vartheta)$.

Durch die Bestimmung der Matrizen P_1, P_2 ist die Aufspaltung der Gleichungen der Bewegung des kleinen Körpers in der Nähe der Dreieckspunkte des elliptischen eingeschränkten Dreikörperproblems in zwei unabhängige Komponenten 2. Ordnung in eindeutiger geschlossener Form vollzogen. Bei künftigen Untersuchungen dieser Bewegung darf man daher die Komponenten getrennt betrachten, wenn die Voraussetzung (3.10) erfüllt ist.

4. Zusammenfassung

In der Arbeit wurde die Aufspaltung der Gleichungen der Bewegung des kleinen Körpers in der Nähe der Dreieckspunkte L_4, L_5 des elliptischen eingeschränkten Dreikörperproblems in zwei unabhängige Komponenten 2. Ordnung in geschlossener Form durchgeführt. Als unmittelbare Folge dieser Zerlegung ergab sich eine erste exakte Stabilitätsgrenze in der Ebene der Parameter m und e des Problems, die bisher nur näherungsweise bekannt war. Die Differentialgleichungen der Komponenten des elliptischen Problems sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Gleichungen des Kreisfalles. Sie beschreiben im allgemeinen keine geschlossenen periodischen Bewegungen wie im Kreisfall. Nur bei bestimmten Werten des Massenverhältnisses m und der Exzentrizität e, bei denen sich für die Komponente y_1 eine Grundperiode $T_1=nT$ ($n=3, 4,\ldots$) einstellt, ist auch im elliptischen Fall eine geschlossene periodische Bewegung denkbar.

Die Aufspaltung der Variationsgleichungen des elliptischen Problems ist in der hier vorgelegten Weise immer möglich, wenn die Diagonalelemente der Matrix C die Summe 3 haben, wie es für die Dreieckspunkte und für eine unendliche Menge weiterer Punkte der rotierenden Ebene zutrifft. Diese Punkte sind durch die Formel $(1-m)/r_1^3+m/r_2^3=1$ definiert, in der r_1, r_2 die bezogenen Abstände von den Massen M_1 bzw. M_2 bezeichnen. Die kollinearen Librationszentren gehören nicht zu dieser Menge.

Literatur

Alfriend, K. T. und Rand, R. H.: (1969), 'Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies, *AIAA J.*, 7, 1024–1028.
Charlier, C. V. L., 1899: 'Über das reduzierte Dreikörperproblem', *Meddelanden fran Lunds Observatorium* Nr. 6.
Danby, J. M. A.: 1964, 'Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies', *Astron. J.* **69**, 165–172.
Stumpff, K.: 1965, *Himmelsmechanik*, Bd. II, Berlin.
Szebehely, V.: 1967, *Theory of Orbits*, Academic Press, New York and London, p. 599.
Tschauner, J.: 1969, 'Die Bewegung der Librationspunkte', Forschungsbericht W, 69-35 des Bundesministeriums für wissenschaftliche Forschung, Bonn.