Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten

Von

Otto H. Kegel

Seit Wielandts grundlegender Arbeit [1] weiß man, daß die Menge $\mathfrak{sn}(G)$ der Subnormalteiler einer endlichen Gruppe G einen Teilverband des Verbandes $\mathfrak{s}(G)$ aller Untergruppen von G bildet. In dieser Note sollen $2^{\aleph_0}$ solcher Funktionen $\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}$ angegeben werden, die jeder endlichen Gruppe G einen Untergruppenverband $\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ zuordnen, der $\mathfrak{sn}(G)$ als Teilverband enthält, und die mit $\mathfrak{sn}$ die folgende Invarianzeigenschaft besitzen: Ist φ ein Homomorphismus der endlichen Gruppe G, so gilt

$$\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G^{\varphi}) = (\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G))^{\varphi}.$$

1. Es sei eine Klasse $\mathfrak{C}$ endlicher Gruppen vorgegeben, die gegen Erweiterungen, homomorphe Bilder und Untergruppen abgeschlossen ist. In jeder endlichen Gruppe G definiert die Klasse $\mathfrak{C}$ zwei charakteristische Untergruppen: $G^{\mathfrak{C}}$, den kleinsten Normalteiler von G so, daß die Faktorgruppe $G/G^{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{C}$ erfüllt, und $G_{\mathfrak{C}}$, den größten in $\mathfrak{C}$ liegenden Normalteiler von G.

Die Untergruppe U der endlichen Gruppe G heißt $\mathfrak{C}$-*normal* in G, falls entweder U normal in G ist oder aber $G/U_G \in \mathfrak{C}$ — dabei ist $U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$. Die Untergruppe U heißt $\mathfrak{C}$-*subnormal* in G, falls es eine aufsteigende Kette $\{U_i;\ 0 \leqq i \leqq n\}$ von Untergruppen U_i von G zwischen $U = U_0$ und $U_n = G$ derart gibt, daß jedes U_i $\mathfrak{C}$-normal in U_{i+1} ist, für $0 \leqq i < n$. — Die Menge aller $\mathfrak{C}$-subnormalen Untergruppen von G werde mit $\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ bezeichnet.

Offensichtliche Beispiele für $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppen von G sind außer den Subnormalteilern die Untergruppen von $G_{\mathfrak{C}}$ und die Untergruppen von G, die $G^{\mathfrak{C}}$ enthalten. — Man bemerke, daß die nicht-abelsch einfache Gruppe G genau dann eine echte $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe besitzt, wenn $G \in \mathfrak{C}$.

Ziel dieser Note ist der Nachweis, daß $\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ mit den Operationen „Durchschnitt" und „Erzeugnis" ein Teilverband von $\mathfrak{s}(G)$ ist. (Alle in dieser Note auftretenden Gruppen sind endlich.)

2. Zunächst beschaffen wir uns einige Invarianzeigenschaften der zu $\mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ gehörigen Untergruppen von G.

Lemma 1. *Für $U \in \mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ und jede Untergruppe V von G gilt $U \cap V \in \mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(V)$. Insbesondere gilt $U \cap V \in \mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$, falls $U, V \in \mathfrak{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$.*

Beweis. Sei $\{U_i; 0 \leqq i \leqq n\}$ eine aufsteigende Kette von Untergruppen von G mit $U = U_0$ und $U_n = G$ derart, daß U_i eine $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe von U_{i+1} ist für $0 \leqq i < n$. Dann ist in der Kette $\{U_i \cap V; 0 \leqq i \leqq n\}$ die Untergruppe $U_i \cap V$ $\mathfrak{C}$-normal in $U_{i+1} \cap V$. Das ist klar, falls U_i in U_{i+1} normal ist. Sei $K = \bigcap_{x \in U_{i+1}} U_i^x$ und $U_{i+1}/K \in \mathfrak{C}$. Dann gilt $K \cap V \subseteqq L = \bigcap_{x \in V \cap U_{i+1}} (V \cap U_i)^x$, und $(U_{i+1} \cap V)/L$ ist ein homomorphes Bild der Gruppe $(U_{i+1} \cap V)/(K \cap V)$, die zu einer Untergruppe von U_{i+1}/K isomorph ist. Daher gilt $(U_{i+1} \cap V)/L \in \mathfrak{C}$.

Im wesentlichen die gleichen Überlegungen ergeben

Lemma 2. *Ist φ ein Homomorphismus von G und ist $U \in \mathbf{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$, so gilt $U^{\varphi} \in \mathbf{sn}_{\mathfrak{C}}(G^{\varphi})$. Ist umgekehrt U das volle Urbild von $V \in \mathbf{sn}_{\mathfrak{C}}(G^{\varphi})$ bezüglich φ in G, so gilt $U \in \mathbf{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$.*

3. Als nächstes benötigen wir zwei Ergebnisse, die die Lage gewisser $\mathfrak{C}$-subnormaler Untergruppen genauer beschreiben.

Satz 3. *Gehört die $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe U der endlichen Gruppe G der Klasse $\mathfrak{C}$ an, so gilt $U \subseteqq G_{\mathfrak{C}}$.*

Beweis. Wäre dieser Satz falsch, so gäbe es unter den endlichen Gruppen, die $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppen aus $\mathfrak{C}$ besitzen, deren normale Hülle nicht in $\mathfrak{C}$ liegt, eine Gruppe G minimaler Ordnung. Wir studieren diese Gruppe G und leiten aus der Annahme ihrer Existenz einen Widerspruch her.

a) *Die Gruppe G besitzt einen einzigen minimalen Normalteiler $M \neq \langle 1 \rangle$, und es gilt $M \notin \mathfrak{C}$.*

Ist U irgendeine $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe aus $\mathfrak{C}$ von G, so gilt für jeden minimalen Normalteiler M $(\neq \langle 1 \rangle)$ von G wegen der Minimalität von G sicher $UM/M \subseteqq (G/M)_{\mathfrak{C}}$. Wäre ein minimaler Normalteiler M von G in $\mathfrak{C}$, so wäre wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{C}$ unter Erweiterungen das Urbild X in G der Gruppe $(G/M)_{\mathfrak{C}}$ selbst eine $\mathfrak{C}$-Gruppe, die U enthält. Ein Widerspruch zur Annahme über G! — Seien M und N zwei verschiedene minimale Normalteiler von G, so gilt $M \cap N = \langle 1 \rangle$, und G wird durch die durch $g \mapsto (gM, gN)$ definierte Abbildung φ treu in das direkte Produkt $G/M \times G/N$ eingebettet. Daher gilt $U^{\varphi} \subseteqq (G/M)_{\mathfrak{C}} \times (G/N)_{\mathfrak{C}} = (G/M \times G/N)_{\mathfrak{C}}$ Aber dann hat man mit

$$G_{\mathfrak{C}}{}^{\varphi} \supseteqq G^{\varphi} \cap (G/M \times G/N)_{\mathfrak{C}} \supseteqq U^{\varphi}$$

einen Widerspruch, falls $U^G \notin \mathfrak{C}$.

b) *Für den minimalen Normalteiler M von G gilt $G/M \in \mathfrak{C}$.*

Ist das Urbild X in G der Gruppe $(G/M)_{\mathfrak{C}}$ von G verschieden, so erhält man wegen der Minimalität von G und wegen $U \subseteqq X$ sogar $U \subseteqq X_{\mathfrak{C}}$ für jede $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe $U \in \mathfrak{C}$ von G. Weil $M \notin \mathfrak{C}$, hat man $M \cap X_{\mathfrak{C}} = \langle 1 \rangle$. Aus der Existenz einer solchen Untergruppe $U \neq \langle 1 \rangle$ in G folgt $X_{\mathfrak{C}} \neq \langle 1 \rangle$ — ein Widerspruch zur Einzigkeit von M.

c) *Ist $U \neq \langle 1 \rangle$ eine $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppe aus $\mathfrak{C}$ von G, so gilt $UM = G$.*

Ist $UM \neq G$, so gilt wegen der Minimalität von G die Beziehung $U \subseteqq (UM)_{\mathfrak{C}}$, und $(UM)_{\mathfrak{C}} \cap M = \langle 1 \rangle$. Ist M nicht abelsch, so ist der Zentralisator $\mathbf{C}_G M \neq \langle 1 \rangle$. Dies ergibt einen Widerspruch zur Einzigkeit von M. Ist M abelsch, so gilt $M^p = \langle 1 \rangle$ für eine Primzahl p. Weil $\mathfrak{C}$ unter Erweiterungen abgeschlossen ist, gehört auch die zyklische Gruppe der Ordnung p nicht zu $\mathfrak{C}$, kommt also nicht in der $\mathfrak{C}$-Gruppe G/M vor. Daher hat M nach dem Satz von Schur-Zassenhaus ein Komplement Q in G: $QM = G$ und $M \cap Q = \langle 1 \rangle$. Dann gilt für den Zentralisator $\mathbf{C}_G M = M\,(Q \cap \mathbf{C}_G M)$ $\neq M$. Daher ist $\mathbf{C}_Q M \neq \langle 1 \rangle$ ein Normalteiler von G mit trivialem Durchschnitt mit M — im Widerspruch zur Einzigkeit von M.

d) *Der Widerspruch*: Sei $\{U_i;\, 0 \leqq i \leqq n\}$ eine aufsteigende Kette von Untergruppen von G mit $\langle 1 \rangle \neq U = U_0$ und $U_n = G$ so, daß U_i in U_{i+1} $\mathfrak{C}$-normal ist für $0 \leqq i < n$. Wir betrachten den Schritt (U_{n-1}, G). Die Untergruppe U_{n-1} kann in G nicht normal sein, da sie M nicht enthält. Also ist $G/(U_{n-1})_G$ eine $\mathfrak{C}$-Gruppe. Aber wegen der Einzigkeit von M gilt $(U_{n-1})_G = \langle 1 \rangle$. Das heißt aber, daß G selbst eine $\mathfrak{C}$-Gruppe ist, was unserer Annahme über G widerspricht.

Lemma 4. *Gilt für $U \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{C}} G$ die Beziehung $U = U^{\mathfrak{C}}$, so ist U subnormal in G.*

Beweis. Ist $\{U_i;\, 0 \leqq i \leqq n\}$ eine kürzeste Kette von Untergruppen von G mit $U = U_0$ und $U_n = G$ so, daß U_i in U_{i+1} $\mathfrak{C}$-normal ist für $0 \leqq i < n$, dann darf man per Induktion annehmen, daß U subnormal in U_{n-1} ist. Ist U_{n-1} normal in G, so ist U subnormal. Ist aber $G/(U_{n-1})_G \in \mathfrak{C}$, so gilt $U \subseteqq (U_{n-1})_G$, weil $\langle 1 \rangle$ das einzige homomorphe Bild von U ist, das zu $\mathfrak{C}$ gehört. Also ist U subnormal in $(U_{n-1})_G$ und damit in G.

4. Die beiden vorangehenden Ergebnisse ermöglichen jetzt den Beweis des Hauptergebnisses dieser Note.

Satz 5. *Für $U, V \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ erfüllt auch das Erzeugnis $W = \langle U, V \rangle \in \mathrm{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$.*

Dieser Satz zusammen mit Lemma 1 ergibt das

Korollar. *Die Menge $\mathrm{sn}_{\mathfrak{C}}(G)$ aller $\mathfrak{C}$-subnormalen Untergruppen von G ist ein Teilverband von $\mathrm{s}(G)$.*

Beweis von Satz 5. Angenommen, der Satz sei falsch, dann gibt es unter den endlichen Gruppen, die $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppen enthalten, deren Vereinigung aber nicht $\mathfrak{C}$-subnormal ist, eine Gruppe G kleinster Ordnung. Seien U und V zwei $\mathfrak{C}$-subnormale Untergruppen von G derart, daß die Vereinigung $W = \langle U, V \rangle$ nicht $\mathfrak{C}$-subnormal in G ist.

a) *Ist M ein minimaler Normalteiler von G, so gilt $WM = G$, und $M \nsubseteq W$.*

Wäre $WM \neq G$, so wäre WM als Urbild in G der $\mathfrak{C}$-subnormalen Untergruppe $WM/M = \langle UM/M, VM/M \rangle$ von G/M $\mathfrak{C}$-subnormal in G. Andererseits wäre wegen der Minimalität von G die Untergruppe W $\mathfrak{C}$-subnormal in WM und damit in G, ein Widerspruch! Wäre $M \subseteqq W$, so wäre $W = G$ natürlich $\mathfrak{C}$-subnormal in G.

b) *Es gilt* $D = \langle U^{\mathfrak{C}}, V^{\mathfrak{C}} \rangle = \langle 1 \rangle$.

Nach Lemma 4 sind die Untergruppen $U^{\mathfrak{C}}$ und $V^{\mathfrak{C}}$ subnormal in G. Nach Wielandt [1] ist $D = \langle U^{\mathfrak{C}}, V^{\mathfrak{C}} \rangle$ subnormal in G. Nach Wielandt [2] normalisiert der minimale Normalteiler M von G jeden Subnormalteiler von G, also auch D. Daher liegt die normale Hülle $D^G = D^{MW} = D^W$ von D in W. Aus $D \neq \langle 1 \rangle$ ergäbe sich $(G \neq 1)$ die Existenz des Normalteilers $D^G \neq \langle 1 \rangle$ von G in W, was **a**) widerspricht.

Aus $D = \langle 1 \rangle$ folgt nun aber $U, V \in \mathfrak{C}$, und aus Satz 3 ergibt sich $W = \langle U, V \rangle \subseteqq G_{\mathfrak{C}}$. Da alle Untergruppen von $G_{\mathfrak{C}}$ in G $\mathfrak{C}$-subnormal sind, ist W $\mathfrak{C}$-subnormal in G, ein Widerspruch, der zeigt, daß es kein solches Gegenbeispiel G geben kann.

5. Analog zu den üblichen Charakterisierungen der Nilpotenz in endlichen Gruppen beweist man

Satz 6. *Für die endliche Gruppe G sind folgende Aussagen gleichwertig:*

α) *Jede Untergruppe von G ist $\mathfrak{C}$-subnormal in G;*

β) *Jede maximale Untergruppe von G ist $\mathfrak{C}$-normal in G;*

γ) *G ist das direkte Produkt zweier Untergruppen C und N mit $C \in \mathfrak{C}$ und N nilpotent.*

6. Es scheint von Interesse zu sein, einige der Sätze über Subnormalteiler in geeigneter Form für $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler zu beweisen. Hier sei nur auf einen sehr einfachen solchen Satz hingewiesen:

Erfüllt der minimale Normalteiler M von G die Gleichung $M = M^{\mathfrak{C}}$, so normalisiert M jeden $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler von G.

Ob ein perfekter $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler S, der $S = S^{\mathfrak{C}}$ erfüllt, mit jedem $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler von G vertauschbar ist, habe ich nicht entscheiden können.

7. Variiert man die Klasse $\mathfrak{C}$, so erhält man $2^{\aleph_0}$ verschiedene solche Funktionen $\mathbf{sn}_{\mathfrak{C}}$ auf der Klasse aller endlichen Gruppen. Wählt man $\mathfrak{C} = \{\langle 1 \rangle\}$, so ist $\mathbf{sn}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{sn}$; wählt man als $\mathfrak{C}$ die Klasse aller endlichen Gruppen, so ist $\mathbf{sn}_{\mathfrak{C}} = \mathbf{s}$. — Uns erscheint es unwahrscheinlich, daß man auf diese Weise alle solchen Funktionen auf der Klasse aller endlichen Gruppen erhält, die jeder endlichen Gruppe G einen $\mathbf{sn}\,G$ enthaltenden Untergruppenverband zuordnet, der die in der Einleitung erwähnten Invarianzeigenschaften besitzt. Kann man diese Funktionen allgemein bestimmen?

Literaturverzeichnis

[1] H. WIELANDT, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).

[2] H. WIELANDT, Über den Normalisator subnormaler Untergruppen. Math. Z. **69**, 463—465 (1958).

Eingegangen am 13. 9. 1976

Anschrift des Autors:

Otto H. Kegel
Mathematisches Institut der Universität
D-7800 Freiburg i. Br.