

Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten

Von

UDO PACHNER

1. Einleitung. Sei \mathcal{C} ein simplizialer n -Komplex. Die Elemente aus \mathcal{C} heißen Zellen, Ecken von \mathcal{C} sind die 0-Zellen, Kanten die 1-Zellen und Facetten die n -Zellen von \mathcal{C} . Für $A \in \mathcal{C}$ bezeichnet $\text{st}(A; \mathcal{C}) := \{B \in \mathcal{C} : A \subset B\}$ den Stern von A in \mathcal{C} , $\overline{\text{st}}(A; \mathcal{C})$ ist der kleinste Subkomplex von \mathcal{C} , der $\text{st}(A; \mathcal{C})$ enthält,

$$\text{ast}(A; \mathcal{C}) := \{B \in \mathcal{C} : B \cap A = \emptyset\}$$

ist der Antistern und es ist $\text{link}(A; \mathcal{C}) := \overline{\text{st}}(A; \mathcal{C}) \cap \text{ast}(A; \mathcal{C})$. Die Trägermenge von \mathcal{C} ist definiert als $|\mathcal{C}| := \bigcup \{A : A \in \mathcal{C}\}$. Schließlich bezeichnet \bar{A} die Menge aller Seiten eines Simplexes A (einschließlich \emptyset und A) und $B(A) := \bar{A} \setminus \{A\}$ ist der Randkomplex von A .

Als (elementare) stellare Unterteilung definieren wir wie üblich eine Operation der Gestalt

$$\sigma_A \mathcal{C} := \sigma_{(A, a)} \mathcal{C} := (\mathcal{C} \setminus \text{st}(A; \mathcal{C})) \cup a \cdot B(A) \cdot \text{link}(A; \mathcal{C})$$

und umgekehrt heißt $\mathcal{C} = \sigma_A^{-1}(\sigma_A \mathcal{C})$ eine inverse stellare Unterteilung von $\sigma_A \mathcal{C}$. Hierbei bezeichnet „ \cdot “ die Verbindung und a ist ein geeignet gewählter Punkt (siehe auch [8, 9]). Die Bedeutung der stellaren Operationen ist u. a. begründet in der Äquivalenz von topologischer Äquivalenz bezüglich st. l. (stückweise linearer) Homöomorphismen von Polyedern und stellarer Äquivalenz von Triangulierungen dieser Polyeder [1, 9]. Mit stellaren Äquivalenzen lassen sich elegant viele Invarianten z. B. die *Euler-Charakteristik* nachweisen.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Konstruktion spezieller Typen von stellaren Äquivalenzen. Ein schönes Resultat in dieser Richtung ist z. B. der beweistechnisch bedeutsame Satz von Alexander, nach dem man bei stellaren Äquivalenzen stets mit stellaren Operationen an Kanten auskommt [1]. Genaue Kenntnisse über stellare Äquivalenzen wie über andere Konstruktionsmethoden interessieren ferner beim Abzählen kombinatorischer Typen von Polytopen und Mannigfaltigkeiten (siehe z. B. [2]) und im Zusammenhang mit dem ungelösten Problem der kombinatorischen Kennzeichnung polytopaler Sphären (Steinitz-Problem siehe z. B. [11]).

In letzter Zeit sind stellare Operationen auch in Verbindung mit der Schälbarkeit von Sphären und Kugeln betrachtet worden [7, 12]. Grundlage hierfür ist die folgende Operation:

Definition 1. Es sei \mathcal{C} simplizialer n -Komplex, $A \in \mathcal{C}$ k -Zelle ($0 \leq k < n$) und es gelte:

- (a) $\text{link}(A; \mathcal{C}) \approx B(T^{n-k})$ (Randkomplex des $(n-k)$ -Simplex),
- (b) $\text{link}(A; \mathcal{C})$ voll in \mathcal{C} , d.h. hier $B := \text{conv link}(A; \mathcal{C}) \notin \mathcal{C}$.

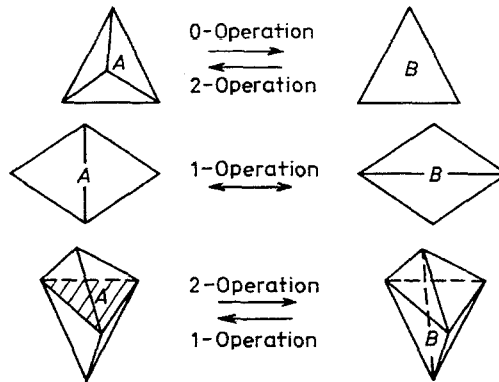
Dann heißt $\chi_A \mathcal{C} := \sigma_B^{-1} \sigma_A \mathcal{C} = (\mathcal{C} \setminus A \cdot B(B)) \cup B(A) \cdot B$ eine bistellare k -Operation.

Bemerkungen und Zusätze. 1. Bei Vorliegen der Voraussetzungen (a), (b) ist die obige Operation am abstrakten Simplizialkomplex stets durchführbar also auch geometrisch realisierbar. Da uns hier nur der kombinatorische Gesichtspunkt interessiert, setzen wir stets eine geeignete geometrische Realisierung voraus.

2. Es gilt $\chi_B \chi_A \mathcal{C} = \mathcal{C}$ für $0 < k < n$ und $\chi_A \mathcal{C} = \sigma_B^{-1} \mathcal{C}$ für $k = 0$. Wir setzen daher $\chi_A \mathcal{C} := \sigma_A \mathcal{C}$ für $k = n$.

3. Zwei Simplizialkomplexe heißen bistellar äquivalent ($\mathcal{C} \stackrel{\text{bst}}{\sim} \mathcal{C}'$), wenn sie durch eine Kette bistellarer Operationen ineinander überführt werden können.

Beispiele.



Daß diese Operationen noch recht allgemein sind, zeigt ein Ergebnis von Ewald und Shephard [7, 8]:

„Jede polytopale simpliziale n -Sphäre ist bistellar äquivalent zu $B(T^{n+1})$.“

Zu Schälungen von Sphären leiten spezielle bistellare Äquivalenzen hin. Sei $\mathcal{C}' = \chi_A \mathcal{C}$ und $p \in \text{link}(A; \mathcal{C})$. Dann gilt $B = p \cdot T$ für ein $T \in \mathcal{C}$ und $F := A \cdot T$ ist eine Facette von \mathcal{C} mit der Eigenschaft

(c) $\overline{\text{st}}(p; \mathcal{C}) \cap \overline{F} = \overline{\text{st}}(A; B(F)) = \overline{A} \cdot B(T)$, d.h. $|\text{st}(p; \mathcal{C})| \cap F$ ist eine $(n-1)$ -Kugel.

Wir schreiben dann auch $\chi_A \mathcal{C} =: \chi_{(p,F)} \mathcal{C}$.

Das Ergebnis von Ewald [7] lautet dann genauer:

„Zu jeder Ecke p einer polytopalen simplizialen n -Sphäre \mathcal{S} existiert eine Kette $\chi_{(p,F_1)} \cdots \chi_{(p,F_i)} \mathcal{S} \approx B(T^{n+1})$.“

Eine Schälung einer simplizialen n -Kugel oder Sphäre \mathcal{S} ist eine Anordnung F_r, \dots, F_1 der Facetten von \mathcal{S} , so daß $F_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} F_i\right)$ eine $(n-1)$ -Kugel für $1 < k < r$ und eine $(n-1)$ -Kugel oder Sphäre für $k = r$ ist.

Aus dem Ergebnis von Ewald folgt dann wegen (c) induktiv ein Resultat von Bruggesser, Mani [4] und Danaraj, Klee [5]: „Polytopale Sphären sind schälbar (und zwar so, daß mit den Facetten des Sterns einer beliebigen Ecke begonnen werden kann).“

Mit diesem Satz hat McMullen die Upper Bound Conjecture für konvexe Polytope bewiesen [13].

Im folgenden verstehen wir unter kombinatorischen Sphären, Kugeln bzw. Mannigfaltigkeiten stets Simplicialzerlegungen von st.l. Sphären, Kugeln bzw. Mannigfaltigkeiten.

Ungelöst sind bisher:

Problem 1. Ist für $n \geq 3$ jede kombinatorische n -Sphäre schälbar?

Kleinschmidt hat gezeigt, daß es kombinatorische 3-Sphären gibt, die nicht wie Polytope schälbar sind, d. h. bei denen man beim Schälens nicht mit dem Stern einer beliebigen Ecke beginnen kann [12].

Unbeantwortet ist auch die folgende schwächere Frage, zu der wir in dieser Arbeit eine Teillösung geben werden.

Problem 2. Ist jede kombinatorische n -Sphäre bistellar äquivalent zu $B(T^{n+1})$?

2. Ergebnisse. Gemeinsame Basis der späteren Beweise ist die im folgenden Lemma beschriebene Operation.

Lemma 1. Sei \mathcal{M} eine kombinatorische n -Mannigfaltigkeit,

$$A \in \text{Int } \mathcal{M} \ (\text{Int } \mathcal{M} := \mathcal{M} \setminus B(\mathcal{M})) \quad \text{und} \quad p \in \text{link}(A; \mathcal{M})$$

mit:

- (1) $\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}))$ ist schälbar,
- (2) $\text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}))) \cap \text{link}(p; \mathcal{M}) = \{\emptyset\}$.

Dann gilt:

$$\mathcal{M}' := (\mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \mathcal{M})) \cup p \cdot \text{ast}(p; B(\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}))) \stackrel{\text{bst}}{\sim} \mathcal{M}.$$

Beweis. Sei S_r, \dots, S_1 eine Schälung von $\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}))$ mit

$$\bar{S}_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \bar{S}_i\right) = \overline{\text{st}}(A_k; B(S_k)) = \bar{A}_k \cdot B(B_k)$$

für $1 < k \leq r$ und $A_1 := S_1, B_1 := \emptyset$.

Es ist dann $A \cdot S_r, \dots, A \cdot S_1$ eine Schälung von

$$\bar{A} \cdot \text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M})) = \text{ast}(p; \overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}))$$

mit

$$\overline{A \cdot S_k} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{A \cdot S_i} \right) = \overline{A \cdot A_k} \cdot B(B_k).$$

Sei dann F eine Facette von $A \cdot S_r = A \cdot A_r \cdot B_r$, die $A \cdot B_r$ enthält. Wegen $A \in \text{Int}(\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}))$ gilt auch $F \in \text{Int}(\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}))$, d.h. F ist in genau zwei Facetten aus $\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M})$ enthalten. Da

$$F \supset B_r \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} \overline{A \cdot S_i}$$

gilt, muß eine davon aus $\text{st}(p; \text{st}(A; \mathcal{M}))$ sein, womit wir

$$\overline{\text{st}}(A \cdot B_r; B(A \cdot S_r)) = \overline{A \cdot B_r} \cdot B(A_r) \subset \overline{\text{st}}(p; \mathcal{M})$$

bewiesen haben. Wegen

$$A_r \in \text{Int} \left(\bigcup_{i=1}^r \overline{S_i} \right) = \text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M})))$$

und $A_r \neq \emptyset$ gilt nach Voraussetzung (2) $A_r \notin \text{link}(p; \mathcal{M})$. Damit ist dann

$$\overline{A \cdot B_r} \cdot B(A_r) = \overline{\text{st}}(p; \mathcal{M}) \cap \overline{A \cdot S_r}$$

vollständig bewiesen, d.h. $\chi_{(p, A \cdot S_r)} \mathcal{M} = \chi_{A \cdot B_r} \mathcal{M}$ ist wohldefiniert.

Aus $\mathcal{M}_r := \chi_{A \cdot B_r} \mathcal{M} = (\mathcal{M} \setminus A \cdot B_r \cdot B(p \cdot A_r)) \cup B(A \cdot B_r) \cdot p \cdot A_r$ findet man dann:

$$\text{link}(A; \mathcal{M}_r) = (\text{link}(A; \mathcal{M}) \setminus B_r \cdot B(p \cdot A_r)) \cup B(B_r) \cdot p \cdot A_r,$$

also ist

$$\begin{aligned} \text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}_r)) &= \text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M})) \setminus B_r \cdot \overline{A_r} \\ &= \bigcup_{i=1}^r \overline{S_i} \setminus B_r \cdot \overline{A_r} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r-1} \overline{S_i} \end{aligned}$$

schälbar.

Ferner sind

$$\text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}_r))) = \text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}))) \setminus A_r \cdot \overline{B_r}$$

und

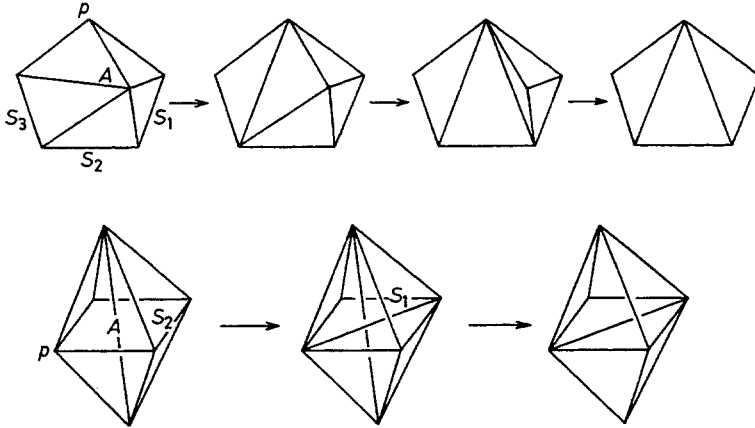
$$\text{link}(p; \mathcal{M}_r) = (\text{link}(p; \mathcal{M}) \setminus B_r \cdot B(A_r)) \cup B(B_r) \cdot A_r$$

wegen (2) disjunkt, d.h. die Voraussetzungen unseres Lemmas gelten auch für p, A, \mathcal{M}_r . Durch Induktion nach r erhält man dann sofort:

$$\begin{aligned} &\chi_{(p, A \cdot S_1)} \cdots \chi_{(p, A \cdot S_r)} \mathcal{M} \\ &= \chi_A \chi_{A \cdot B_2} \cdots \chi_{A \cdot B_r} \mathcal{M} \\ &= (\mathcal{M}_r \setminus \text{st}(A; \mathcal{M}_r)) \cup p \cdot \text{ast}(p; B(\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}_r))) \\ &= ((\mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \mathcal{M})) \cup B(A) \cdot \overline{B_r} \cdot p \cdot A_r) \cup p \cdot B(A) \cdot \bigcup_{i=1}^{r-1} \overline{S_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \mathcal{M})) \cup p \cdot B(A) \cdot \bigcup_{i=1}^r \bar{S}_i \\
 &= \mathcal{M}'.
 \end{aligned}$$

Beispiele.



Theorem 1. Sei \mathcal{M} eine kombinatorische n -Mannigfaltigkeit und $\text{link}(A; \mathcal{M})$ schälbar. Dann gilt $\mathcal{M} \stackrel{\text{bst}}{\simeq} \sigma_A \mathcal{M} =: \mathcal{M}'$.

Beweis. Im Fall $\dim A = n$ gilt $\sigma_A \mathcal{M} = \chi_A \mathcal{M}$ nach Definition. Sei also

$$1 \leq \dim A < n \text{ und } \sigma_A \mathcal{M} = \sigma_{(A, a)} \mathcal{M}.$$

Ferner sei $A = p \cdot T$, wo p eine beliebige Ecke von A ist. Dann gilt $p \in \text{link}(a; \mathcal{M}')$ sowie:

- (1) $\text{ast}(p; \text{link}(a; \mathcal{M}')) = \bar{T} \cdot \text{link}(A; \mathcal{M})$ ist schälbar, da $\text{link}(A; \mathcal{M})$ schälbar ist.
- (2) $\text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(a; \mathcal{M}'))) = T \cdot \text{link}(A; \mathcal{M})$ enthält wegen $p \cdot T = A \notin \mathcal{M}'$ kein Element aus $\text{link}(p; \mathcal{M}')$.

Nach Lemma 1 gilt dann:

$$\begin{aligned}
 \sigma_A \mathcal{M} &\stackrel{\text{bst}}{\simeq} (\mathcal{M}' \setminus \text{st}(a; \mathcal{M}')) \cup p \cdot \text{ast}(p; B(\bar{\text{st}}(a; \mathcal{M}'))) \\
 &= (\mathcal{M}' \setminus \text{st}(a; \mathcal{M}')) \cup p \cdot T \cdot \text{link}(A; \mathcal{M}) \\
 &= (\mathcal{M}' \setminus \text{st}(a; \mathcal{M}')) \cup A \cdot \text{link}(A; \mathcal{M}) \\
 &= \mathcal{M}.
 \end{aligned}$$

Bemerkungen. 1. Ist S_r, \dots, S_1 eine Schälung von $\text{link}(A; \mathcal{M})$ mit

$$\bar{S}_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \bar{S}_i \right) = \bar{A}_k \cdot B(B_k)$$

für $1 < k < n$, $A_1 := S_1$ und $A_r := \emptyset$, so gilt nach Beweis zu Lemma 1:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \chi_{(p, a \cdot T \cdot S_r)} \cdots \chi_{(p, a \cdot T \cdot S_1)} \mathcal{M}' \\
 &= \chi_{a \cdot A_r} \cdots \chi_{a \cdot A_1} \mathcal{M}'.
 \end{aligned}$$

Wegen $-1 \leq \dim A_i \leq \dim \text{link}(A; \mathcal{M}) = n - \dim A - 1$ gilt $0 \leq \dim a \cdot A_i \leq n - \dim A$.

Umgekehrt gilt

$$\sigma_a \mathcal{M} = \chi_{p \cdot T \cdot B_1} \cdots \chi_{p \cdot T \cdot B_r} \mathcal{M} = \chi_{A \cdot B_1} \cdots \chi_{A \cdot B_r} \mathcal{M}$$

mit $\dim A \leq \dim A \cdot B_i \leq n$. Es ist

$$\dim A \cdot B_i = n \text{ genau f\u00fcr } i = r \quad (\chi_{A \cdot B_r} \mathcal{M} = \chi_{A \cdot S_r} \mathcal{M} = \sigma_{A \cdot S_r} \mathcal{M})$$

und $\dim A \cdot B_i = \dim A$ genau f\u00fcr $i = 1$.

2. Ist \mathcal{M} eine polytopale Sph\u00e4re, $\mathcal{M} = B(P)$, so kann man eine bistellare \u00c4quivalenz zwischen \mathcal{M} und $\sigma_A \mathcal{M}$ so konstruieren, da\u00df alle Zwischenstationen polytopal sind. Zun\u00e4chst kann man $\sigma_A \mathcal{M}$ polytopal realisieren, indem man einen Punkt $a \in \text{int } A$ „hinreichend wenig aus P herauszieht“,

$$P' := \text{conv}(P \cup \{a'\}), \quad a' = x + \lambda(a - x)$$

mit $x \in \text{int } P$ und λ hinreichend klein. Hat man λ klein genug gew\u00e4hlt, so „sieht man“ beim anschließenden Herausziehen einer Ecke p von A auf einem geeigneten Strahl sukzessive zuerst alle Facetten aus $\text{ast}(p; \text{st}(a'; B(P')))$, bevor man irgendeine andere Facette aus $\text{ast}(p; B(P'))$ sieht. Die konvexen H\u00fcllen von P' mit entsprechenden Punkten auf dem Strahl durch p realisieren dann polytopal eine bistellare \u00c4quivalenz (vgl. Konstruktion in [7]).

Theorem 2. *F\u00fcr $n \leq 4$ ist jede kombinatorische n -Sph\u00e4re bistellar \u00e4quivalent zu $B(T^{n+1})$.*

Beweis. Unmittelbare Folgerung aus Theorem 1, da f\u00fcr jede kombinatorische n -Sph\u00e4re $\mathcal{S} \stackrel{\text{st}}{\sim} B(T^{n+1})$ gilt und alle 2-Sph\u00e4ren sch\u00e4lbar sind.

Analog erh\u00e4lt man:

Theorem 3. *F\u00fcr kombinatorische Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ mit $\dim \mathcal{M}_i \leq 4$ ist $|\mathcal{M}_1| \stackrel{\text{st}, 1}{\sim} |\mathcal{M}_2|$ gleichbedeutend mit $\mathcal{M}_1 \stackrel{\text{bst}}{\sim} \mathcal{M}_2$.*

Der folgende Satz sagt etwas \u00fcber Vertauschungen bistellarer Operationen aus.

Lemma 2. *Sei \mathcal{M} eine kombinatorische n -Mannigfaltigkeit, a eine Ecke von \mathcal{M} und $\mathcal{M}' = \chi_A \chi_a \mathcal{M}$ mit $0 < \dim A < n$. Dann existieren bistellare k -Operationen χ_n, \dots, χ_1 mit $0 < k < n$ und $\chi_A \chi_a \mathcal{M} = \chi_n \chi_{n-1} \cdots \chi_1 \mathcal{M}$.*

Beweis. Sei $\chi_a \mathcal{M} = \sigma_F^{-1} \mathcal{M}$. Im Fall $A \notin B(F)$ gilt $\chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M} = \sigma_F^{-1} \chi_A \mathcal{M}$. Sei also $A \in B(F)$, und es gelte $F = A \cdot B$. Dann ist $\text{link}(A; \sigma_F^{-1} \mathcal{M}) = B(p \cdot B)$ f\u00fcr eine Ecke p von \mathcal{M} , also $p \in \text{link}(A; \mathcal{M})$ und weiter:

(1) Es ist

$$\begin{aligned} & \text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M})) \\ &= \text{ast}(p; \bar{p} \cdot B(B) \cup \bar{a} \cdot B(B)) \\ &= \bar{a} \cdot B(B), \end{aligned}$$

also offensichtlich sch\u00e4lbar.

(2) $\text{Int}(\text{ast}(p; \text{link}(A; \mathcal{M}))) = a \cdot B(B)$ enthält wegen $p \cdot a \notin \mathcal{M}$ keine Zellen aus $\text{link}(p; \mathcal{M})$.

Nach Lemma 1 existiert dann eine Kette

$$\begin{aligned} & \chi'_1 \cdots \chi'_s \mathcal{M} \\ &= \chi_{A \cdot B_1} \cdots \chi_{A \cdot B_s} \mathcal{M} \\ &= (\mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \mathcal{M})) \cup p \cdot \text{ast}(p; B(\overline{\text{st}}(A; \mathcal{M}))) \\ &= (\mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \mathcal{M})) \cup p \cdot B(A) \cdot B(B) \cdot \bar{a} \\ &= (\mathcal{M} \setminus (\text{st}(A; \mathcal{M}) \cup a \cdot B(F))) \cup \bar{p} \cdot B(A) \cdot B(B) \cdot \bar{a} \cup \bar{a} \cdot B(A) \cdot \bar{B} \\ &= (\sigma_F^{-1} \mathcal{M} \setminus \text{st}(A; \sigma_F^{-1} \mathcal{M})) \cup \bar{a} \cdot B(A) \cdot B(p \cdot B) \\ &= \sigma_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M} \\ &= \sigma_p \cdot B(\chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Hierbei gilt $1 \leq \dim A \leq \dim A \cdot B_i < n$. Da $\bar{a} \cdot B(B)$ genau $\dim B + 1 = \dim F - \dim A - 1 + 1 = n - \dim A$ Facetten hat, folgt $s = n - \dim A$.

Weiter ist nun $\text{link}(p \cdot B; \chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M}) = B(A)$, also schälbar und nach Bemerkung 1 zu Theorem 1 existiert dann eine Kette

$$\begin{aligned} & \chi'_1 \cdots \chi'_s \mathcal{M} \\ &= \sigma_p \cdot B(\chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M}) \\ &= \chi''_1 \cdots \chi''_t \sigma(\chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M}), \end{aligned}$$

wo die χ''_i k -Operationen mit $1 \leq k \leq n - 1$ sind und σ eine bistellare n -Operation (Facettenteilung) ist. Die Anzahl der Facetten von $B(A)$ beträgt $t + 1 = \dim A + 1$.

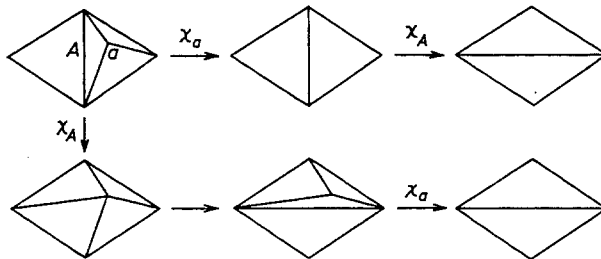
Somit erhält man

$$\begin{aligned} & \chi_A \sigma_F^{-1} \mathcal{M} \\ &= \chi_A \chi_a \mathcal{M} \\ &= \sigma^{-1} \chi''_t{}^{-1} \cdots \chi''_1{}^{-1} \chi'_1 \cdots \chi'_s \mathcal{M} \\ &= \chi_a \chi''_t{}^{-1} \cdots \chi''_1{}^{-1} \chi'_1 \cdots \chi'_s \mathcal{M}, \end{aligned}$$

wobei $s + t = n - \dim A + \dim A = n$ gilt.

Bemerkung. Für $\dim A = n$ gilt $\chi_A \chi_a \mathcal{M} = \mathcal{M}$ für $A = F$ und $\chi_A \chi_a \mathcal{M} = \chi_a \chi_A \mathcal{M}$ sonst. Für $\dim A = 0$ erhält man (Beweis wie oben) $\chi_A \chi_a \mathcal{M} = \chi_a \chi_A \mathcal{M}$ für $A \notin B(F)$ und sonst $\chi_A \chi_a \mathcal{M} = \chi_a \chi_A \chi'_s \cdots \chi'_1 \mathcal{M}$, $s = n$.

Beispiel.



Mit Hilfe von Lemma 2 kann man nun polytopale Sphären in Randkomplexe von Stapelpolytopen überführen. Stapelpolytope spielen u. a. eine große Rolle im Zusammenhang mit der Lower Bound Conjecture [3].

Theorem 4. *Jede polytopale simpliziale n -Sphäre \mathcal{S} mit f_0 Ecken läßt sich durch bistellare k -Operationen mit $0 < k < n$ in den Randkomplex eines Stapelpolytops mit gleicher Eckenzahl überführen.*

Beweis. Nach Ewald [7] läßt sich \mathcal{S} durch bistellare k -Operationen mit $0 \leq k < n$ in $B(T^{n+1})$ überführen. Aus Lemma 2 folgt dann sofort die Existenz einer Kette

$$\chi_r \cdots \chi_1 \mathcal{S} = \sigma_{f_0-4} \cdots \sigma_1 B(T^{n+1}),$$

wo die χ_i bistellare k -Operationen, $0 < k < n$, sind.

Bemerkung. Das Theorem gilt genau für die n -Sphären, die bistellar ohne n -Operationen in $B(T^{n+1})$ überführt werden können, also z. B. für alle Sphären, die eine Schälung besitzen, die mit den Facetten des Sterns einer Ecke beginnt.

Allgemeiner erhält man mit Lemma 2:

Theorem 5. *Sind $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ bistellar äquivalente kombinatorische Mannigfaltigkeiten, so existiert eine Kette*

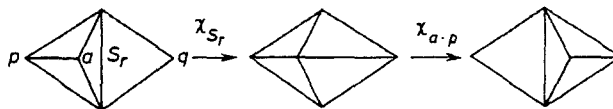
$$\chi_r \cdots \chi_1 \sigma_s \cdots \sigma_1 \mathcal{M}_1 = \sigma'_t \cdots \sigma'_1 \mathcal{M}_2,$$

wo die χ_i bistellare k -Operationen ($0 < k < n$) und die σ Facettenteilungen sind.

Es stellt sich die für Abzählungen wichtige Frage, ob Theorem 4 eine Klassifizierung der simplizialen Polytope liefert. Leider ist dies — wenigstens solange man an die Äquivalenzketten gemäß Theorem 4 keine Zusatzbedingungen stellt — nicht der Fall, wie aus dem nachstehenden Lemma folgen wird.

Lemma 3. *Sei \mathcal{M} eine kombinatorische n -Mannigfaltigkeit und $\mathcal{M}' = \sigma_{F'} \sigma_F^{-1} \mathcal{M}$ mit $\dim F = n = \dim F'$. Dann sind $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ durch bistellare k -Operationen, $0 < k < n$, ineinander überführbar.*

Beweis. Für $F' = F$ gilt $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Ist $F' \neq F$, so folgt aus dem starken Zusammenhang von $\sigma_F^{-1} \mathcal{M}$ die Existenz einer Kette F_r, \dots, F_0 von Facetten von $\sigma_F^{-1} \mathcal{M}$ mit $F_0 = F', F_r = F$ und $S_k := F_k \cap F_{k-1}$ ist eine $(n-1)$ -Zelle für $1 \leq k \leq r$.



Sei nun $F_r = p \cdot S_r$, $F_{r-1} = q \cdot S_r$ und $\sigma_F^{-1} \mathcal{M} = \sigma_{F_r}^{-1} \mathcal{M} = \chi_a \mathcal{M}$. Dann gilt offensichtlich $\chi_a \cdot p \chi_{S_r} \mathcal{M} = \sigma_{F_{r-1}} \sigma_{F_r}^{-1} \mathcal{M}$. Wiederholtes Anwenden dieser Operation liefert dann eine Kette der Gestalt

$$\begin{aligned} & \chi_{2r} \cdots \chi_1 \mathcal{M} \\ &= \sigma_{F_0} \sigma_{F_1}^{-1} \sigma_{F_1} \cdots \sigma_{F_{r-1}}^{-1} \sigma_{F_{r-1}} \sigma_{F_r}^{-1} \mathcal{M} \\ &= \sigma_{F_0} \sigma_{F_r}^{-1} \mathcal{M} \\ &= \mathcal{M}'. \end{aligned}$$

Theorem 6. *Zwei $(n+1)$ -Stapelpolytope P , P' gleicher Eckenzahl können stets durch bistellare k -Operationen, $0 < k < n$, ineinander überführt werden.*

Beweis. Sei $\chi_{a_r} \cdots \chi_{a_1} B(P) = B(T^{n+1}) = \chi_{b_r} \cdots \chi_{b_1} B(P')$. Bei Induktion nach r können wir eine Kette der Gestalt $\chi_{a_1} B(P) = \chi_s \cdots \chi_1 \chi_{b_1} B(P')$ voraussetzen, wo die χ_i k -Operationen, $0 < k < n$, sind. Es folgt:

$$\begin{aligned} B(P) &= \chi_{a_1}^{-1} \chi_s \cdots \chi_1 \chi_{b_1} B(P') \\ &= \chi_{a_1}^{-1} \chi_{b_1} \chi'_m \cdots \chi'_1 B(P') && \text{(Lemma 2)} \\ &= \chi'_{m+i} \cdots \chi'_m \cdots \chi'_1 B(P') && \text{(Lemma 3)}. \end{aligned}$$

Aus Theorem 6 und 4 folgt nun direkt:

Theorem 7. *Simplexiale n -Polytope gleicher Eckenzahl können stets durch bistellare k -Operationen, $0 < k < n$, ineinander überführt werden.*

Zur Verallgemeinerung der Theoreme 4 und 7 auf kombinatorische Sphären der Dimension $n \leq 4$ stellt sich die Frage, ob sich Theorem 2 analog zu Polytopen verschärfen läßt.

Problem 3. *Läßt sich jede kombinatorische n -Sphäre, $n \leq 4$, durch bistellare k -Operationen, $0 \leq k < n$, in $B(T^{n+1})$ überführen?*

Ein Gegenbeispiel hierzu wäre zugleich ein Beispiel für eine Sphäre, die keine Schälung besitzt, die mit den Facetten des Sterns irgend einer Ecke beginnt.

Literaturverzeichnis

- [1] J. W. ALEXANDER, The combinatorial theory of complexes. *Ann. of Math.* **31**, 292–320 (1930).
- [2] A. ALTSHULER and L. STEINBERG, An enumeration of combinatorial 3-manifolds with 9 vertices. *Discrete Math.* **16**, 91–108 (1976).
- [3] D. BARNETTE, A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. *Pacific J. Math.* **46**, 349–354 (1973).
- [4] H. BRUGGESSER and P. MANI, Shellable decompositions of cells and spheres. *Math. Scand.* **29**, 197–205 (1972).
- [5] G. DANARAJ and V. KLEE, Shellings of spheres and polytopes. *Duke Math. J.* **41**, 443–451 (1974).
- [6] G. DANARAJ and V. KLEE, Which spheres are shellable? *Manuskript* 1976.
- [7] G. EWALD, Über die stellare Äquivalenz konvexer Polytope. *Erscheint demnächst.*

- [8] G. EWALD and G. C. SHEPHARD, Stellar subdivisions of boundary complexes of convex polytopes. *Math. Ann.* **210**, 7–16 (1974).
- [9] L. C. GLASER, *Geometrical Combinatorial Topology*. Bd. I, New York 1970.
- [10] P. KLEINSCHMIDT, Eine graphentheoretische Kennzeichnung der Stapelpolytope. *Arch Math.* **17**, 663–667 (1976).
- [11] P. KLEINSCHMIDT, Sphären mit wenigen Ecken. Erscheint in *Geometriae Dedicata*.
- [12] P. KLEINSCHMIDT, Untersuchungen zur Struktur geometrischer Zellkomplexe, insbesondere zur Schälbarkeit von p. l. Sphären und p. l. Kugeln. Manuskript 1977.
- [13] P. McMULLEN, The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika* **17**, 179–184 (1970).

Eingegangen am 13. 6. 1977

Anschrift des Autors:

U. Pachner
Institut für Mathematik
Gebäude NA
Universitätsstr. 150
D-4630 Bochum