Bemerkungen zum Satz über die Separabilität der Fréchet-Montel-Räume

Von

HELMUT PFISTER

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung der dualisierten Form des in der Überschrift zitierten Satzes darstellt:

In jedem (nicht notwendig lokalkonvexen) (DF)-Raum sind die präkompakten Mengen halbmetrisierbar.

Als eine Anwendung dieses Ergebnisses erhalten wir eine Verallgemeinerung des Kriteriums von Grothendieck-Dieudonné, das die Fréchet-Schwartz-Räume unter den Fréchet-Montel-Räumen kennzeichnet, und zwar (siehe Korollar 3 zu Satz 2):

Für einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum E mit Dualraum E' sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

a) *Jede für das Dualsystem* (E, E') (im Sinn von [8], § 20.3) *zulässige Topologie, bezüglich welcher die beschränkten Mengen von E präkompakt sind, ist eine Schwartz-Raum-Topologie.*

b) *Der starke Dualraum* $(E', \beta(E', E))$ *erfüllt die Mackeysche Konvergenzbedingung* ([7], Definition 3).

Ein topologischer linearer Raum (Abkürzung: t.l.R.) E heiße *von abzählbarem Typ*, wenn es zu jeder Nullumgebung U von E eine abzählbare Menge $A \subset E$ gibt derart, daß $E = A + U$. Ein halbmetrisierbarer t.l.R. ist genau dann von abzählbarem Typ, wenn er separabel ist; ein t.l.R. ist genau dann von abzählbarem Typ, wenn er die Initialtopologie bezüglich linearer Abbildungen in separable metrisierbare t.l.R. trägt; ein lokalkonvexer t.l.R. ist genau dann von abzählbarem Typ, wenn er „séparable par séminorme" im Sinn von [6] ist. Jeder Schwartz-Raum ist von abzählbarem Typ; ein Montel-Raum braucht nicht von abzählbarem Typ zu sein. (Für weitere Bemerkungen zu dieser Definition siehe [9] und [12].)

Lemma 1. *Sei* (E, E') *ein Dualsystem* (im Sinn von [8], § 20.2), $\sigma(E', E)$ *sei die schwache Topologie auf* E', $\mathscr{B}$ *sei eine Menge von absolutkonvexen* $\sigma(E', E)$*-beschränkten Mengen,* $t_{\mathscr{B}}$ *sei die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen von* $\mathscr{B}$. *Dann sind äquivalent:*

i) $(E, t_{\mathscr{B}})$ *ist von abzählbarem Typ.*

ii) *Die natürliche Uniformität von* $(E', \sigma(E', E))$ *induziert auf jeder Menge aus* $\mathscr{B}$ *eine metrisierbare Uniformität.*

Beweis. i)$\Rightarrow$ii): Sei $B \in \mathscr{B}$, $B \neq \emptyset$. Nach [7], Lemma 5, genügt es zu zeigen, daß B bezüglich $\sigma(E', E)$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis hat. Wegen i) gibt es eine abzählbare Menge $A \subset E$, so daß $E = A + B^0$. Zu $x \in E$ gibt es also $a \in A$ und $y \in B^0$, so daß $2x = a + y$; es ist dann

$$\begin{aligned}\{x\}^0 = \{x' \in E';\ |\langle 2x, x'\rangle| \leqq 2\} \supset \\ \supset \{x' \in E';\ |\langle a, x'\rangle| \leqq 1 \quad \text{und} \quad |\langle y, x'\rangle| \leqq 1\} \\ \supset \{a\}^0 \cap B\,.\end{aligned}$$

Die Mengen $S^0 \cap B$, $S \subset A$ endlich, bilden also eine Nullumgebungsbasis bezüglich $\sigma(E', E) \mid B$.

ii)$\Rightarrow$i): Sei $B \in \mathscr{B}$, $B \neq \emptyset$. Da B wegen ii) bezüglich $\sigma(E', E)$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis hat, gibt es eine Folge $(A_n;\ n \in \mathbb{N})$ von endlichen Teilmengen von E derart, daß $(A_n^0 \cap B;\ n \in \mathbb{N})$ eine $\sigma(E', E) \mid B$-Nullumgebungsbasis ist. Zu $x \in E$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $A_n^0 \cap B \subset \{x\}^0$. Dann ist aber

$$\begin{aligned}x \in (A_n^0 \cap B)^0 \subset A_n^{00} + B^0 \subset \\ \subset S_n + 2B^0\end{aligned}$$

für eine geeignete endliche Menge $S_n \subset E$, da A_n^{00} bezüglich $t_{\mathscr{B}}$ präkompakt ist. Mit der abzählbaren Menge $A := \frac{1}{2}\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ gilt dann $E = A + B^0$. Hieraus folgt i).

J. Dieudonné hat folgenden Satz bewiesen ([4], auch [8], § 27.2):

(a) *Jeder Fréchet-Montel-Raum ist separabel.*

Mit Hilfe von Lemma 1 läßt sich dieser Satz im Rahmen der üblichen Dualitätstheorie leicht umformen zu der folgenden Aussage:

(b) *In jedem (DF)-Montel-Raum sind die beschränkten Mengen metrisierbar.*

In der nicht-lokalkonvexen Theorie wurde ein Analogon zu (a) von C. Bessaga und S. Rolewicz bewiesen (siehe [2]; auch [11], Prop. VI. 2.2). Wir wollen hier folgende weitergehende Verallgemeinerung beweisen:

(A) *Sei (E, t) ein halbmetrisierbarer t.l.R., s eine lineare Topologie auf E, bezüglich welcher jede t-beschränkte Menge präkompakt ist. Dann ist (E, s) von abzählbarem Typ.*

Als zweites beweisen wir folgende Verallgemeinerung von (b):

(B) *Sei (E, t) ein (DF)-Raum* (im Sinn der erweiterten Definition von [10] oder [5]). *Dann ist jede präkompakte Teilmenge von E halbmetrisierbar.*

In der lokalkonvexen Theorie lassen sich (A) und (B) mit Hilfe von Lemma 1 auseinander herleiten. In der nichtlokalkonvexen Theorie scheint ein entsprechender Zusammenhang zwischen (A) und (B) nicht zu bestehen.

Satz (A) ist eine unmittelbare Folge des folgenden Satzes, den wir nun beweisen werden:

Satz 1. *Sei E ein t.l.R. mit einer abzählbaren Basis der bornivoren Mengen, $f\colon E \to F$ sei eine surjektive lineare Abbildung derart, daß das Bild jeder beschränkten Teilmenge von E in F präkompakt ist. Dann ist F von abzählbarem Typ.*

Beweis. Angenommen F ist nicht von abzählbarem Typ. Dann gibt es (Zornsches Lemma!, siehe [9]) eine kreisförmige Nullumgebung V von F und eine überabzählbare Menge $Y \subset F$ derart, daß $y - y' \notin V$ für $y, y' \in Y$, $y \neq y'$. Wir wählen $X \subset E$ derart, daß $f: X \to Y$ bijektiv wird. Sei $(W_n;\, n \in \mathbb{N})$ eine Basis der bornivoren Mengen von E, o.E. ist jedes W_n kreisförmig. Es ist $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} (k\, W_1) \cap X$; da X überabzählbar ist, gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$, so daß $X_1 := (k_1 W_1) \cap X$ überabzählbar ist. Induktiv findet man eine Folge $(X_l;\, l \in \mathbb{N})$ von überabzählbaren Mengen und eine Folge $(k_l;\, l \in \mathbb{N})$ von natürlichen Zahlen, so daß $X_l = (k_l W_l) \cap X_{l-1}$, $X_0 := X$. Es gibt dann $x_l \in X_l$ mit $x_l \neq x_{l'}$, für $l \neq l'$. Die Menge $B := \{x_l;\, l \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt, denn es ist $x_m \in k_l W_l$ für $m \geqq l$; andererseits ist $f(B)$ nicht präkompakt, da $f(x_l) - f(x_{l'}) \notin V$ für $l \neq l'$. Die Annahme, daß F nicht von abzählbarem Typ ist, führt also auf einen Widerspruch.

Für einen t.l.R. (E, t) bezeichnen wir mit b^* die von den bornivoren t-abgeschlossenen Ketten erzeugte lineare Topologie (siehe [12] für die Terminologie); mit b_t^* bezeichnen wir die von den bornivoren Ketten $(V_k;\, k \in \mathbb{N})$, $V_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{k,n}$, $(U_{k,n};\, k \in \mathbb{N})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Kette von t-Nullumgebungen, erzeugte lineare Topologie. Ein t.l.R. (E, t) heißt ein *(DF)-Raum* ([10], [5]), wenn er eine abzählbare Basis der beschränkten Mengen besitzt und t mit b_t^* übereinstimmt.

Ist (E, t) ein lokalkonvexer t.l.R. mit einer abzählbaren Basis der beschränkten Mengen, so sieht man wie in [1], daß $b^* = \beta^*(E, E')$ (= Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den stark beschränkten Teilmengen von E') ist und daß b_t^* die von den bornivoren Tonnen $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n absolutkonvexe abgeschlossene t-Nullumgebungen, erzeugte lokalkonvexe Topologie ist. Jeder (DF)-Raum im Sinn von Grothendieck ([7]; auch [8], § 29.3) ist somit ein (DF)-Raum im Sinn der obigen Definition.

Satz (B) ist eine unmittelbare Folge des folgenden Satzes, den wir nun beweisen werden:

Satz 2. *Sei (E, t) ein t.l.R. mit einer abzählbaren Basis der beschränkten Mengen. Auf jeder bezüglich b_t^*-präkompakten Menge induzieren t und b^* dieselbe Uniformität, und diese Uniformität ist halbmetrisierbar.*

Beweis. Sei $B \subset E$ b_t^*-präkompakt; wegen $t \subset b_t^*$ ist B auch t-präkompakt. Aus der Tatsache, daß b_t^* eine t-abgeschlossene Nullumgebungsbasis besitzt, folgt, daß t und b_t^* auf B dieselbe Uniformität induzieren. Daß b^* und b_t^* dieselben präkompakten Mengen liefern und auf ihnen dieselbe Uniformität induzieren, wurde in [12], Satz 2, gezeigt.

Zum Beweis der Halbmetrisierbarkeit von B bezüglich der natürlichen Uniformität von (E, t) genügt es anzunehmen, daß $0 \in B$ ist und zu zeigen, daß B eine abzählbare Nullumgebungsbasis bezüglich t besitzt. Denn es gilt folgendes

Lemma 2. *Sei A eine nichtleere Teilmenge eines t.l.R. E. Die von der natürlichen Uniformität von E auf A induzierte Uniformität ist genau dann halbmetrisierbar, wenn $A - A$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt.*

In der Tat: Für jede Nullumgebung U von E sei $\hat{U} = \{(x, x') \in E \times E; x - x' \in U\}$, dann bilden die Mengen $\hat{U}$ eine Nachbarschaftsbasis für die natürliche Uniformität von E. Eine Folge $(U_n; n \in \mathbb{N})$ von Nullumgebungen von E induziert auf $A - A$ genau dann eine Nullumgebungsbasis, wenn $(\hat{U}_n \cap (A \times A); n \in \mathbb{N})$ eine Nachbarschaftsbasis für A ist.

Sei jetzt also $0 \in B$, und B besitze keine abzählbare Nullumgebungsbasis bezüglich t. Durch transfinite Induktion finden wir dann halbmetrisierbare lineare Topologien $s_\alpha \subset t$, $\alpha < \omega_1$ (= erste überabzählbare Ordinalzahl), und s_α-Nullumgebungsbasen $(U_\alpha^{(n)}; n \in \mathbb{N})$ derart, daß $(U_\alpha^{(n)}; n \in \mathbb{N})$ eine Kette ist und so daß für $\beta < \alpha$ die Topologie s_β gröber als s_α und die Menge $(U_\alpha^{(1)} + U_\alpha^{(1)}) \cap B$ keine $s_\alpha | B$-Nullumgebung ist. Sei $(B_k; k \in \mathbb{N})$ eine Basis der t-beschränkten Mengen, dann gibt es $m(n, \alpha, k) \in \mathbb{N}$, so daß

$$B_k \subset m(n, \alpha, k)\, U_\alpha^{(n)} \quad \text{für } \alpha < \omega_1,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Es gibt überabzählbare Mengen J_k, $k \in \mathbb{N}$, von abzählbaren Ordinalzahlen und $m_k \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$(*) \qquad J_k \supset J_{k+1} \quad \text{und} \quad B_k \subset m_k\, U_\alpha^{(k)} \quad \text{für} \quad \alpha \in J_k.$$

Weiter gibt es dann $\alpha_k \in J_k$ derart, daß $\alpha_k < \alpha_{k+1}$. Sei $U^{(n)} := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}^{(n)}$, dann ist $(U^{(n)}; n \in \mathbb{N})$ eine Kette. Da $U_\alpha^{(k)} \subset U_\alpha^{(n)}$ für $k \geqq n$ und $\alpha_i \in J_k$ für $i \geqq k$, folgt aus (*), daß

$$B_k \subset m_k\, U_{\alpha_i}^{(n)} \quad \text{für} \quad i \geqq k \geqq n.$$

Hieraus folgt, daß jedes $U^{(n)}$ bornivor ist, $U^{(1)}$ ist also eine b_t^*-Nullumgebung.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $U_{\alpha_1}^{(1)} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}^{(1)}$ eine s_{α_k}-Nullumgebung, es gibt daher ein $b_k \in (U_{\alpha_1}^{(1)} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}^{(1)}) \cap B$, so daß $b_k \notin U_{\alpha_{k+1}}^{(1)} + U_{\alpha_{k+1}}^{(1)}$. Für $k < l$ ist dann $b_k - b_l \notin U^{(1)}$. Denn andernfalls ist $b_k - b_l \in U_{\alpha_{k+1}}^{(1)}$ und $b_l \in U_{\alpha_{k+1}}^{(1)}$, also $b_k \in U_{\alpha_{k+1}}^{(1)} + U_{\alpha_{k+1}}^{(1)}$. Es folgt, daß B bezüglich b_t^* nicht präkompakt ist. Eine bezüglich b_t^* präkompakte Menge B muß also bezüglich t eine abzählbare Nullumgebungsbasis haben.

Korollar 1. *Sei E ein (nicht notwendig lokalkonvexer) separierter (DF)-Raum, F ein t.l.R., $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ der lineare Raum der folgenstetigen linearen Abbildungen von E in F versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den präkompakten Teilmengen von E. Dann gilt:*

i) *Ist F von abzählbarem Typ, so ist auch $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ von abzählbarem Typ.*

ii) *Ist F vollständig, so ist auch $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ vollständig.*

Beweis. Ist F von abzählbarem Typ, so trägt F die Initialtopologie bezüglich einer Familie von linearen Abbildungen in separable vollständig metrisierbare t.l.R. Zum Beweis von i) kann man daher nach [3], Chapt. X, § 1.4, Prop. 4, annehmen, daß F separabel und vollständig metrisierbar ist. Ist $A \subset E$ präkompakt und $u \in \hat{\mathscr{L}}(E, F)$, so folgt mit (B), daß $u | A$ gleichmäßig stetig ist, wir können also die Einschränkungsabbildung $p_A : \hat{\mathscr{L}}(E, F) \to \mathscr{U}(A, F)$ betrachten ($\mathscr{U}(A, F)$ der lineare Raum der gleichmäßig stetigen Abbildungen von A in F versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf A). $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ trägt dann die Initialtopologie bezüglich der linearen Abbildungen

$$p_A : \hat{\mathscr{L}}(E, F) \to \mathscr{U}(A, F), \quad A \subset E \text{ präkompakt.}$$

Da F vollständig ist, kann man $\mathscr{U}(A, F)$ identifizieren mit dem Raum $\mathscr{C}(\tilde{A}, F)$ der stetigen Abbildungen auf der vollständigen Hülle von A mit Werten in F, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\tilde{A}$. Da nach (B) die präkompakten Mengen A, und dann auch ihre vollständigen Hüllen $\tilde{A}$, metrisierbar sind, sind nach [3], Chapt. X, § 3.3, Thm. 1, die Räume $\mathscr{C}(\tilde{A}, F)$ separabel. Es folgt, daß $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ von abzählbarem Typ ist.

Sei nun F ein vollständiger t.l.R., $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$. Wegen der Vollständigkeit von F gibt es eine lineare Abbildung u, so daß $\mathfrak{F}$ gegen u punktweise konvergiert, $\mathfrak{F}$ konvergiert aber dann sogar gleichmäßig auf allen präkompakten Teilmengen von E gegen u. Da die linearen Abbildungen aus $\hat{\mathscr{L}}(E, F)$ nach (B) auf den präkompakten Teilmengen von E gleichmäßig stetig sind, folgt, daß auch u auf allen präkompakten Mengen gleichmäßig stetig ist, es ist also $u \in \hat{\mathscr{L}}(E, F)$. Damit ist die Vollständigkeit von $\hat{\mathscr{L}}_p(E, F)$ bewiesen.

Bemerkung. Man kann Aussage i) von Korollar 1 als eine Verallgemeinerung von (a) betrachten.

Sei (E, t) ein separierter lokalkonvexer Raum. Für eine absolutkonvexe t-beschränkte Menge B bezeichne E_B den linearen Teilraum $\bigcup_{\varrho > 0} \varrho B$ versehen mit der durch B bestimmten normierbaren Topologie. Eine Folge (x_n) in E heißt eine *Mackey-Nullfolge*, wenn es ein B gibt, so daß (x_n) eine Nullfolge in E_B ist ([8], § 28.3). Eine Menge $A \subset E$ heiße *Mackey*-präkompakt, wenn es ein B gibt, so daß A in E_B präkompakt ist. Nach [8], § 21.10(3) und § 20.9(6), ist A genau dann Mackey-präkompakt, wenn es eine Mackey-Nullfolge (x_n) gibt, so daß $A \subset \{x \in E;\, x = \sum_1^{\infty} \lambda_n x_n \text{ mit } \sum_1^{\infty} |\lambda_n| \leqq 1\}$.

Korollar 2. *Sei (E, t) ein separierter lokalkonvexer Raum mit einer abzählbaren Basis der beschränkten Mengen; β_t^* bezeichne die von den bornivoren Tonnen $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n absolutkonvexe abgeschlossene Nullumgebungen, erzeugte lokalkonvexe Topologie. Dann sind äquivalent:*

i) *Jede β_t^*-Nullfolge ist eine Mackey-Nullfolge.*

ii) *Jede β_t^*-präkompakte Menge ist Mackey-präkompakt.*

Insbesondere ist in einem separierten lokalkonvexen (DF)-Raum jede präkompakte Menge Mackey-präkompakt genau dann, wenn jede Nullfolge eine Mackey-Nullfolge ist.

Beweis. i)$\Rightarrow$ii): Aus i) folgt nach Grothendieck ([7], Cor. 1 zu Prop. 15), daß zu jeder absolutkonvexen metrisierbaren Menge $A \subset E$ eine absolutkonvexe beschränkte Menge $B \subset E$ existiert, so daß A die von E_B induzierte Topologie trägt. Da nach Satz 2 jede β_t^*-präkompakte Menge metrisierbar ist, folgt ii).

ii)$\Rightarrow$i): Sei (a_n) eine β_t^*-Nullfolge, dann ist $A := \{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ Mackey-präkompakt, d.h. es gibt eine absolutkonvexe beschränkte Menge B, so daß A die von E_B induzierte Topologie trägt; insbesondere ist (a_n) eine Nullfolge in E_B.

Bemerkung. Nach [12], Satz 2, kann man in Korollar 2 die Topologie β_t^* durch die Topologie $\beta^*(E, E')$ ersetzen.

Sei (E, t) ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Es bezeichne t_p die feinste lokalkonvexe Topologie auf E, bezüglich welcher jede t-beschränkte Menge präkompakt ist; t_p ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den präkompakten Mengen des starken Duals $(E', \beta(E', E))$ ([8], § 21.7(1) und § 28.1(4)). Es bezeichne t_s die feinste Schwartz-Raum-Topologie auf E, die gröber als t ist; t_s ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mackey-präkompakten Teilmengen von $(E', \beta(E', E))$ ([13], § 2(4)).

Korollar 3. *Sei (E, t) ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Dann sind äquivalent:*

i) *In $(E', \beta(E', E))$ ist jede Nullfolge eine Mackey-Nullfolge.*

ii) *(E, t_p) ist ein Schwartz-Raum.*

iii) *Jede lineare Abbildung von E in einen Banach-Raum, die beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt, ist kompakt.*

Beweis. i)$\Rightarrow$ii): Wendet man Korollar 2 auf den (DF)-Raum $(E', \beta(E', E))$ an, so ergibt sich aus i), daß jede präkompakte Teilmenge von $(E', \beta(E', E))$ Mackey-präkompakt ist, d.h., daß $t_p \subset t_s$ ist; (E, t_p) ist dann ein Schwartz-Raum.

ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $f: E \to F$ eine lineare Abbildung in einen Banach-Raum F, die beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt. Dann ist $f: (E, t_p) \to F$ stetig, und da (E, t_p) ein Schwartz-Raum ist, ist f bezüglich t_p kompakt. Wegen $t_p \subset t$ ist f dann auch bezüglich t kompakt.

iii)$\Rightarrow$i): Sei (u_n) eine Nullfolge in $(E', \beta(E', E))$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f: E \to c_0, \quad x \mapsto (u_n(x)).$$

Bekanntlich ist eine Menge $K \subset c_0$ genau dann relativ kompakt, wenn es $(\alpha_n) \in c_0$ gibt, so daß $|\xi_n| \leqq \alpha_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $(\xi_n) \in K$. Da (u_n) auf jeder beschränkten Menge von E gleichmäßig gegen Null strebt, folgt, daß f beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen überführt. Wegen iii) gibt es also eine Nullumgebung U von E, so daß $f(U)$ relativ kompakt ist, d.h. so daß (u_n) auf U gleichmäßig gegen Null strebt; (u_n) ist dann eine Nullfolge in E'_{U° und somit eine Mackey-Nullfolge in $(E', \beta(E', E))$.

Bemerkung. Korollar 3 kann als eine Verallgemeinerung eines Satzes von Grothendieck-Dieudonné aufgefaßt werden, der besagt, daß ein Fréchet-Montel-Raum E genau dann ein Schwartz-Raum ist, wenn in $(E', \beta(E', E))$ jede Nullfolge eine Mackey-Nullfolge ist ([7], Prop. 17).

Nach [7], Definition 3 und Definition 4, ist ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum (E, t) genau dann quasinormabel, wenn $(E', \beta(E', E))$ die strikte Mackeysche Konvergenzbedingung erfüllt, d.h. wenn es zu jeder $\beta(E', E)$-beschränkten Menge B

eine absolutkonvexe abgeschlossene $\beta(E', E)$-beschränkte Menge $A \supset B$ gibt, so daß auf B die Topologie $\beta(E', E)$ mit der Topologie des normierbaren Raumes E'_A übereinstimmt; insbesondere genügt dann (E, t) der Bedingung i) des Korollars. Es erscheint bemerkenswert, daß somit jeder quasinormable metrisierbare lokalkonvexe Raum die Eigenschaft iii) besitzt. Die Frage des Referenten, ob es einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum E gibt, derart daß in $(E', \beta(E', E))$ die Mackeysche Konvergenzbedingung, aber nicht die strikte Mackeysche Konvergenzbedingung erfüllt ist (d.h. der die drei äquivalenten Eigenschaften aus Korollar 3 besitzt, aber nicht quasinormabel ist), müssen wir an den Leser weitergeben.

Literaturverzeichnis

[1] N. ADASCH, Lokalkonvexe Räume mit einer Fundamentalfolge beschränkter Teilmengen. Math. Ann. **199**, 257–261 (1972).
[2] C. BESSAGA and S. ROLEWICZ, On bounded sets in F-spaces. Colloq. Math. **9**, 89–91 (1962).
[3] N. BOURBAKI, General Topology. Paris 1966.
[4] J. DIEUDONNÉ, Sur les espaces de Montel séparables. C. R. Acad. Sci. Paris **238**, 194–195 (1954).
[5] B. ERNST, Ultra-DF-Räume. J. reine angew. Math. **258**, 87–102 (1973).
[6] H. G. GARNIR, M. DE WILDE et J. SCHMETS, Analyse Fonctionelle, Tome I. Basel und Stuttgart 1968.
[7] A. GROTHENDIECK, Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasil. Math. **3**, 57–122 (1954).
[8] G. KÖTHE, Topologische lineare Räume I. Zweite Auflage, Berlin 1966.
[9] J.-P. LAVIGNE, Approximation des fonctions uniformément continues. J. Math. Pures Appl. **51**, 419–427 (1972).
[10] J. P. LIGAUD, Espaces DF non nécessairement localement convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **275**, 283–285 (1972).
[11] S. ROLEWICZ, Metric linear spaces. Warschau 1972.
[12] H. PFISTER, Über eine Art von gemischter Topologie und einen Satz von A. Grothendieck über (DF)-Räume. Manuscripta math. **10**, 273–287 (1973).
[13] T. TERZIOGLU, On Schwartz spaces. Math. Ann. **194**, 236–242 (1969).

Eingegangen am 18. 11. 1974*)

Anschrift des Autors:

Helmut Pfister
Mathematisches Institut der
Universität München
D-8000 München 2
Theresienstr. 39

*) Eine leicht überarbeitete Fassung ging am 26. 3. 1975 ein.