Zur gruppentheoretischen Kennzeichnung elliptischer Bewegungsgruppen

Von

GÜNTER HEIMBECK

R. Baer hat in [1] unter anderem ein gruppentheoretisches Axiomensystem für Bewegungsgruppen elliptischer Ebenen angegeben. In der vorliegenden Note wird eine besonders prägnante Formulierung dieses Axiomensystems dargelegt. Den Ansatzpunkt für eine Vereinfachung gibt die Bemerkung, daß eines der Baerschen Axiome entbehrlich ist.

Das in Rede stehende Axiomensystem benutzt die *J-Bildung*. In einer vorerst beliebigen Gruppe G sei

$$J := \{j \in G \mid \operatorname{ord} j = 2\}$$

die Menge der Involutionen. Jeder Teilmenge $\Sigma \subset G$ wird

$$J(\Sigma) := \{j \in J \mid j\,\Sigma \subset J\}$$

zugeordnet. Für ein einzelnes Gruppenelement $g \in G$ kann $J(g)$ in doppelter Weise gedeutet werden. $J(g)$ besteht aus den Involutionen, die in Darstellungen von g als Produkt von zwei Involutionen vorkommen. Insbesondere ist $J(g)$ genau dann nicht leer, wenn g als Produkt von zwei Involutionen dargestellt werden kann. Außerdem ist $J(g)$ beschreibbar als Menge der Involutionen $\neq g$, die g in sein Inverses transformieren.

Im folgenden Hilfssatz stellen wir die Eigenschaften der J-Bildung, die im weiteren benötigt werden, zusammen. Für Gruppenelemente $g, h \in G$ sei $g^h := h^{-1} g h$.

Hilfssatz. *In einer Gruppe G gilt:*

a) $J(g)^h = J(g^h)$ *für* $g, h \in G$.

b) $J(g^{-1}) = J(g)$ *für jedes* $g \in G$.

c) *Aus* $J(g_1) \subset J(g_2)$ *folgt* $J(g_1) \subset J(g_1 g_2)$. *Im Falle* $J(g_1) \neq \emptyset$ *sind* g_1, g_2 *vertauschbar.*

d) *Zwei Involutionen* $j_1, j_2 \in J$ *mit* $J(j_1) \subset J(j_2)$ *und* $J(j_1) \neq \emptyset$ *sind gleich.*

e) *Für* $j \in J$ *ist* $J(J(j)) = \begin{cases} \{j\}, & \text{falls } J(j) \neq \emptyset, \\ J, & \text{falls } J(j) = \emptyset. \end{cases}$

Beweis. Daß a) und b) gelten, ist klar. — Zum Nachweis von c) stellen wir g_1 mit einer beliebig gewählten Involution $j \in J(g_1)$ dar: $g_1 = jj'$. j' gehört zu $J(g_1)$, nach Voraussetzung dann auch zu $J(g_2)$, es gibt eine Darstellung $g_2 = j'j''$ mit passender Involution j''. Nun ist $g_1 g_2 = (jj')(j'j'') = jj''$, also $j \in J(g_1 g_2)$. Eine Involution $j \in J(g_1)$ transformiert jedes der Elemente $g_1, g_2, g_1 g_2$ in das Inverse. Daher ist $g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2)^j = g_1^j g_2^j = g_1^{-1} g_2^{-1}$. Im Falle $J(g_1) \neq 0$ sind demnach g_1 und g_2 vertauschbar. — d) ist eine unmittelbare Folge von c): j_1, j_2 sind vertauschbar, wegen $j_2 \notin J(j_1)$ dann gleich. — Zur Begründung von e) darf $J(j) \neq \emptyset$ angenommen werden. Eine Involution $j' \in J(J(j))$ ist mit jedem Element von $J(j)$ vertauschbar, also ist $J(j) = J(j)^{j'} = J(j^{j'})$ und nach d) folgt $j = j^{j'}$, wegen $j' \notin J(j)$ dann $j' = j$. j gehört natürlich zu $J(J(j))$.

Nach [1], S. 269 ist eine Gruppe $G \neq \{1\}$ genau dann isomorph zur Bewegungsgruppe einer elliptischen Ebene, wenn sie folgende Eigenschaften hat.

(G.1) *Für jedes $g \in G - \{1\}$ besteht $J(J(g))$ aus genau einer Involution, die mit g^* bezeichnet wird.*

(G.2) *Für $g, h \neq 1$ folgt aus $g^* = h^*$ stets $J(g) = J(h)$.*

(G.3) *Sind j_1, j_2 verschiedene Involutionen, so ist $J(j_1) \cap J(j_2) = \{(j_1 j_2)^*\}$.*

(G.4) *Die Gruppe G hat triviales Zentrum.*

Ich will zeigen, daß dieses Axiomensystem mit dem folgenden gleichwertig ist.

(K.1) *Zu jedem $g \in G - \{1\}$ existiert eine Involution $j \in J$ mit $J(g) = J(j)$.*

(K.2) *Keine Involution aus G ist mit allen Involutionen vertauschbar.*

Der Gleichwertigkeitsbeweis zeigt, daß beim Axiomensystem (G) auf das Axiom (G.3) verzichtet werden kann.

Zunächst überlegen wir, daß eine Gruppe $G \neq \{1\}$ mit (G.1), (G.2) und (G.4) auch die Eigenschaften (K) erfüllt. Wegen $G \neq \{1\}$ und (G.1) enthält G eine Involution, wegen (G.4) dann mindestens zwei. (G.1) zeigt jetzt, daß $J(g) \neq \emptyset$ für jedes $g \neq 1$ gilt. Weil die Gruppe G das Erzeugnis ihrer Involutionen ist, folgt (K.2) aus (G.4). Für eine Involution $j \in J$ ist $j^* = j$, denn nach Hilfssatz, e) gilt $J(J(j)) = \{j\}$. Aus $g^* = (g^*)^*$ für $g \neq 1$ folgt gemäß (G.2) $J(g) = J(g^*)$, was die Gültigkeit von (K.1) beweist.

Im weiteren wird der Begriff der *Partition einer Gruppe* benötigt (vgl. [2]). Eine Partition einer Gruppe $G \neq \{1\}$ ist ein System von Untergruppen $\neq \{1\}$ mit der Eigenschaft, daß jedes Gruppenelement $\neq 1$ in genau einer Untergruppe des Systems enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, daß in einer Gruppe mit Partition zwei vertauschbare Elemente verschiedener Ordnung derselben Komponente angehören (vgl. [2], S. 337, Lemma 2.1).

Nun nehmen wir an, daß die Gruppe $G \neq \{1\}$ die Eigenschaften (K) hat und wollen zeigen, daß dann auch die Axiome (G) erfüllt sind.

a) *Für jedes $g \in G$ ist $J(g) \neq \emptyset$.*

Beweis. Wegen $G \neq \{1\}$ und (K.1) ist $J \neq \emptyset$. Zu $j \in J$ gibt es nach (K.2) ein $j' \in J$ mit $jj' \neq j'j$. Nach (K.1) existiert eine Involution $j'' \in J$ mit $J(jj') = J(j'')$. Wegen $j \in J(jj')$ ist $j'' \in J(j)$, also $J(j) \neq \emptyset$. Mit (K.1) folgt jetzt die Behauptung.

b) *Die Gruppe G hat die Eigenschaften* (G.1), (G.2) *und* (G.4).

Beweis. Zu $g \neq 1$ gibt es nach (K.1) ein $j \in J$ mit $J(g) = J(j)$. Wegen $J(j) \neq \emptyset$ folgt nach Teil e) des Hilfssatzes $J(J(g)) = J(J(j)) = \{j\}$. Also ist (G.1) zutreffend. Die durch g eindeutig bestimmte Involution j bezeichnen wir mit g^*. Es gilt $J(g) = J(g^*)$ und daraus folgt (G.2) unmittelbar. Nach a) ist jedes Element von G als Produkt von zwei Involutionen darstellbar. Also ist das Zentrum von G eine Gruppe vom Exponenten 2, nach (K.2) dann trivial.

c) *Sind j_1, j_2 verschiedene Involutionen, so ist* $(j_1 j_2)^* \in J(j_1) \cap J(j_2)$.

Beweis. Es gilt $j_1, j_2 \in J(j_1 j_2) = J((j_1 j_2)^*)$.

d) *Für eine Involution $j \in J$ ist*

$$K(j) := \{g \in G \mid g = 1 \text{ oder } J(g) = J(j)\}$$

eine abelsche Untergruppe von G; j ist die einzige Involution in $K(j)$. $(K(j))_{j \in J}$ bildet eine Partition von G.

Beweis. Nach Hilfssatz, b) enthält $K(j)$ mit jedem Element das Inverse. Sind $g_1, g_2 \in K(j)$ mit $g_1, g_2, g_1 g_2 \neq 1$, so ist $J(g_1) = J(j) = J(g_2) \neq \emptyset$. Nach Hilfssatz, c) sind g_1, g_2 vertauschbar und $J(j) \subset J(g_1 g_2) = J((g_1 g_2)^*)$, mit Teil d) des Hilfssatzes folgt $j = (g_1 g_2)^*$, also $J(g_1 g_2) = J(j)$, d.h. $g_1 g_2 \in K(j)$. $K(j)$ ist als abelsche Untergruppe erkannt. Gemäß Hilfssatz, d) ist j die einzige Involution in $K(j)$. Wegen (K.1) bildet $(K(j))_{j \in J}$ eine Partition der Gruppe G.

e) *Für den Zentralisator $C(j)$ einer Involution $j \in J$ in G gilt:*

$$C(j) = K(j) \cup J(j), (C(j) : K(j)) = 2 .$$

Beweis. $J(j) \subset C(j)$ ist klar. Ein Element von $C(j) - K(j)$ ist mit j vertauschbar und liegt nicht in der Komponente von j. Also besteht $C(j) - K(j)$ aus Involutionen, wir haben $C(j) - K(j) \subset J(j)$. Um die Aussage über den Index zu begründen, unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $\operatorname{ord} K(j) > 2$. Für $j_1, j_2 \in J(j)$ ist $j_1 j_2$ mit jedem Element von $K(j)$ vertauschbar. Wegen $\operatorname{ord} K(j) > 2$ enthält $K(j)$ zwei Elemente $\neq 1$ verschiedener Ordnung. Folglich ist $j_1 j_2 \in K(j)$.

2. Fall: $\operatorname{ord} K(j) = 2$. Jetzt ist $C(j)$ eine Gruppe vom Exponenten 2, also abelsch. Nach (K.2) gibt es eine nicht mit j vertauschbare Involution j'. Nach c) kann man eine Involution $j_1 \in J(j) \cap J(j')$ wählen. $J(j_1)$ enthält die nicht vertauschbaren Involutionen j, j', folglich ist $\operatorname{ord} K(j_1) > 2$ und nach dem bereits Bewiesenen $(C(j_1) : K(j_1)) = 2$. Nun sei $j_2 \in C(j) - \{1, j, j_1\}$. j_2 und j liegen beide in $J(j_1)$, also ist $j_2 j$ eine Involution aus $K(j_1)$, es folgt $j_2 j = j_1$, d.h. $j_2 = j_1 j$. Demnach ist $C(j)$ eine Vierergruppe, und die Aussage über den Index ist wiederum zutreffend. (Es sei angemerkt, daß der Fall $\operatorname{ord} K(j) = 2$ faktisch nicht eintreten kann.)

f) *Die Gruppe G erfüllt* (G.3).

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß für verschiedene Involutionen j_1, j_2 der Durchschnitt $J(j_1) \cap J(j_2)$ höchstens ein Element enthält. Aus $j', j'' \in J(j_1) \cap J(j_2)$ folgt mit e) $j' j'' \in K(j_1) \cap K(j_2) = \{1\}$, also $j' = j''$.

Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtung im folgenden Satz zusammen.

Satz. *Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ ist genau dann isomorph zur Bewegungsgruppe einer elliptischen Ebene, wenn sie die Eigenschaften* (K) *hat.*

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, The group of motions of a two dimensional elliptic geometry. Com. math. **9**, 241–288 (1951).
[2] R. Baer, Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333–372 (1961).
[3] G. Heimbeck, Gruppen mit starren Richtelementen. Diss., Würzburg 1974.

Eingegangen am 7. 1. 1976

Anschrift des Autors:

Günter Heimbeck
Mathematisches Institut der Universität
Am Hubland
D-8700 Würzburg