Arch. Math., Vol. 36, 35–44 (1981)

0003-889X/81/3601-0010 $ 01.50+0.20/0
© 1981 Birkhäuser Verlag, Basel

Rationale quasihomogene Singularitäten

Von

Hubert Flenner

Einleitung. Sei X ein normales algebraisches k-Schema über dem Körper k der Charakteristik 0. Man nennt X in einem Punkt x bekanntlich rational, wenn die höheren direkten Bilder $\mathrm{R}^i p_* (\mathcal{O}_{X'})_x$, $i > 0$, verschwinden für eine (und damit jede) Singularitätenauflösung $X' \xrightarrow{p} X$. Unser Ziel in der vorliegenden Note ist es, einige Kriterien herzuleiten, die es erlauben, wenigstens bei großen Klassen von Beispielen die Rationalität festzustellen ohne explizite Kenntnis einer Auflösung.

Die wichtigsten Aussagen lassen sich kurz wie folgt beschreiben. Sei $A = \coprod_{i \geqq 0} A_i$ eine quasihomogene normale k-Algebra mit $A_+ \neq 0$ derart, daß A rational ist außerhalb von $\mathrm{V}(A_+)$. Dann ist A rational genau dann, wenn A Cohen-Macaulaysch ist und die homogenen Komponenten $(\omega_A)_i$, $i \leqq 0$, des dualisierenden Moduls von A verschwinden, vgl. (3.1). Wendet man dies Kriterium auf quasihomogene vollständige Durchschnitte $A = k[X_1, \ldots, X_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r)$ mit isolierter Singularität an, so erhält man, vgl. (3.8): A ist genau dann rational, wenn $w_1 + \cdots + w_{n+r} > d_1 + \cdots + d_r$ ist. Dabei haben wir mit w_i das Gewicht der Unbestimmten X_i und mit d_i den Grad von f_i bezeichnet. Für den Fall von Brieskorn-Polynomen wurde dies in [1], (12.2) gezeigt.

Brauchbare Rationalitätskriterien erhält man in gewissen Situationen auch bei nicht quasihomogenen Algebren. Sei A eine normale k-Algebra endlichen Typs und $\mathfrak{a}_\nu \subsetneqq A$ eine „gute“ absteigende Folge von Idealen. In Verallgemeinerung von [1], (7.12) zeigen wir in (3.5): Ist der assoziierte graduierte Ring $C = \coprod_{\nu \geqq 0} \mathfrak{a}_\nu/\mathfrak{a}_{\nu+1}$ rational, so ist auch A rational. Unter geeigneten Voraussetzungen (die beispielsweise dann erfüllt sind, wenn C Cohen-Macaulaysch ist und eine isolierte Singularität besitzt) gilt auch die Umkehrung dieser Aussage ((3.7)). Als Anwendung zeigen wir in (3.10), daß sich das oben beschriebene Kriterium für die Rationalität von quasihomogenen vollständigen Durchschnitten übertragen läßt auf semiquasihomogene vollständige Durchschnitte.

1. Einige Kriterien für Rationalität. Sei im folgenden k stets ein Körper der Charakteristik 0 und X ein normales algebraisches k-Schema. Mit ω_X bezeichnen wir den dualisierenden Modul im Sinne von Grothendieck und mit K_X den kanonischen Modul im Sinne von Grauert-Riemenschneider [4]: Ist $X' \xrightarrow{p} X$ eine Singularitätenauflösung, so ist $\mathrm{K}_X := p_*(\omega_{X'})$. Man hat stets eine natürliche Abbildung $\mathrm{K}_X \to \omega_X$, die injektiv ist. Wir erinnern zunächst an die folgende Aussage, die wir häufig verwenden werden:

(1.1) Satz. *Äquivalent sind:*

(1) *X ist rational.*

(2) *X ist Cohen-Macaulaysch und es ist* $\mathrm{K}_X = \omega_X$.

Zum Beweis sei auf [1], (7.2), und [3] verwiesen.

(1.2) Bemerkungen. (1) Diese Aussage gestattet es, K_X aus einer rationalen Auflösung $X' \xrightarrow{p} X$ von X zu berechnen. Dies werden wir im folgenden häufig verwenden.

(2) Wir erinnern noch an den Verschwindungssatz von Grauert-Riemenschneider [4], (2.3): Ist $p\colon X' \to X$ eine Singularitätenauflösung von X, so sind die direkten Bilder $\mathrm{R}^i p_*(\omega_{X'})$ Null für $i > 0$. Auch dies gilt etwas allgemeiner für rationale Auflösungen.

(1.3) Satz. *Sei X quasigorensteinsch (d.h. ω_X ist lokal frei). Dann sind äquivalent:*

(1) *X ist rational.*

(2) $\mathrm{K}_X = \omega_X$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus (1.1). Zum Nachweis von (2) $\Rightarrow$ (1) zeigen wir durch Induktion nach $\dim(\mathcal{O}_{X,a})$, daß X in a rational ist. Für $\dim(\mathcal{O}_{X,a}) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim(\mathcal{O}_{X,a}) > 0$. Nach Abändern der Bezeichnungen dürfen wir annehmen, daß X das Spektrum eines lokalen Ringes mit abgeschlossenem Punkt a ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist X außerhalb von a rational. Sei $p\colon X' \to X$ eine Singularitätenauflösung und $E := p^{-1}(a)$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & \mathrm{H}^i_E(X', \mathcal{O}_{X'}) & \to & \mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'}) & \to & \mathrm{H}^i(X'\setminus E, \mathcal{O}_{X'}) & \to \cdots \\
& \downarrow{\cdot\omega} & & \downarrow{\cdot\omega} & & \downarrow{\cdot\omega} & \\
\cdots \to & \mathrm{H}^i_E(X', \omega_{X'}) & \to & \mathrm{H}^i(X', \omega_{X'}) & \to & \mathrm{H}^i(X'\setminus E, \omega_{X'}) & \to \cdots
\end{array}$$

Dabei sei $\omega \in \Gamma(X, \omega_X)$ eine Basis von ω_X. Für $0 < i < \dim(\mathcal{O}_{X,a})$ verschwindet $\mathrm{H}^i(X', \omega_{X'})$, und aus dem Satz von Grauert-Riemenschneider in seiner dualen Formulierung [7], (2.2) folgt, daß auch $\mathrm{H}^i_E(X', \mathcal{O}_{X'})$ Null ist. Damit also $\mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'})$ verschwindet, reicht es zu zeigen, daß der rechte vertikale Pfeil bijektiv ist. Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{R}p_*(\mathcal{O}_{X'})\,|\,X\setminus\{a\} \cong \mathcal{O}_X\,|\,X\setminus\{a\}$. Mit der Lerayschen Spektralsequenz folgt $\mathrm{H}^i(X'\setminus E, \mathcal{O}_{X'}) \cong \mathrm{H}^i(X\setminus\{a\}, \mathcal{O}_X)$. Ferner ist $\mathrm{R}p_*(\omega_{X'}) \cong \omega_X$ und somit $\mathrm{H}^i(X'\setminus E, \omega_{X'}) \cong \mathrm{H}^i(X\setminus\{a\}, \omega_X)$. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Sei X weiter ein normales algebraisches k-Schema der Dimension $n > 1$ und $X' \xrightarrow{p} X$ eine Singularitätenauflösung. Die Moduln $\mathrm{M}^i_X := \mathrm{R}^i p_*(\mathcal{O}_{X'})$ sind dann bekanntlich unabhängig von der gewählten Auflösung (vgl. [7], (2.1)). Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Im Fall, daß $X\setminus\{x\}$ rational ist, läßt sich M^{n-1}_X aus der Kenntnis von K_X und ω_X bestimmen. Es gilt nämlich in dieser Situation:

(1.4) Satz ([3], p. 142, 11. Z.v.o.). *Es sei I die injektive Hülle von $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$. Dann ist*

$$\mathrm{M}_X^{n-1} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X/\mathrm{K}_X, I).$$

Diese Aussage wird in loc. cit. nur für isolierte Singularitäten ausgesprochen; sie gilt aber auch entsprechend in dieser etwas allgemeineren Situation.

2. Hilfsaussagen über Graduierungen. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und $A = \coprod_{\nu \geq 0} A_\nu$ eine positiv graduierte k-Algebra von endlichem Typ. Sei $f \in A$ homogen vom Grad $d > 0$. Ist ζ eine primitive d-te Einheitswurzel, so operiert die Gruppe $G := \mathbb{Z}/(d)$ auf A via $A_\nu \ni x \mapsto \zeta^\nu x$. Weil $f - 1$ G-invariant ist, drückt sich diese Operation durch zu einer Operation auf $A/(f-1)$, und diese Operation erweitern wir nach $A/(f-1)[T, T^{-1}]$ vermöge $T \mapsto \zeta^{-1} \cdot T$. Es gilt:

(2.1) Lemma. (1) *Die kanonische Abbildung $(A_f)_0 \to A/(f-1)$ identifiziert $(A_f)_0$ mit $(A/(f-1))^G$.*

(2) *Die kanonische Abbildung $A_f \xrightarrow{\varphi} A/(f-1)[T, T^{-1}]$ mit $x/f^r \mapsto \bar{x} \cdot T^{\mathrm{grad}(x) - rd}$ (x homogen) identifiziert A_f mit $A/(f-1)[T, T^{-1}]^G$.*

Beweis. Es reicht offenbar, (2) zu zeigen. Versehen wir $A/(f-1)[T, T^{-1}]$ mit der Graduierung $\coprod_{\nu \in \mathbb{Z}} A/(f-1) \cdot T^\nu$, so ist φ homogen. φ ist injektiv: Sei nämlich $\varphi(x/f^r) = 0$. Wegen der Homogenität von φ darf man annehmen, daß x homogen ist. Dann folgt $\bar{x} = 0$ in $A/(f-1)$, i.e. x hat die Form $(f-1)y$ mit einem $y \in A$. Durch Vergleich der homogenen Komponenten ergibt sich hieraus leicht, daß $x = y = 0$ in A_f.

Offenbar ist Bild(φ) G-invariant. Sei umgekehrt $z \in A/(f-1)[T, T^{-1}]^G$. Wir dürfen annehmen, daß z ein Monom $\bar{x} \cdot T^s$ ist, wobei $x \in A$. Indem wir $x \cdot T^s$ durch $(1/d) \cdot \sum_{g \in G} g(x \cdot T^s)$ ersetzen, dürfen wir bereits $x \cdot T^s$ als G-invariant voraussetzen. Ist dann aber $x = \sum_\nu x_\nu$ die homogene Zerlegung von x, so ist auch $x_\nu \cdot T^s$ G-invariant, und somit folgt, daß für $x_\nu \neq 0$ $\zeta^{\nu - s} = 1$ ist. Daher hat s die Gestalt $\nu - r_\nu \cdot d$ mit geeigneten $r_\nu \in \mathbb{Z}$. Es folgt, daß $z = \varphi\left(\sum_\nu x_\nu/f^{r_\nu}\right)$, q.e.d.

(2.2) Lemma. *Die Abbildung φ aus* (2.1) (2) *ist étale.*

Beweis. Der Kern der Surjektion

$$\varphi[T, T^{-1}]\colon A_f[T, T^{-1}] \to A/(f-1)[T, T^{-1}]$$

wird von $f \cdot T^{-d} - 1$ erzeugt, wie man leicht sieht. Wegen des Jacobi-Kriteriums reicht es zu zeigen, daß es eine A_f-Derivation δ von $A_f[T, T^{-1}]$ gibt mit $\delta(f \cdot T^{-d} - 1) = 1$. Eine Derivation dieser Art ist aber die A_f-Derivation mit $\delta(T) = -T^{d+1}/fd$.

Aus (2.1) und (2.2) erhält man beispielsweise:

(2.3) Korollar. *Sei k ein Körper der Charakteristik* 0 *und A eine positiv graduierte k-Algebra endlichen Typs.* $\mathrm{Spek}(A)\setminus \mathrm{V}(A_+)$ *habe eine der folgenden Eigenschaften*:

(i) *normal,* (ii) (S_k), (iii) *Cohen-Macaulaysch,* (iv) *rational. Dann hat* $Y := \mathrm{Proj}(A)$ *die entsprechende Eigenschaft.*

Dabei haben wir mit A_+ das Ideal $\coprod\limits_{\nu>0} A_\nu$ bezeichnet.

Beweis. Es besitze $\mathrm{Spek}(A)\setminus \mathrm{V}(A_+)$ eine der obigen Eigenschaften. Sei $f \in A$ homogen vom Grad d. Dann besitzt wegen (2.2) auch $A/(f-1)$ die entsprechende Eigenschaft, und da diese Eigenschaften bekanntlich bei Invariantenbildung erhalten bleiben, hat dann auch $(A_f)_0$ die entsprechende Eigenschaft. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

(2.4) Lemma. *Sei A wie in* (2.3), *$\mathfrak{a}_\mu$ das Ideal $\coprod\limits_{\nu\geqq\mu} A_\nu$ und B der Unterring $\coprod\limits_{\mu\geqq 0} \mathfrak{a}_\mu S^\mu$ des Polynomrings $A[S]$. Dann ist für $f \in A_d$*

$$(B_{f\cdot S^d})_0 \cong (A_f)_{\geqq 0} := \coprod_{\nu\geqq 0} (A_f)_\nu .$$

Dabei verstehen wir hier unter $(B_{f\cdot S^d})_0$ die 0-te homogene Komponente bezüglich der Graduierung, die man aus der Graduierung $\coprod\limits_{\mu} \mathfrak{a}_\mu S^\mu$ von B durch Lokalisieren erhält. Der Beweis dieser einfachen Aussage sei dem Leser überlassen. Aus (2.4) ergibt sich unmittelbar:

(2.5) Korollar. *Es ist* $\mathrm{Proj}(B)$ *kanonisch isomorph zum Spektrum der $\mathcal{O}_Y$-Algebra $\coprod\limits_{\nu\geqq 0} \mathcal{O}_Y(\nu)$ und* $\mathrm{Spek}(A)\setminus \mathrm{V}(A_+)$ *zum Spektrum der $\mathcal{O}_Y$-Algebra $\coprod\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_Y(\nu)$.*

Wir betrachten nun eine neue Situation. Es sei k ein Körper der Charakteristik 0 und A eine k-Algebra von endlichem Typ. $\mathfrak{a}_\nu \subseteqq A$, $\nu \geqq 0$, sei eine absteigende Folge von Idealen mit $\mathfrak{a}_0 = A$ und $\mathfrak{a}_\nu \cdot \mathfrak{a}_\mu \subseteqq \mathfrak{a}_{\nu+\mu}$ derart, daß der Ring $B := \coprod\limits_{\mu\geqq 0} \mathfrak{a}_\mu S^\mu$ eine A-Algebra von endlichem Typ ist. Mit C bezeichnen wir den assoziierten graduierten Ring $\coprod\limits_{\mu\geqq 0} (\mathfrak{a}_\mu/\mathfrak{a}_{\mu+1}) S^\mu$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(2.6) Satz. *Ist* $\mathrm{Spek}(C)\setminus \mathrm{V}(C_+)$ *rational, so ist auch* $X' := \mathrm{Proj}(B)$ *in einer Umgebung des Unterschemas* $Y := \mathrm{Proj}(C)$ *rational.*

Beweis. Wir dürfen o.E. annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Sei $f \in \mathfrak{a}_d \setminus \mathfrak{a}_{d+1}$. Dann wird der Kern der kanonischen Surjektion

$$B/(f S^d - 1) \to C/(\bar{f} S^d - 1)$$

von der Restklasse von $f S^{d-1}$ erzeugt. Um dies einzusehen, reicht es offenbar zu zeigen, daß die Restklassen der Monome $g S^r$, $g \in \mathfrak{a}_{r+1}$, Vielfache von $f S^{d-1}$ sind. Dies ergibt sich aber aus der Gleichung

$$g S^r (f S^d - 1) = g S^{r+1} \cdot f S^{d-1} - g S^r .$$

Zeigen wir als nächstes, daß die Restklasse von $f S^{d-1}$ in $B/(f S^d - 1)$ ein Nichtnullteiler ist. Dazu betrachten wir eine Relation

$$fS^{d-1}\cdot\alpha = (fS^d - 1)\cdot\beta$$

mit $\alpha = \sum \alpha_\mu S^\mu$, $\beta = \sum \beta_\mu S^\mu$. Wir müssen zeigen, daß dann bereits α ein Vielfaches von $fS^d - 1$ ist. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$f\alpha_{\mu-d+1} = f\beta_{\mu-d} - \beta_\mu,$$

woraus sich durch aufsteigende Induktion nach μ eine Darstellung $\beta_\mu = \beta'_{\mu-d+1}f$ mit einem $\beta'_{\mu-d+1} \in \mathfrak{a}_{\mu-d+1}$ ergibt. Es sei $\beta' = \sum \beta'_\mu S^\mu$. Nach Konstruktion ist dann $fS^{d-1}\cdot\beta' = \beta$, und indem wir α durch $\alpha - (fS^d - 1)\beta'$ ersetzen, können wir erreichen, daß bereits $fS^{d-1}\cdot\alpha = 0$ ist. Dann ist aber $\alpha = (1 - fS^d)\alpha$. Dies zeigt, daß die Restklasse von fS^{d-1} in der Tat ein Nichtnullteiler ist in $B/(fS^d - 1)$.

Nun können wir leicht die Behauptung des Satzes beweisen. Mit $\operatorname{Spek}(C)\setminus\mathrm{V}(C_+)$ ist auch $C_{\bar{f}S^d}$ rational. Somit ist wegen (2.2) auch $C/(\bar{f}S^d - 1)$ rational, und der Satz von Elkik [3], Théorème 2, zeigt, daß dann bereits $B/(fS^d - 1)$ rational ist in einer Umgebung des Unterschemas $\operatorname{Spek}(C/(\bar{f}S^d - 1))$. Nun ist nach (2.1) $(B_{fS^d})_0$ Invariantenring von $B/(fS^d - 1)$ und deshalb ebenfalls rational in einer Umgebung des Unterschemas $\operatorname{Spek}((C_{\bar{f}S^d})_0)$, vgl. [1], (5.8). Dies beweist die Aussage des Satzes.

(2.7) Bemerkung. Eine entsprechende Aussage gilt für die Eigenschaften normal, (S_k), Cohen-Macaulaysch und r-rational.

3. Rationalität bei quasihomogenen Singularitäten. Sei k in diesem Abschnitt stets ein Körper der Charakteristik 0. Für eine normale k-Algebra A von endlichem Typ bezeichnen wir mit $\mathrm{K}_A := \Gamma(\operatorname{Spek}(A), K_{\operatorname{Spek}(A)})$ den kanonischen Modul von A im Sinne von Grauert-Riemenschneider und mit ω_A den dualisierenden Modul von A. Es ist wohlbekannt, daß ω_A kanonisch isomorph ist zum Modul der regulären Differentialformen $(\bigwedge^n \Omega_A)^{**}$, wobei $n = \dim A$, vgl. [8].

Ist $A = \coprod_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu$ eine normale graduierte k-Algebra, so trägt $\bigwedge^n \Omega_A$ in natürlicher Weise eine Graduierung und somit auch $\omega_A = (\bigwedge^n \Omega_A)^{**}$. Wir wollen zeigen:

(3.1) Satz. *Sei $A = \coprod_{\nu\geqq 0} A_\nu$ eine positiv graduierte normale k-Algebra. Das Ideal A_+ habe eine Kodimension $\geqq 1$, und A sei rational außerhalb von $\mathrm{V}(A_+)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist rational.*

(2) *A ist Cohen-Macaulaysch, und es ist $(\omega_A)_i = 0$ für $i \leqq 0$.*

Ist A überdies quasigorensteinsch, so sind (1) *und* (2) *auch äquivalent zu:*

(3) *$(\omega_A)_i = 0$ für $i \leqq 0$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_\nu := \coprod_{\mu\geqq\nu} A_\mu$, B der graduierte Ring $\coprod_{\nu\geqq 0} \mathfrak{a}_\nu S^\nu$ sowie $X' := \operatorname{Proj}(B)$. Dann ist wegen (2.6) die kanonische Abbildung $p\colon X' \to \operatorname{Spek}(A)$ eine rationale Auflösung von $\operatorname{Spek}(A)$ und somit $\mathrm{K}_A = \Gamma(X', \omega_{X'})$. Wegen (1.1) und (1.3) ergibt sich die Aussage nun aus:

(3.2) Satz. *Es ist* $\Gamma(X', \omega_{X'}) = \coprod_{i>0} (\omega_A)_i$.
Zunächst bemerken wir:

(3.3) Lemma. $\Gamma(X', \omega_{X'})$ *ist ein graduierter Untermodul von* ω_A.

Beweis. Für $\lambda \in k^*$ sei $m_\lambda \colon A \to A$ der Isomorphismus mit $A_\nu \ni a \mapsto \lambda^\nu \cdot a$. Dann läßt sich m_λ zu einem Homomorphismus $m_\lambda \colon B \to B$ erweitern mit $aS^r \mapsto \lambda^\nu aS^r$, falls $a \in A_\nu$. Somit induziert m_λ einem m_λ-Homomorphismus $m_\lambda^* \colon \omega_A \to \omega_A$ mit $m_\lambda^*(\Gamma(X', \omega_{X'})) = \Gamma(X', \omega_{X'})$. Man überlegt sich leicht, daß m_λ auf $(\omega_A)_i$ die Multiplikation mit λ^i ist. Ist daher $\omega \in \Gamma(X', \omega_{X'})$ und $\omega = \sum_i \omega_i$ die homogene Zerlegung von ω in ω_A, so ist für $\lambda \in k^*$ auch $\sum \lambda^i \omega_i \in \Gamma(X', \omega_{X'})$. Dies impliziert aber, daß auch ω_i in $\Gamma(X', \omega_{X'})$ liegt, wie man leicht sieht.

Beweis von (3.2). Wir dürfen o.E. k als algebraisch abgeschlossen voraussetzen. Sei $Y := \operatorname{Proj}(A)$. Es ist $Y_{\mathrm{red}} = p^{-1}(\mathrm{V}(A_+))_{\mathrm{red}}$, und

$$p \mid (X' \setminus Y) : X' \setminus Y \to \operatorname{Spek}(A) \setminus \mathrm{V}(A_+)$$

ist ein Isomorphismus. Sei $\omega \in (\omega_A)_i$ eine reguläre Differentialform vom Grad i. Wir zeigen, daß sich die durch ω gegebene Form auf $X' \setminus Y$ genau dann über Y fortsetzen läßt, wenn $i > 0$ ist.

Sei hierzu $f \in A_d$, $f \neq 0$. Dann ist die affine Teilmenge $\mathrm{D}_+(fS^d)$ von X' isomorph zu $\operatorname{Spek}((A_f)_{\geq 0})$, vgl. (2.4), und es ist $\mathrm{D}_+(f \cdot S^d) \setminus Y$ unter p offenbar isomorph zu $\mathrm{D}(f) \cong \operatorname{Spek}(A_f)$. Dabei ist die offene Einbettung $\mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{D}_+(fS^d)$ gegeben durch den kanonischen Homomorphismus $(A_f)_{\geq 0} \subseteq A_f$. Wir betrachten das folgende kanonische Diagramm von normalen graduierten Algebren. vgl. (2.1), (2.2):

$$\begin{tikzcd} (A_f)_{\geq 0} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A_f \arrow[d, hook, "\varphi"] \\ C[T] \arrow[r, hook] & C[T, T^{-1}] \end{tikzcd}$$

mit $C := A/(f-1)$. Dabei graduieren wir die unteren Ringe so, daß $\operatorname{grad}(T) = 1$ ist. Nach (2.1) operiert die Gruppe $G := \mathbb{Z}/(d)$ homogen auf $C[T, T^{-1}]$ mit Invariantenring A_f. Man sieht leicht, daß diese Operation sich auf $C[T]$ überträgt und hier den Invariantenring $(A_f)_{\geq 0}$ hat.

Die vorgegebene Differentialform ω auf A vom Grad i liefert durch Einschränken eine Differentialform $\omega \mid A_f$ über A_f. Nun ist nach [10], (2.1), ω_{A_f} gerade der Modul der invarianten regulären Formen $(\omega_{C[T, T^{-1}]})^G$ und entsprechend ist $\omega_{(A_f)_{\geq 0}} \cong (\omega_{C[T]})^G$. Daher reicht es zu zeigen, daß eine reguläre homogene Differentialform η in $\omega_{C[T, T^{-1}]}$ genau dann bereits in $\omega_{C[T]}$ liegt, wenn $\operatorname{grad}(\eta) > 0$ ist. Dies ist aber offensichtlich, da $\omega_{C[T]}$ als graduierter Modul kanonisch isomorph zu $\omega_C \otimes_C C[T] \cdot dT$ ist. Damit ist (3.2) bewiesen.

In Verbindung mit (1.4) liefert uns die Gleichheit $\mathrm{H}^0(X', \omega_{X'}) = \coprod_{i>0} (\omega_A)_i$ die folgende explizite Formel.

(3.4) Korollar. *Sei A eine normale graduierte k-Algebra der Dimension $n > 1$ mit $A_0 = k$ derart, daß* $\operatorname{Spek}(A)\backslash \mathrm{V}(A_+)$ *rational ist. Dann ist*

$$\dim_k(\mathrm{M}_A^{n-1}) = \sum_{i \leqq 0} \dim_k(\omega_A)_i .$$

In Verallgemeinerung der Aussage (7.12) in [1] zeigen wir nun noch:

(3.5) Satz. *Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ und $\mathfrak{a}_\nu \subseteq A$, $\nu \geqq 0$, eine absteigende Folge von Idealen mit $\mathfrak{a}_0 = A$ und $\mathfrak{a}_\nu \cdot \mathfrak{a}_\mu \subseteq \mathfrak{a}_{\mu+\nu}$ derart, daß die A-Algebra $B := \coprod_{\nu \geqq 0} \mathfrak{a}_\nu \cdot S^\nu$ endlich erzeugt ist. Ferner sei C der assoziierte graduierte Ring $\coprod_{\nu \geqq 0} (\mathfrak{a}_\nu/\mathfrak{a}_{\nu+1}) \cdot S^\nu$. Ist dann C rational, so ist auch* $\operatorname{Spek}(A)$ *rational in einer Umgebung des abgeschlossenen Unterschemas* $\mathrm{V}(\mathfrak{a}_1)$.

Beweis. Da $C_0 = A/\mathfrak{a}_1$ ein Integritätsring ist, muß $\mathfrak{a}_1 \subsetneqq A$ ein Primideal sein. Ist $\operatorname{kodim}(\mathfrak{a}_1) = 0$, so stimmen A und C nach Lokalisieren überein, wie man leicht sieht. Wir wollen von nun an $\operatorname{kodim}(\mathfrak{a}_1) \geqq 1$ voraussetzen. Dies impliziert dann insbesondere, daß $p\colon X' := \operatorname{Proj}(B) \to \operatorname{Spek}(A)$ surjektiv ist. Nach (2.6) ist X' rational in einer Umgebung des Unterschemas $Y := \operatorname{Proj}(C)$. Wir dürfen o.E. annehmen, daß X' bereits überall rational ist. Es ist zu zeigen, daß die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'})$ verschwinden für $i > 0$ und, um die Normalität von $\operatorname{Spek}(A)$ abzusichern, daß $\mathrm{H}^0(X', \mathcal{O}_{X'}) \cong A$ ist.

Sei dazu $\mathfrak{b}_\nu \subseteq \mathcal{O}_{X'}$, $\nu \geqq 0$, das durch $\coprod_{j \geqq 0} \mathfrak{a}_{j+\nu} S^j \subseteq B$ induzierte Ideal. Wegen des Vergleichssatzes reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{H}^0(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) \cong A/\mathfrak{a}_\nu$ und daß $\mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) = 0$, $i > 0$. Nun ist $\mathfrak{b}_\nu/\mathfrak{b}_{\nu+1} \cong \mathcal{O}_Y(\nu)$, und wegen der exakten Kohomologiesequenzen

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(X', \mathfrak{b}_\nu/\mathfrak{b}_{\nu+1}) \to \mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_{\nu+1}) \to \mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) \to \cdots$$

reicht es deshalb nachzuweisen, daß $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) \cong \mathfrak{a}_\nu/\mathfrak{a}_{\nu+1}$ und daß für $i > 0$

$$\mathrm{H}^i(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) = 0, \qquad \nu \geqq 0 .$$

Das ergibt sich aber aus der Rationalität von C und der folgenden Aussage:

(3.6) Lemma. *Es sei $\mathfrak{c}_\nu \subseteq C$ das Ideal $\coprod_{\mu \geqq \nu} C_\mu$, D der graduierte Ring $\coprod_{\nu \geqq 0} \mathfrak{c}_\nu S^\nu$ sowie $Z' :=$* $\operatorname{Proj}(D)$, $Z := \operatorname{Spek}(C)$ *und* $Y := \operatorname{Proj}(C)$. *Dann gilt:*

a) $\mathrm{H}^i(Z', \mathcal{O}_{Z'}) = \coprod_{\nu \geqq 0} \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{O}_Y(\nu))$.

b) $\mathrm{H}^i(Z\backslash \mathrm{V}(C_+), \mathcal{O}_Z) = \coprod_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^i(Y, \mathcal{O}_Y(\nu))$.

Der Beweis dieser Aussage folgt aus (2.5).

Es ist vielleicht von Interesse, daß in vielen Fällen das Kriterium (3.5) auch umkehrbar ist:

(3.7) Satz. *Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ, $\mathfrak{a}_\nu \subseteq A$, $\nu \geqq 0$, eine absteigende Folge von Idealen mit $\mathfrak{a}_0 = A$ und $\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{a}_\mu \subseteq \mathfrak{a}_{\nu+\mu}$ derart, daß $B := \coprod_{\nu \geqq 0} \mathfrak{a}_\nu S^\nu$ endlich erzeugt über A ist. Das Ideal $\mathfrak{a}_1 \subseteq A$ sei maximal, und $C = \coprod \mathfrak{a}_\nu/\mathfrak{a}_{\nu+1}$ sei Cohen-Macaulaysch und außerhalb von $\mathrm{V}(C_+)$ rational. Ist dann A rational, so auch C.*

Beweis. Ist $\dim A = 1$, so ist A regulär, und wir haben zu zeigen, daß auch C regulär ist. Hierzu darf man o.E. annehmen, daß A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{a}_1$ ist. Sei $\mathfrak{a}_1 = tA$ und $n_0 := \max\{n : t \in \mathfrak{a}_n\}$. Dann liegt t^{n+1} in $\mathfrak{a}_{nn_0+k}$ für $k = 1, \ldots, n_0$, aber nicht in $\mathfrak{a}_{(n+1)n_0+1}$, weil C wegen des Serre'schen Kriteriums reduziert ist. Folglich ist in diesem Fall C isomorph zum Polynomring $(A/\mathfrak{a}_1)[T]$.

Wenden wir uns nun dem Fall $\dim(A) \geqq 2$ zu. Es seien X', Y, Z', Z wie in (3.5) und (3.6). Z' ist eine rationale Auflösung von Z, und wir haben zu zeigen, daß $\mathrm{H}^i(Z', \mathcal{O}_{Z'}) = 0$ für $i > 0$ ist, oder, was gleichbedeutend ist, daß $\mathrm{H}^i(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) = 0$ für $i > 0$, $\nu \geqq 0$. Weil C Cohen-Macaulaysch ist, verschwinden die $\mathrm{H}^i(Y, \mathcal{O}_Y(\nu))$ für $0 < i \neq \dim(C) - 1$, und es ist $\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) = C_\nu$. Unter Zuhilfenahme der Kohomologiesequenzen aus dem Beweis von (3.5) erhält man hieraus leicht durch Induktion, daß auch $\mathrm{H}^0(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) \cong A/\mathfrak{a}_\nu$ und daß $\mathrm{H}^i(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) = 0$ für $0 < i \neq \dim(C) - 1$. Setzen wir daher $n := \dim(C)$, so sind die Sequenzen

$$0 \to \mathrm{H}^{n-1}(X', \mathfrak{b}_\nu) \to \mathrm{H}^{n-1}(X', \mathcal{O}_{X'}) \to \mathrm{H}^{n-1}(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) \to \mathrm{H}^{n-1}(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_{\nu+1}) \to \mathrm{H}^{n-1}(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathfrak{b}_\nu) \to 0$$

exakt. Wegen $\mathrm{H}^{n-1}(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0$ folgt somit, daß auch $\mathrm{H}^{n-1}(Y, \mathcal{O}_Y(\nu)) = 0$ für $\nu \geqq 0$, q.e.d.

Wir wollen nun einige einfache Anwendungen der vorstehenden Kriterien geben. Zunächst betrachten wir quasihomogene vollständige Durchschnitte. Seien

$$f_1, \ldots, f_r \in k[X_1, \ldots, X_{n+r}]$$

quasihomogene Polynome vom Gewicht $(w_1, \ldots, w_{n+r})$ (dabei sei $w_i > 0$), die den Grad $d_1, \ldots, d_r$ besitzen und eine Primfolge bilden. Wir setzen

$$A := k[X_1, \ldots, X_{n+r}]/(f_1, \ldots, f_r).$$

Ist dann A normal, $n > 1$ und $J := \det((\partial f_i/\partial X_j)_{1 \leqq i,j \leqq r}) \neq 0$ in A, so ist

$$(1/J)\, dX_{r+1} \wedge \cdots \wedge dX_{n+r}$$

eine reguläre Differentialform auf A, die in keinem regulären Punkt von $\mathrm{Spek}(A)$ verschwindet, wie man leicht nachrechnet, vgl. [2], (3.3) und [11]. Somit wird ω_A von dieser Differentialform erzeugt, und aus (3.4) folgt:

(3.8.) Korollar. $\mathrm{Spek}(A) \setminus \mathrm{V}(A_+)$ *sei rational. Dann ist*

$$\dim_k M_A^{n-1} = \sum_{i=0}^{N} \dim_k A_i,$$

wobei $N := d_1 + \cdots + d_r - w_1 - \cdots - w_{n+r}$. Insbesondere ist A rational genau dann, wenn $N < 0$ ist.

Die Moduln M_A^j, $j = 1, \ldots, n-2$, verschwinden übrigens, wie aus [1], (7.3) folgt.

Es sei angemerkt, daß man in (3.1) auf die Voraussetzung, daß Spek$(A)\setminus V(A_+)$ rational ist, i. A. nicht verzichten kann. Bei der durch die Gleichung $U_1^7 U_2^3 + X_1^2 + X_2^3$ gegebenen Hyperfläche im $\mathbb{C}^4$ ist zwar die Ungleichung in (3.8) und somit auch (3.1) (2) erfüllt, denn bezüglich der Gewichte (3, 3, 15, 10) ist die obige Gleichung homogen vom Grad 30, aber die Singularität im Nullpunkt ist nicht rational da die Singularität $U_1^7 + X_1^2 + X_2^3$ nicht rational ist.

Die folgenden Beispiele verallgemeinern partiell einige von Storch (unveröffentlicht) und Viehweg [12] angegebene rationale Singularitäten:

(3.9) Beispiel. Seien $n \geqq 3$ und $g_j \in k[X_{j1}, \ldots, X_{jr_j}]$, $j = 1, \ldots, n$, Polynome mit dem Untergrad $e_j > 1$. Ist dann $1/e_1 + \cdots + 1/e_n > 1$, so hat

$$A := [X_{ji}]_{j,i}/(g_1 + \cdots + g_n)$$

in 0 eine rationale Singularität.

Beweis. Nach linearem Koordinatenwechsel dürfen wir annehmen, daß $g_j(X_{j1}, 0, \ldots, 0)$ den Untergrad e_j hat. Dann ist A eine flache Algebra über $k[X_{ji}]_{j,i\geqq 2}$ und $\hat{A}/(X_{ji})_{j;i\geqq 2}$ ist isomorph zu $k[\![Y_1, \ldots, Y_n]\!]/(Y_1^{e_1} + \cdots + Y_n^{e_n})$ und somit rational. Nun ergibt sich die Behauptung aus [3], Théorème 2.

Wir merken noch abschließend an, daß sich (3.8) auf semiquasihomogene vollständige Durchschnitte verallgemeinern läßt: Der Polynomring $k[X_1, \ldots, X_{n+r}]$ sei graduiert bezüglich der Gewichtung $(w_1, \ldots, w_{n+r})$, wobei $w_i > 0$. Es seien $f_1, \ldots, f_r \in k[\underline{X}]$ Polynome mit der Zerlegung $f_i = f_i^{(0)} + f_i'$, wobei $f_i^{(0)}$ homogen vom Grad $d_i > 0$ ist und die f_i' nur Terme höheren Grades enthalten. Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt.

(1) $f_1^{(0)}, \ldots, f_r^{(0)}$ bilden eine Primfolge, und es ist $n \geqq 2$.

(2) $k[X_1, \ldots, X_{n+r}]/(f_1^{(0)}, \ldots, f_r^{(0)})$ ist außerhalb des Nullpunktes rational.

Dann folgt aus (3.5)—(3.8):

(3.10) Korollar. *Äquivalent sind:*

(i) $k[\underline{X}]/(f_1, \ldots, f_r)$ *ist rational im Nullpunkt.*

(ii) $w_1 + \cdots + w_{n+r} > d_1 + \cdots + d_r$.

Literaturverzeichnis

[1] J. Bingener und U. Storch, Zur Berechnung der Divisorenklassengruppen kompletter lokaler Ringe. Erscheint demnächst.

[2] D. Burns, On Rational Singularities in Dimensions > 2. Math. Ann. **211**, 237—244 (1974).

[3] R. Elkik, Singularités rationelles et déformations. Invent. Math. **47**, 139—147 (1978).

[4] H. Grauert und O. Riemenschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen. Invent. Math. **11**, 263—292 (1970).

[5] A. Grothendieck et J. Dieudonné, Eléments de Géométrie Algébrique (EGA). Publ. Math. IHES (1960ff.).

[6] R. Hartshorne, Residues and Duality. Lecture Notes **20** (1966).

[7] R. Hartshorne and A. Ogus, On the Factoriality of Local Rings of Small Embedding Codimension. Comm. Algebra **1** (5), 415—437 (1974).

[8] E. KUNZ, Holomorphe Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten I. Manuscripta math. **15**, 91—108 (1975).
[9] H. LAUFER, On Rational Singularities. Amer. J. Math. **94**, 597—608 (1972).
[10] E. PLATTE und U. STORCH, Invariante reguläre Differentialformen auf Gorenstein-Algebren. Math. Z. **157**, 1—11 (1977).
[11] G. SCHEJA und U. STORCH, Residuen bei vollständigen Durchschnitten. Math. Nachr. **91**, 157—170 (1979).
[12] E. VIEHWEG, Rational Singularities of Higher Dimensional Schemes. Proc. Amer. Math. Soc. **63**, 6—8 (1977).
[13] S. S. T. YAU, Two theorems on Higher Dimensional Singularities. Math. Ann. **231**, 55—59 (1977).

Eingegangen am 22. 5. 1980

Anschrift des Autors:

Hubert Flenner
Fachbereich 6 Mathematik/Philosophie
der Universität Osnabrück
Albrechtstr. 28
D-4500 Osnabrück

z.Z. Mathematisches Institut
der Universität Göttingen
Bunsenstr.
D-3400 Göttingen