Eine Verallgemeinerung von fixpunktfreien Automorphismen endlicher Gruppen

Von

Hans Kurzweil

1. Einleitung. Die Gruppe L (eine „Gruppe“ sei in dieser Arbeit immer eine „endliche Gruppe“) besitze einen Automorphismus a von Primzahlordnung p, der fixpunktfrei auf L operiert (d. h. $C_L(a) = 1$). Nach einem Satz von Thompson [12] folgt daraus die Nilpotenz von L. Sei P eine p-Gruppe, auf der das semidirekte Produkt $L\langle a\rangle$ (im Holomorph von L) als Automorphismengruppe operiert; für P kann man etwa den regulären $L\langle a\rangle$-Modul über einem endlichen Körper der Charakteristik p nehmen. Setzen wir $G = PL\langle a\rangle$ und $H = PL$, so besitzt G wegen $C_{H/P}(a) = 1$ folgende Eigenschaft:

($\mathscr{E}$) *Die Gruppe G besitzt einen Normalteiler $H \neq G$ und ein Element a von Primzahlordnung p, so daß $G = H\langle a\rangle$ und jedes Element aus $G\setminus H$ ein p-Element ist.*

Neben Gruppen mit der Eigenschaft ($\mathscr{E}$) betrachten wir Gruppen, die folgende Bedingung erfüllen:

($\mathscr{H}_n$) *Die Gruppe G besitzt einen Normalteiler $H \neq G$, so daß jedes Element aus $G\setminus H$ ein p-Element der Ordnung $\leqq p^n$, $n \in \mathbf{N}$, ist.*

Offensichtlich ist ($\mathscr{H}_1$) stärker als ($\mathscr{E}$). Hughes, Thompson und Kegel haben bewiesen, daß aus ($\mathscr{H}_1$) die Nilpotenz von H folgt (s. [8] und [10]). Daß aus ($\mathscr{E}$) nicht die Nilpotenz von H folgen kann, zeigt unser anfangs konstruiertes Beispiel. Daß dieses jedoch weitgehend durch die Eigenschaft ($\mathscr{E}$) beschrieben werden kann, zeigt folgender Satz:

Satz 1. *Seien G und H wie in ($\mathscr{E}$). Dann ist die p-Sylowgruppe P von H normal in G und H/P nilpotent, falls zusätzlich noch eine der drei folgenden Voraussetzungen gilt:*

(i) *G ist p-auflösbar.*

(ii) $p = 2$.

(iii) *Die p-Sylowgruppe von H ist abelsch, und die Gruppe $SL(2, 3)$ ist nicht isomorph zu einem Abschnitt von H.*

Gilt (ii) *oder* (iii), *so folgt außerdem, daß G über P zerfällt.*

Unter der Voraussetzung (i) ist der Beweis von Satz 1 elementar. Gilt (ii) oder (iii), so erhält man die Aussage, indem man einen Satz von Thompson [13] über normale Komplemente auf induktionszulässige Untergruppen von H anwendet. Die Schwierigkeit im allgemeinen Fall (ohne eine der Voraussetzungen (i), (ii) oder (iii)) liegt darin, genügend viele solcher Untergruppen zu finden.

Wir setzen nun voraus, daß a ein fixpunktfreier Automorphismus der Gruppe L von Primzahlpotenzordnung p^n ist. Da jede Potenz a^i von a mit $(p, i) = 1$ wieder fixpunktfrei auf L operiert, gilt für $G = L\langle a\rangle$ mit $H = L\langle a^p\rangle$ die oben erwähnte Eigenschaft $(\mathscr{H}_n)$. Ist L auflösbar, so ist die Fittinglänge $f(L)$, also auch die von H, durch eine lineare Funktion der Zahl n beschränkt (s. [6], [7] und [11]). Shult bewies zum Beispiel die Abschätzung $f(L) \leqq n$ unter folgender zusätzlichen Voraussetzung:

(α) *Falls p eine Fermatsche Primzahl, ist die 2-Sylowgruppe von G abelsch; falls $p = 2$ und q eine Mersennesche Primzahl $\leqq 2^n$, ist die q-Sylowgruppe von G abelsch.*

Unter der Voraussetzung $(\mathscr{H}_n)$ beweisen wir folgenden Satz:

Satz 2. *Seien G und H wie in $(\mathscr{H}_n)$ und $n > 1$. Ist H auflösbar, so gilt für die Fittinglänge $f(H)$ von H folgende Abschätzung:*

$$f(H) \leqq \begin{cases} (2n-2), & \text{falls } (\alpha) \text{ gilt}, \\ (2^{n-1}\cdot 5 - 3), & \text{falls } p \neq 3, \\ (2^{n-1}\cdot 7 - 5), & \text{falls } p = 3. \end{cases}$$

Der Beweis von Satz 2 beruht unter der Voraussetzung (α) auf Theorem B von Hall-Higman und einem Satz von Shult (Th. 3.1 in [11]). Die beiden anderen Abschätzungen von $f(H)$ folgen aus einer Arbeit von Dade [3].

Unter der Voraussetzung (α) ist für $n = 2$ die Abschätzung $f(H) \leqq 2$ von Satz 2 die bestmögliche: Es gibt Gruppen L, die einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung p^n besitzen für eine beliebige Primzahl p, so daß $f(L) = n$ (Th. 5.1 in [11]). Ob auch sonst die angegebene Schranke von $f(H)$ die bestmögliche ist, besonders bei den beiden letzten Abschätzungen, ist fraglich. Völlig offen ist es, wieweit aus $(\mathscr{H}_n)$ die Auflösbarkeit von H folgt. Zum Beispiel ist noch nicht bekannt, ob eine Gruppe auflösbar ist, wenn sie einen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung p^2 besitzt.

Als letztes erwähnen wir eine einfache Anwendung von Satz 2. Sei G eine Gruppe und H_{p^n} die von den Elementen der Ordnung $\neq p^i$, $1 \leqq i \leqq n$, erzeugte Untergruppe von G. Nach dem schon oben erwähnten Satz von Hughes, Thompson und Kegel ist, falls $H_p \neq G$, die Gruppe H_p nilpotent. Aus Satz 2 folgt:

Korollar. *Ist G auflösbar und $H_{p^n} \neq G$, so gilt für $n > 1$:*

$$f(H_{p^n}) \leqq \begin{cases} (2n-2), & \text{falls } (\alpha) \text{ gilt}, \\ (2^{n-1}\cdot 5 - 3), & \text{falls } p \neq 3, \\ (2^{n-1}\cdot 7 - 5), & \text{falls } p = 3. \end{cases}$$

2. Bezeichnungen. Alle betrachteten Gruppen sind endlich. Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen. Es seien $\boldsymbol{Z}(G)$, $\boldsymbol{D}(G)$, $\boldsymbol{O}_p(G)$ und $\boldsymbol{F}(G)$ respektive das *Zentrum*, die *Frattiniuntergruppe*, der *maximale p-Normalteiler* und der *maximale nilpotente Normalteiler* einer Gruppe G. Eine Gruppe H *operiert* auf G, wenn H in G eine Automorphismengruppe von G induziert. Das semidirekte Produkt von G mit H bezeichnen wir, wie das gewöhnliche Produkt, mit GH. Ein *Abschnitt* A/B von G

ist eine Faktorgruppe einer Untergruppe A von G. Ein zweiter *Abschnitt* A_1/B_1 *operiert* auf A/B, wenn $A_1 \subseteqq N_G(A/B)$ und $B_1 \subseteqq C_G(A/B)$ gilt. Die *Fittinglänge* einer auflösbaren Gruppe G ist das Minimum der Längen aller Normalreihen von G, deren Faktoren nilpotent sind. Mit $[A, B]$ bezeichnen wir die von den Elementen $a^{-1}b^{-1}ab$ ($a \in A \subseteqq G$; $b \in B \subseteqq G$) erzeugte Untergruppe von G.

3. Hilfssätze.

(3.1) *Sei H ein Normalteiler einer Gruppe G, so daß jedes Element aus $G \backslash H$ ein p-Element ist. Ist dann E ein p'-Abschnitt von G, der von einem Element x aus $G \backslash H$ normalisiert wird, so ist $C_E(x) = 1$.*

Beweis. Zentralisiert x nämlich ein Element $y \neq 1$ aus E, so ist xy kein p-Element. Dann ist das Urbild b von xy in G auch kein p-Element; dies widerspricht wegen $b \in G \backslash H$ der Voraussetzung.

(3.2) *Es seien G, H und x wie in* (3.1). *Weiter seien D und E zwei Abschnitte von H, die von x normalisiert werden. Dann ist $D = 1$, falls folgende drei Voraussetzungen gelten:*

(3.2.1) *D operiert treu auf E.*

(3.2.2) *E ist eine r-Gruppe für eine Primzahl $r \neq p$ und D eine q-Gruppe für eine Primzahl $q \neq r$.*

(3.2.3) *E wird von x^p zentralisiert.*

Beweis. Wir nehmen $D \neq 1$ an und führen dies zum Widerspruch.

Sei zunächst $q \neq p$. Dann ist wegen (3.1), (3.2.3) und (3.2.1) die Gruppe $D\langle x\rangle/\langle x^p\rangle$ eine Frobeniusgruppe mit Kern $D\langle x^p\rangle/\langle x^p\rangle$. Diese besitzt nach (3.2.1) eine treue Darstellung auf $E/\boldsymbol{D}(E) = V$. Daraus folgt wegen $r \neq p$ bekanntlich $C_V(x) \neq 1$ (s. Th. 3.4.4 in [5]) im Widerspruch zu (3.1).

Sei schließlich $q = p$. Da die p-Gruppe D von dem p-Element x normalisiert wird, gibt es ein y von der Ordnung p in D, das von x zentralisiert wird. Wäre $\langle y\rangle \subseteqq \langle x^p\rangle$, so würde wegen (3.2.3) das Element y trivial auf E operieren im Widerspruch zu (3.2.1). Da D ein Abschnitt von H ist, ist also $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = 1$. Deshalb ist $W = (\langle y\rangle \times \langle x\rangle)/\langle x^p\rangle$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^2, die auf E operiert. Dann operiert W auch auf $V = [E/\boldsymbol{D}(E), y]$. Nach Konstruktion von V gilt $C_V(y^i) = 1$, für $i = 1, \ldots, p-1$. Wegen (3.1) ist $C_V(x^i) = 1$, $i = 1, \ldots, p-1$; schließlich gilt, da mit x auch xy^i nicht in H liegt, nach (3.1) auch $C_V(xy^i) = 1$ für $i = 1, \ldots, p$. Dies ist aber nach einem Satz von BURNSIDE unmöglich (s. Th. 5.3.14 in [5]).

Die folgende Aussage scheint bekannt zu sein:

(3.3) *Sei P eine p-Gruppe mit $1 \neq [P, P] \subseteqq \boldsymbol{Z}(P)$. Sie besitze eine treue Darstellung auf einem Vektorraum V über einem Körper K, dessen Charakteristik $\neq p$ ist. Ist dann g ein Element der Ordnung p aus $P \backslash \boldsymbol{Z}(P)$, so ist $C_V(g) \neq 0$.*

Beweis. Indem wir K erweitern und nach einem bekannten Verfahren — die Charakteristik von K ist nach Voraussetzung $\neq p$ — zu einem Körper der Charakteristik 0 übergehen (s. § 4 in [4]), können wir o. B. d. A. annehmen, daß K ein Zerfällungskörper der Charakteristik 0 von P ist. Da P treu auf V operiert und V als P-Modul vollständig reduzibel ist, gibt es einen irreduziblen P-Untermodul W von V, so daß $g(\operatorname{mod} \boldsymbol{C}_P(W))$ nicht in $\boldsymbol{Z}(P/\boldsymbol{C}_P(W))$ liegt. Wir können demnach weiter annehmen, daß V ein irreduzibler P-Modul ist. Sei β der zum P-Modul V gehörende Charakter. Dann ist $\beta(1) = p^d$, falls $|P| = p^{2d} \cdot |Z(P)|$, und $\beta(g^i) = 0$, für $i = 1, \ldots, p-1$ (s. Th. (III.2) in [2]). Aus den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere (s. Th. 4.2.1 in [5]) folgt nun

$$\dim_K(\boldsymbol{C}_V(g)) = \frac{1}{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} \beta(g^i) \right) = \frac{1}{p} \beta(1) = p^{d-1} \geqq 1 .$$

Damit ist (3.3) bewiesen.

4. Beweis von Satz 1. Seien G, H und a wie in $(\mathscr{E})$ und P eine p-Sylowgruppe von H. Ist P normal in H, so operiert nach (3.1) das Element a fixpunktfrei auf H/P. Aus dem in der Einleitung erwähnten Satz von Thompson folgt daraus die Nilpotenz von H (s. Th. 10.2.1 in [5]). Also gilt:

(4.1) *Ist P normal in H, so ist H/P nilpotent.*

Als nächstes zeigen wir:

(4.2) *Ist P normal in H und entweder $p = 2$ oder P abelsch, so zerfällt G über P.*

Wegen $(\mathscr{E})$ zerfällt nämlich die p-Sylowgruppe von G über P, und damit, falls P abelsch, nach einem Satz von Gaschütz auch G über P (s. Satz I.17.4 in [9]).

Ist $p = 2$, so wählen wir unter allen p'-Gruppen, die von a normalisiert werden, eine maximale — wir nennen sie X. Da nach (4.1) die Gruppe G auflösbar ist, liegt bekanntlich X in einer p'-Hallundergruppe Y von G (s. Th. 6.4.1 in [5]). Diese ist, da isomorph zu H/P, nach (4.1) nilpotent. Ist $X = Y$, so ist offensichtlich $Y\langle a\rangle$ ein Komplement von P in G. Sei $X \neq Y$. Da Y nilpotent ist, gibt es ein Element y aus $Y \backslash X$, das X normalisiert. Sei $y_1 = y^{-1} y^a$. Liegt $y_1 P = (yP)^{-1}(yP)^a$ in $XP/P = \bar{X}$, so normalisiert a die Nebenklasse $yP\bar{X}$ von $\bar{X}$ in H/P; dies widerspricht (3.1). Da demnach $y_1(\operatorname{mod} P)$ nicht in $X(\operatorname{mod} P)$ liegt, enthält X auch nicht die maximale p'-Untergruppe $\langle y_2\rangle$ von $\langle y_1\rangle$. Diese wird wegen $p = 2$, wie $\langle y_1\rangle$, von a normalisiert. Dann ist $X\langle y_2\rangle$ eine a-zulässige p'-Gruppe von G, die X echt enthält; dies widerspricht der Wahl von X. Damit ist (4.2) bewiesen.

Sei nun G ein Gegenbeispiel zu Satz 1 von minimaler Ordnung. Sei P eine p-Sylowgruppe von H. Ist $P = 1$, so folgt die Aussage des Satzes aus (4.1). Wir setzen im folgenden $P \neq 1$ voraus, und nehmen o. B. d. A. an, daß P von a normalisiert wird.

Zuerst behandeln wir den p-auflösbaren Fall. Ist $\boldsymbol{O}_p(H) \neq 1$, so folgt aus der Induktionsannahme, angewandt auf $G/\boldsymbol{O}_p(H)$, daß P normal in H ist. Also ist

$$\boldsymbol{O}_p(H) = 1, \quad \boldsymbol{O}_{p'}(H) \neq 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C}_P(\boldsymbol{O}_{p'}(H)) = 1$$

(s. Th. 6.3.2 in [5]). Aus dem Satz von Sylow folgt für jede Primzahl $r \neq p$ die Existenz einer r-Sylowgruppe von $\boldsymbol{O}_{p'}(H)$, die von $P\langle a\rangle$ normalisiert wird. Zentralisiert P jede solche r-Sylowgruppe, $r \neq p$, so ist $[\boldsymbol{O}_{p'}(H), P] = 1$ im Widerspruch zu $\boldsymbol{C}_P(\boldsymbol{O}_{p'}(H)) = 1$. Also gibt es eine $P\langle a\rangle$-zulässige Sylowgruppe $R \neq 1$ von $\boldsymbol{O}_{p'}(H)$

mit $[R, P] \neq 1$. Wegen $a^p = 1$ ergibt nun (3.2) mit $D = P/C_P(R)$ und $E = R$ einen Widerspruch. Damit ist Satz 1 unter der Voraussetzung (i) bewiesen.

Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler von G, der echt in H liegt, so folgt aus der Induktionsannahme für N und G/N die Aussage des Satzes. Demnach ist G auflösbar. Nach dem schon bewiesenen folgt daraus die Behauptung des Satzes. Also gilt:

(4.3) *H enthält keinen Normalteiler $\neq 1$ von G.*

Mit Hilfe eines Satzes von THOMPSON über normale Komplemente erhalten wir folgende Aussage:

(4.4) *Ist* (ii) *oder* (iii) *in Satz 1 richtig, und normalisiert ein Element der Ordnung p aus $G\setminus H$ eine q-Gruppe Q von H für eine Primzahl $q \neq p$, so ist $Q = 1$.*

Wir nehmen an, (4.4) wäre falsch. Sei Q eine maximale q-Untergruppe $\neq 1$, die von einem Element a_1 der Ordnung p aus $G\setminus H$ normalisiert wird, und $N = N_H(Q)$. Wegen (4.3) und der Induktionsannahme gilt die Aussage des Satzes für $N\langle a_1\rangle$. Deswegen folgt aus (4.2), daß $N\langle a_1\rangle$ über der p-Sylowgruppe von N zerfällt. Demnach gibt es ein Element a_2 der Ordnung p aus $(N\langle a_1\rangle\setminus N) \subseteqq G\setminus H$, das eine p'-Halluntergruppe M von N normalisiert. Da M nilpotent ist, normalisiert a_2 auch eine q-Sylowgruppe $\tilde{Q}$ von $N = N_Q(H)$. Ist Q keine q-Sylowgruppe von H, so liegt Q echt in $\tilde{Q}$; dies widerspricht der Wahl von Q. Also normalisiert a_2 eine q-Sylowgruppe Q von H. Ist deshalb $K \neq 1$ eine in Q charakteristische Untergruppe von Q, so normalisiert a_2 auch $N_H(K)$. Nach (4.3) und Induktionsvoraussetzung, besitzt $N_H(K)$ ein normales q-Komplement. Da dies für alle in Q charakteristische Untergruppen von Q gilt, können wir wegen (ii) oder (iii) den Satz von THOMPSON über normale q-Komplemente anwenden (s. Th. 8.3.1 in [5]). Demnach besitzt auch H ein normales q-Komplement im Widerspruch zu (4.3).

Wir beweisen nun den Satz unter der Voraussetzung (iii). Sei $D = N_H(P)$. Da D von a normalisiert wird, folgt aus (4.2), daß $D\langle a\rangle$ über P zerfällt. Ist D keine p-Gruppe, so existiert also eine q-Untergruppe $\neq 1$ von D, die von einem Element der Ordnung p aus $G\setminus H$ normalisiert wird; dies widerspricht (4.4). Also ist $D = P$. Somit folgt nun aus einem Satz von BURNSIDE (s. Th. 7.4.3 in [5]), daß H ein normales p-Komplement besitzt; dies widerspricht (4.3).

Sei schließlich $p = 2$ und J die Konjugiertenklasse von G, die die Involution a enthält. Seien a_1 und a_2 aus J. Ist $a_1 a_2$ kein 2-Element, so invertiert a_1 die $2'$-Halluntergruppe von $\langle a_1 a_2\rangle$; dies widerspricht (4.4). Also erzeugt jedes Paar von Elementen aus J eine 2-Gruppe. Nach einem Satz von BAER (s. [1] oder Th. 3.8.2 in [5]) liegt dann J, also auch a, in $O_p(G)$. Aus (4.3) folgt $G = H \times \langle a\rangle$. Wegen (3.1) ist H dann eine p-Gruppe. Dies widerspricht der Annahme, daß G ein Gegenbeispiel zu Satz 1 ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Beweis von Satz 2. Seien G und H wie in $(\mathscr{H}_n)$ und G auflösbar. Wir setzen $f = f(G)$. Durch Induktion nach der Ordnung von G können wir beim Beweis von Satz 2 annehmen, daß

(5.1) $G = H\langle x\rangle$ *und* $x^p \in H$.

Da H auflösbar ist, existiert eine p'-Halluntergruppe S von H (s. Th. 6.4.1 in [5]). Außerdem existiert ein a aus H mit $S^x = S^a$. Das Element $x_1 = ax^{-1}$ liegt mit x nicht in H und normalisiert S. Da x_1 ein p-Element ist, folgt aus dem Satz von Sylow, daß x_1 für jede Primzahl r eine r-Sylowgruppe von S, also auch von H, normalisiert. Außerdem normalisiert x_1 auch eine p-Sylowgruppe von H. Wir können demnach annehmen:

(5.2) *Das Element x in* (5.1) *läßt sich so wählen, daß x für jede Primzahl r eine r-Sylowgruppe von H normalisiert.*

Wegen (5.2) können wir Lemma 8.2 aus [3] auf H und x anwenden (darin wird statt (5.2) vorausgesetzt, daß x ein Sylowsystem von H normalisiert; beim Beweis dieses Lemmas wird aber nur die schwächere Bedingung (5.2) benützt). Es besagt:

(5.3) *In H existieren Abschnitte $A_i = C_i/D_i$, $i = 1, \ldots, f$, für die folgende sechs Aussagen gelten:*

(5.3. a) *$A_i = C_i/D_i$ wird von x normalisiert, für $i = 1, \ldots, f$.*

(5.3. b) *A_i ist eine p_i-Gruppe $\neq 1$ für eine Primzahl p_i; außerdem gilt $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{D}(A_i)) = 1$ und $\boldsymbol{D}(A_i) \subseteqq \boldsymbol{Z}(A_i)$; falls $p_i \neq 2$, ist der Exponent von A_i gleich p_i, für $i = 1, \ldots, f$.*

(5.3. c) *$p_i \neq p_{i-1}$, für $i = 2, \ldots, f$.*

(5.3. d) *C_i normalisiert C_j und D_j, für $1 \leqq i \leqq j \leqq f$.*

(5.3. e) *A_i operiert treu auf A_{i+1}, für $i = 1, \ldots, f - 1$.*

(5.3. f) *$[\boldsymbol{D}(A_{i+1}), A_i] = 1$, für $i = 1, \ldots, f - 1$.*

Aus (3.2) folgt:

(5.4) *Seien m, n zwei natürliche Zahlen mit $1 \leqq m + n \leqq f$, und $R_m, R_{m+1}, \ldots, R_{m+n}$ Abschnitte von $A_m, A_{m+1}, \ldots, A_{m+n}$. Dann ist $n \leqq 1$, falls folgende drei Voraussetzungen gelten:*

(5.4.1) *$R_i \neq 1$, für $m \leqq i \leqq m + n$.*

(5.4.2) *R_i operiert treu auf R_{i+1}, für $i = m, \ldots, m + n - 1$.*

(5.4.3) *x normalisiert R_i und x^p zentralisiert R_{m+n}.*

Andernfalls gibt es Abschnitte R_m, R_{m+1}, R_{m+2}, für die (5.4.1, 2, 3) gilt. Ist $p_m = p$, so folgt aus (3.2) mit $D = R_m$ und $E = R_{m+1}$ die Aussage $R_m = 1$ im Widerspruch zu (5.4.1). Also ist $p_m \neq p$. Genauso folgt $p_{m+1} \neq p$. Deswegen können wir wieder (3.2) auf R_m und R_{m+1} anwenden, und erhalten den gleichen Widerspruch $R_m = 1$. Also gilt (5.4).

(5.5) *Das Element x und die Gruppen C_i, D_i in* (5.3) *lassen sich so wählen, daß x eine p_i-Sylowgruppe von C_i normalisiert, für $i = 1, \ldots, f$.*

Zum Beweis von (5.5) zeigen wir, daß sich die Gruppen C_i in (5.3) als p_i-Gruppen wählen lassen. Wir beweisen dies induktiv. Sei s eine natürliche Zahl mit $f \geqq s > 1$. Wir nehmen an, die Gruppen C_j in (5.3) mit $f \geqq j \geqq s$ seien bereits p_j-Gruppen.

Sei C_{s-1}^* eine p_{s-1}-Sylowgruppe von C_{s-1} und $D_{s-1}^* = C_{s-1}^* \cap D_{s-1}$; sei $N = N_G(C_{s-1}^*)$, sei $C_i^* = N \cap C_i$ und $D_i^* = N \cap D_i$ für $1 \leqq i < s - 1$; schließlich sei x^* ein Element aus $C_1\langle x\rangle \cap N$, das nicht in H liegt. Aus dem Frattinischluß, angewandt auf C^*_{s-1}, C_{s-1} und $\left(\prod_{i=1}^{s} C_i\right)\langle x\rangle$ folgt wegen (5.3.d) und (5.3.a), daß

$$\left(\prod_{i=1}^{s-1} C_i\right)\langle x\rangle = \left(\prod_{i=1}^{s-1} C_i^*\right) C_{s-1}\langle x^*\rangle$$

ist. Daraus folgt $C_i^*/D_i^* \cong C_i/D_i$ für $1 \leqq i \leqq s-1$. Weil C_1 und x die Gruppen C_i normalisieren, $1 \leqq i \leqq s-1$, normalisiert auch x^* die Gruppen C_i^* und D_i^*. Man erhält nun aus den Eigenschaften der Reihe $\langle x\rangle$, $C_1/D_1, \ldots, C_f/D_f$ in (5.3) die entsprechenden Eigenschaften für die Reihe $\langle x^*\rangle$, $C_1^*/D_1^*, \ldots, C^*_{s-1}/D^*_{s-1}$, $C_s/D_s, \ldots, C_f/D_f$. In dieser ist aber C^*_{s-1} eine p_{s-1}-Gruppe. Indem wir $C^*_{s-1} = C_{s-1}$ setzen und dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir schließlich die Aussage (5.5).

Aus Theorem B von HALL-HIGMAN bzw. einem Satz von SHULT [11] folgt:

(5.6) *Sei $1 < j \leqq f$. Ist $p_j = p$ oder $p_j \neq p$ und $p_{j-1} \neq p$, so gilt unter der Voraussetzung* (α) *für jedes b aus C_i, $1 \leqq i \leqq j-1$, die Beziehung* $[A_{j-1}, (bx)^{p^{n-1}}] = 1$.

Für den Beweis von (5.6) setze $y = bx$ und $V = A_j/\boldsymbol{D}(A_j)$. Es ist V ein Vektorraum über dem Primkörper der Charakteristik p_j. Wegen (5.3. e, f) besitzt $A_{j-1}\langle y\rangle$ eine Darstellung auf V, die beschränkt auf A_{j-1} treu ist.

Ist $p_j \neq p$, so operiert y nach (3.1) fixpunktfrei auf V. Aus Theorem 3.1 in [11] folgt $[A_{j-1}, y^{p^{n-1}}] = 1$.

Sei nun $p_j = p$. Mit y liegt auch vy, $v \in V$, nicht in H. Aus $(\mathscr{H}_n)$ folgt

$$1 = (vy)^{p^n} = \prod_{i=0}^{p^n-1} v^{y^i}.$$

Demnach ist der Grad des Minimalpolynoms der linearen Transformation y auf V kleiner als p^n. Nun folgt die Behauptung aus Theorem B von HALL-HIGMAN (s. Th. 11.1.1 in [5]).

Wir beweisen zunächst Satz 2 unter der Voraussetzung (α). Dabei unterscheiden wir die Fälle $n = 2$ und $n > 2$.

Beweis unter der Voraussetzung (α) und $n = 2$. Wir nehmen an, es ist $f = f(H) \geqq 3$ und führen dies zum Widerspruch. Nach (5.5) können wir annehmen, daß x eine p_{f-2}-Sylowgruppe R von C_{f-2} normalisiert. Sei $\tilde{H} = R C_{f-1} C_f/D_f$. Da R nicht trivial auf $A_{f-1} = C_{f-1}/D_{f-1}$ und A_{f-1} treu auf A_f operiert, ist wegen (5.3.c) die Fittinglänge von H größer als 2 (vgl. 2.1 in [2]). Durch Induktion nach $|H|$ können wir also annehmen, daß $\tilde{H} = H$. Also ist $G = \langle x\rangle R C_{f-1} A_f$.

Ist $p_f = p$ oder $p_f \neq p$ und $p_{f-1} \neq p$, so folgt aus (5.6) mit $j = f$ die Beziehung $[A_{f-1}, x^p] = 1$. Da nach (5.3.c) die Zahl $p_{f-1} \neq p_f$ ist, erhalten wir nun aus (3.2) mit $E = A_{f-1}$ und $D = R/\boldsymbol{C}_R(A_{f-1})$ die Aussage $R = \boldsymbol{C}_R(A_{f-1})$ im Widerspruch zu $A_{f-2} \cong R/\boldsymbol{C}_R(A_{f-1})$.

Also ist $p_f \neq p$ und $p_{f-1} = p$. Aus (5.6) folgt mit $j = f-1$, daß $[R/\boldsymbol{C}_R(A_{f-1}), x^p] = 1$. Da die p'-Gruppe R die p-Gruppe A_{f-1} zwar normalisiert, aber nicht zentralisiert, existiert eine $R\langle x\rangle$-zulässige Untergruppe A von A_{f-1} mit $[A, R] \neq 1$, aber $[U, R] = 1$ für jede $R\langle x\rangle$-zulässige Untergruppe U von A. Demnach ist A speziell und $[A, R] = A$

(s. Th. 5.3.7 in [5]). Sei C das Urbild von A in H. Durch Induktion nach $|H|$ können wir annehmen, daß $H = RCA_f$ ist. Da RA_f eine p'-Gruppe ist, liegt das p-Element x^p in C. Weil es von R normalisiert wird, liegt es dann modulo D_f wegen $[A, R] = A$ in $\boldsymbol{D}(A)$. Ist $\boldsymbol{D}(A) = 1$, so liegt es demnach in D_{f-1} und zentralisiert mit D_{f-1} die Gruppe A_f. Aus (5.4) folgt nun mit $m + n = f$ ein Widerspruch zu $f \geqq 3$. Also ist $\boldsymbol{D}(A) \neq 1$ und A eine nicht abelsche spezielle p-Gruppe.

Sei W ein direkt unzerlegbarer $\langle x \rangle RA$-Untermodul von $A_f/\boldsymbol{D}(A_f)$, so daß $A/\boldsymbol{C}_A(W) = \hat{A}$ nicht abelsch ist. Sämtliche echte $\langle x \rangle R$-zulässige Untergruppen von $\hat{A}$ werden, wie die von A, von R zentralisiert. Deswegen ist $Z = \boldsymbol{C}_{Z(\hat{A})}(x)$ normal in $\langle x \rangle R\hat{A}$, und, weil $\hat{A}$ eine p-Gruppe ist, ungleich 1. Sei nun b aus $\hat{A} \backslash \boldsymbol{D}(\hat{A})$ und $E = \boldsymbol{C}_W((xb)^p)$.

Liegt $(xb)^p$ nicht in $\boldsymbol{D}(\hat{A})$, also in $\hat{A} \backslash \boldsymbol{D}(\hat{A})$, so ist nach (3.3) die Gruppe $E \neq 1$. Wegen $[Z, xb] = 1$ operiert Z auf E. Da mit x auch xb nicht in H liegt, folgt aus (3.2), daß Z trivial auf E operiert. Dann ist die Zerlegung $W = [W, Z] \times \boldsymbol{C}_W(Z)$ nicht trivial (s. Th. 5.3.3 in [5]). Diese ist, weil Z normal in $\langle x \rangle R\hat{A}$ ist, auch $\langle x \rangle R\hat{A}$-zulässig. Dies widerspricht der Unzerlegbarkeit des $\langle x \rangle RA$-Moduls W.

Also liegt für jedes b aus $\hat{A} \backslash \boldsymbol{D}(\hat{A})$ das Element

$$(bx)^p = \prod_{i=0}^{p-1} (b^{x^i})$$

in $\boldsymbol{D}(\hat{A})$. Der Grad des Minimalpolynoms von x auf $\hat{A}/\boldsymbol{D}(\hat{A})$ ist demnach kleiner als p. Aus Theorem B von Hall-Higman folgt deshalb, daß x die Gruppe $R/\boldsymbol{C}_R(\hat{A})$ zentralisiert. Da letztere aber eine p'-Gruppe $\neq 1$ ist, widerspricht dies (3.1).

Beweis unter der Voraussetzung (α) und $n > 2$. Ist $p_f = p$, so folgt aus (5.6) mit $j = f$, daß für jedes b aus $\prod_{i=1}^{f-2} C_i$ das Element $(xb)^{p^{n-1}}$ die Gruppe A_{f-1} zentralisiert. Dasselbe gilt auch, wenn $p_f \neq p$ und $p_{f-1} \neq p$ ist. Da A_{f-2} nach (5.3.e) treu auf A_{f-1} operiert, liegt $(xb)^{p^{n-1}}$ nach (5.1) auch in $K = \boldsymbol{C}_H(A_{f-2})$. Ist $p_{f-1} = p$, so folgt dasselbe aus (5.6) mit $j = f - 1$. Also hat für jedes $\tilde{b}$ aus

$$\hat{H} = \left(\prod_{i=0}^{f-2} C_i\right) / K$$

das Element $(x\tilde{b})$ (mod K) höchstens die Ordnung p^{n-1}. Durch Induktion nach n erhalten wir nun die Beziehung

$$f(\hat{H}) \leqq 2(n-1) - 2 .$$

In $\hat{H}$ gibt es wegen (5.3.e) zu A_i isomorphe Abschnitte A_i^*, für $i = 1, \ldots, f - 2$, so daß A_i^* treu auf A_{i+1}^* operiert, $i = 1, \ldots, f - 3$. Daraus folgt wegen $p_i \neq p_{i+1}$ (vgl. 2.1 in [3]), daß

$$f(\hat{H}) \geqq f - 2 .$$

Also gilt $2(n-1) - 2 \geqq f(\hat{H}) \geqq f - 2$, d.h. $f \leqq 2n - 2$.

Beweis im Falle $p \neq 3$. Aus (5.3) folgt, daß die Abschnitte $A_1, \ldots, A_f$ eine Fittingkette bilden („Fittingchain" in [3]; für die Definition einer Fittingkette s.

S. 455 in [3]), auf der die Gruppe $\langle x \rangle$ operiert („acts", s. S. 456 in [3]). Wir beweisen nun ganz allgemein folgende Aussage:

(5.7) *Sei $A_1, \ldots, A_f$ eine Fittingkette, auf der die zyklische p-Gruppe $\langle x \rangle$ der Ordnung p^n, $n > 1$, operiert. Ist $p \neq 3$ und gilt* (5.4) *für $A_1, \ldots, A_f$, so ist*

$$f \leqq (2^{n-1} \cdot 5 - 3).$$

Nach dem eben Gesagten ist es klar, daß aus (5.7) die gesuchte Abschätzung von $f(H) = f$ folgt.

Für den Beweis von (5.7) wählen wir die natürliche Zahl s so, daß $A_1, \ldots, A_s$ von $x^{p^{n-1}}$ zentralisiert werden, aber A_{s+1} nicht. Aus Theorem 2.6 in [3] folgt nun die Existenz einer Fittingkette $R_{s+4}, \ldots, R_f$, so daß R_i ein Abschnitt von A_i ist und von $x^{p^{n-1}}$ zentralisiert wird, für $i = s + 4, \ldots, f$.

Sei zunächst $n = 2$. Dann folgt aus (5.4), daß $s \leqq 2$ und $f \leqq s + 5$. Also ist $f \leqq 7 = 2^1 \cdot 5 - 3$.

Ist $n > 2$, so operiert $\langle x \rangle$ auf den Fittingketten $A_1, \ldots, A_s$ und $R_{s+4}, \ldots, R_f$ als Gruppe der Ordnung $\leqq p^{n-1}$. Durch Induktion nach n folgt:

$$s \leqq 2^{n-2} \cdot 5 - 3 \quad \text{und} \quad f - (s + 3) \leqq 2^{n-2} \cdot 5 - 3.$$

Also gilt $f \leqq 2^{n-2} \cdot 5 - 3 + 2^{n-2} \cdot 5 - 3 + 3 = 2^{n-1} \cdot 5 - 3$.

Beweis unter der Voraussetzung $p = 3$. Der Beweis in diesem Fall ist ähnlich dem vorhergehenden. Um das dem vorher benützten Theorem 2.6 aus [3] entsprechende Theorem 2.13 aus [3] anwenden zu können, benötigen wir eine vermehrte Fittingkette $A_1, \ldots, A_f$, auf der $\langle x \rangle$ operiert („augmented Fittingchain" in [3]; für Definition s. S. 457, 458 in [3]). Daß in unserem Fall die Abschnitte $A_1, \ldots, A_f$ von (5.3) eine vermehrte Fittingkette bilden, folgt aus der Aussage (5.5) (vgl. Beweis von Th. 8.4, S. 512 in [3]).

Für den Beweis von Satz 2 im Fall $p = 3$ genügt es also, folgende Aussage zu beweisen:

(5.8) *Sei $A_1, \ldots, A_f$ eine vermehrte Fittingkette, auf der die zyklische p-Gruppe $\langle x \rangle$ der Ordnung p^n, $n > 1$, operiert. Ist $p = 3$ und gilt* (5.4) *für $A_1, \ldots, A_f$, so ist*

$$f \leqq 2^{n-1} \cdot 7 - 5.$$

Sei die Zahl s definiert wie im Beweis von (5.7). Aus Theorem 2.13 aus [3] folgt dann die Existenz einer vermehrten Fittingkette $R_{s+6}, \ldots, R_f$, so daß R_i ein Abschnitt von A_i ist und von $x^{p^{n-1}}$ zentralisiert wird. Für $n = 2$ folgt aus (5.4) die Abschätzung $s \leqq 2$ und $f \leqq s + 7$, also $f \leqq 9 = 2^1 \cdot 7 - 5$. Für $n > 2$ folgen wie im Beweis von (5.7) durch Induktion nach n die Beziehungen

$$s \leqq 2^{n-2} \cdot 7 - 5 \quad \text{und} \quad f - (s + 5) \leqq 2^{n-2} \cdot 7 - 5.$$

Also gilt $f \leqq 2^{n-1} \cdot 7 - 5$. Damit ist (5.8) gezeigt und Satz 2 vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] R. BAER, Engelsche Elemente noetherscher Gruppen. Math. Ann. **133**, 256–270 (1957).
[2] T. R. BERGER, Class two p-groups as fixed point free automorphism groups. Illinois J. Math. **14**, 121–148 (1970).
[3] E. C. DADE, Cartersubgroups and fitting heights of finite solvable groups. Illinois J. Math. **13**, 449–513 (1969).
[4] W. FEIT, Characters of Finite Groups. New York 1967.
[5] D. GORENSTEIN, Finite Groups. New York 1968.
[6] F. GROSS, Solvable groups admitting a fixed point free automorphism of prime power order. Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 1440–1446 (1966).
[7] F. GROSS, Groups admitting a fixed point free automorphism of order 2^n. Pacific J. Math. **24**, 269–275 (1969).
[8] D. R. HUGHES and J. G. THOMPSON, The H_p-problem and the structure of H_p-Groups. Pacific J. Math. **9**, 1097–1102 (1959).
[9] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I. Berlin 1967.
[10] O. H. KEGEL, Die Nilpotenz der H_p-Gruppen. Math. Z. **75**, 373–376 (1961).
[11] E. SHULT, On groups admitting fixed point free abelian operator groups. Illinois J. Math. **9**, 701–720 (1965).
[12] J. G. THOMPSON, Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45**, 578–581 (1959).
[13] J. G. THOMPSON, Normal p-Complements for finite groups. J. Algebra **1**, 43–46 (1964).

Eingegangen am 11. 9. 1970

Anschrift des Autors:
Hans Kurzweil
Mathematisches Institut der Universität
74 Tübingen