Zum Verhältnis von Volumen zu Oberfläche bei konvexen Körpern

Von

Jörg M. Wills

$\mathfrak{K}^n$ sei die Menge der konvexen Körper des $\mathbf{R}^n$ $(n \geqq 2)$. Für ein $K \in \mathfrak{K}^n$ sei $V = V(K) \geqq 0$ sein Volumen, $F = F(K) \geqq 0$ seine Oberfläche, $r = r(K) \geqq 0$ sein Inkugelradius und $R = R(K) \geqq 0$ sein Umkugelradius. Bekanntlich ist $F(K) = 0$ genau dann, wenn K höchstens $n - 2$-dimensional ist. Dann ist aber $V(K) = 0$ von höherer Ordnung, und es ist sinnvoll, in diesem Fall $\frac{V(K)}{F(K)} = 0$ zu setzen. Wir beweisen einen Satz über V/F, für den zwei einfache Lemmata benötigt werden.

Lemma 1. *Für $K \in \mathfrak{K}^n$ ist*

$$r \leqq n \cdot \frac{V}{F} \leqq R \tag{1}$$

und für die Kugel werden beide Gleichheitszeichen angenommen.

Lemma 2. *Für $K \in \mathfrak{K}^n$ ist*

$$\frac{V}{F} \leqq r \tag{2}$$

und für kein $\varepsilon > 0$ kann r durch $r(1 - \varepsilon)$ ersetzt werden.

Satz. *Für $K \in \mathfrak{K}^n$, $K' \in \mathfrak{K}^n$ mit $K \subset K'$ ist*

$$\frac{V(K)}{F(K)} \leqq n \frac{V(K')}{F(K')} \tag{3}$$

und für kein $\varepsilon > 0$ kann n durch $n(1 - \varepsilon)$ ersetzt werden.

1. Bemerkung. Man kann leicht zeigen, daß das linke Gleichheitszeichen in (1) nur dann auftritt, wenn K eine Kugel oder ein Tangentialkörper oder uneigentlich ist, d.h. keine inneren Punkte hat. Ebenso leicht zeigt man, daß das rechte Gleichheitszeichen nur für eine Kugel möglich ist. Wir verzichten auf den Beweis, da nur (1) zum Beweis von (3) benötigt wird.

2. Bemerkung. In (2) und (3) gilt das Gleichheitszeichen, wenn K uneigentlich ist.

Für eigentliche konvexe Körper gilt in (2) und (3) vermutlich $<$ statt $\leqq$. Statt Lemma 2 gilt vermutlich sogar $rF \geqq V + (n - 1) V_i$ (V_i: Volumen der Inkugel).

Beweis zu Lemma 1. Da sich jedes $K \in \mathfrak{K}^n$ durch konvexe Polyeder approximieren läßt und V, F, r und R stetig von K abhängen (siehe z.B. [1]), genügt es, sich auf konvexe Polyeder zu beschränken. Sei also $K \in \mathfrak{K}^n$ ein Polyeder. Dann gilt (siehe [1], S. 38):

$$V = \frac{1}{n} \sum_i h_i \cdot f_i . \tag{4}$$

Dabei sind die f_i die $n - 1$-dimensionalen Volumina der Polyederflächen und h_i die Abstände der zugehörigen Hyperebenen vom Nullpunkt. Zum Beweis der linken Seite in (1) werde der Nullpunkt in den Mittelpunkt einer Inkugel von K gelegt. Nach Definition des Inkugelradius ist dann für jedes i: $h_i \geqq r = r(K)$. Also gilt

$$V \geqq \frac{1}{n} \cdot r \sum_i f_i = \frac{1}{n} \cdot r \cdot F .$$

Zum Beweis der rechten Seite von (1) liege der Nullpunkt im Mittelpunkt der Umkugel von K. Dann ist für jedes i: $h_i \leqq R$, also gilt:

$$V \leqq \frac{1}{n} \cdot R \sum_i f_i = \frac{1}{n} \cdot R \cdot F .$$

Für eine Kugel $S \in \mathfrak{K}^n$ mit Radius ϱ ist $r(S) = R(S) = \varrho$, und Lemma 1 ist bewiesen.

Beweis zu Lemma 2. Wieder sei $K \in \mathfrak{K}^n$ ein Polyeder. Der Einfachheit halber werde mit f_i jetzt nicht nur das Oberflächenvolumen der Polyederfläche, sondern auch die Polyederfläche selbst bezeichnet. Zu K wird folgender Hilfskörper Z konstruiert: Von jeder der f_i aus werde orthogonal zu f_i ins Innere von K ein Zylinder Z_i der Höhe $r = r(K)$ aufgetragen. Dann ist $V(Z_i) = r \cdot f_i$. Sei $Z = \bigcup_i Z_i$. Dann ist

$$V(Z) \leqq r \sum_i f_i = r \cdot F(K) . \tag{5}$$

Nach (5) muß nur noch gezeigt werden $V(K) \leqq V(Z)$.

Dazu genügt $K \subset Z$. Es sei jetzt $x \in K$ und d_i der Abstand von x zu f_i. Weiter sei $d = d(x, K) = \min_i d_i$. Ist S_d die Kugel um x mit dem Radius d, dann gilt $S_d \subset K$. Nach Definition des Inkugelradius folgt daraus: $d \leqq r$. Sei jetzt f_{i_0} eine der Flächen, deren Abstand von x gleich d ist. Man beachte, daß der Fußpunkt von d wegen $d = \min_i d_i$ auf f_{i_0} liegt (für ein d_i mit $d_i > d$ kann der Fußpunkt von d_i durchaus außerhalb von K, also nicht auf f_i liegen). Also gilt nach Konstruktion der Z_i: $x \in Z_{i_0}$, d.h. $x \in Z$. Da $x \in K$ beliebig war, folgt $K \subset Z$, und damit $V(K) \leqq r \cdot F(K)$. Zum Beweis, daß in (2) für kein $\varepsilon > 0$ r durch $r(1 - \varepsilon)$ ersetzt werden kann, wird eine geeignete Folge von $K \in \mathfrak{K}^n$ konstruiert: Sei $0 \leqq \varrho \leqq a$ und

$$K = P_a = \{x \,/\, |x_1| \leqq \varrho,\ |x_i| \leqq a;\ 2 \leqq i \leqq n\} .$$

Dann ist der Inkugelradius $r = r(P_a) = \varrho$,

$$V(P_a) = 2^n \cdot r \cdot a^{n-1} ,$$

$$F(P_a) = 2^n [a^{n-1} + (n - 1) \cdot r \cdot a^{n-2}] ,$$

und

$$\frac{r \cdot F}{V} = 1 + (n-1) \cdot \frac{r}{a} > 1 .$$

Also $\frac{r \cdot F}{V} \to 1$ für $a \to \infty$. Damit ist Lemma 2 vollständig bewiesen.

Beweis zum Satz. Seien $K \in \mathfrak{K}^n$, $K' \in \mathfrak{K}^n$ und $K \subset K'$. Wegen $K \subset K'$ ist $r(K) \leqq r(K')$. Aus (1) und (2) folgt $\frac{V(K)}{F(K)} \leqq r(K)$ und $r(K') \leqq n \cdot \frac{V(K')}{F(K')}$, also (3). Damit muß nur noch gezeigt werden, daß die Zahl n in (3) durch keine kleinere ersetzt werden kann. Dazu werden geeignete $K \in \mathfrak{K}^n$, $K' \in \mathfrak{K}^n$ konstruiert. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a > n$ und

$$K' = K'(a) = \left\{ x \,/\, |x_1| + \frac{1}{a^2} \sum_{i=2}^{n} |x_i| \leqq 1 \right\}.$$

Es ist $K' \in \mathfrak{K}^n$. Die Punkte der Oberfläche von K' liegen auf den 2^n paarweise verschiedenen Hyperebenen

$$\pm x_1 + \frac{1}{a^2} \sum_{i=2}^{n} (\pm x_i) = 1$$

(wobei jeweils eines der Vorzeichen gilt).

Deren Abstand vom Nullpunkt ist

$$h = h(a) = \left(1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a^4}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{n-1}{a^4}\right)^{-1/2}.$$

Daraus folgt mit (4) wegen $h_i = h$:

(6) $$n \frac{V(K')}{F(K')} = h .$$

Sei jetzt

$$K = K(a) = \left\{ x \,/\, |x_1| \leqq 1 - \frac{n-1}{a};\ |x_i| \leqq a,\ 2 \leqq i \leqq n \right\}.$$

Dann ist $K \in \mathfrak{K}^n$. Sei $x \in K$. Dann ist

$$|x_1| + \frac{1}{a^2} \sum_{i=2}^{n} |x_i| \leqq 1 - \frac{n-1}{a} + \frac{1}{a^2} (n-1)\, a = 1 ,$$

also $x \in K'$ und damit $K \subset K'$. Weiter ist

$$V(K) = 2^n \cdot \left(1 - \frac{n-1}{a}\right) \cdot a^{n-1}$$

und

$$F(K) = 2^n \cdot a^{n-1} \left[1 + \frac{n-1}{a} \left(1 - \frac{n-1}{a}\right)\right].$$

Mit $\alpha = \alpha(a) = \frac{n-1}{a} < 1$ folgt

(7) $$\frac{V(K)}{F(K)} = \frac{1-\alpha}{1 + \alpha(1-\alpha)} .$$

Da (3) schon bewiesen ist, folgt aus (6) und (7):

$$n \frac{V(K')}{F(K')} - \frac{V(K)}{F(K)} = h - \frac{1-\alpha}{1+\alpha(1-\alpha)} \geqq 0 .$$

Mit $\lim_{a\to\infty} h(a) = 1$ und $\lim_{a\to\infty} \alpha(a) = 0$ folgt

$$\lim_{a\to\infty}\left[n\cdot\frac{V(K')}{F(K')}-\frac{V(K)}{F(K)}\right]=0.$$

Das heißt, n kann durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.

Damit ist der Satz bewiesen.

Den Beweis des Satzes konnte später HADWIGER in [2] anwenden.

Literaturverzeichnis

[1] T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[2] H. HADWIGER, Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt. Math. Z. **116**, 191–196 (1970).

Eingegangen am 30. 5. 1969

Anschrift des Autors:
Jörg M. Wills
Mathematisches Institut der
Technischen Universität Berlin
1 Berlin 12
Hardenbergstr. 34