Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung

Herrn Professor Dr. KARL STRUBECKER zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

HELMUT BRAKHAGE und PETER WERNER

Einführung und Problemstellung. In der vorliegenden Note soll ein neuer Existenzbeweis für das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung gegeben werden. Es sei F eine zweimal stetig differenzierbare geschlossene Fläche, die den Raum in das Außengebiet G und das Innengebiet G_i zerlegt. Gesucht ist eine in G zweimal stetig differenzierbare und in $G + F$ stetige Funktion U, die in G der Gleichung

$$\Delta U + \varkappa^2 U = 0 \tag{1}$$

mit $\operatorname{Im} \varkappa \geqq 0$ genügt, auf F vorgegebene stetige Randwerte annimmt und im Unendlichen die Ausstrahlungsbedingung

$$U = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\varkappa\right) U = o\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \text{für} \quad r = |x| \to \infty \tag{2}$$

erfüllt. Die Bedingung (2) ist von A. SOMMERFELD eingeführt worden [6]. Für $\varkappa = 0$ geht (2) in die übliche Unendlichkeitsbedingung der Potentialtheorie über.

F. RELLICH hat in [5] gezeigt, daß es höchstens eine Lösung mit den verlangten Eigenschaften gibt[1]). Die ersten Existenzbeweise wurden von W. D. KUPRADSE [2], H. WEYL [11] und C. MÜLLER [4] gegeben. Weitere Beiträge zur Existenztheorie stammen von P. R. GARABEDIAN [1], R. LEIS [3] und dem einen von uns [8]. Obwohl das Existenzproblem in den zitierten Arbeiten bereits vollständig gelöst ist, glauben wir, daß aus Gründen, auf die wir am Ende der Arbeit eingehen, der nachfolgend mitgeteilte einfache Beweis von Interesse ist.

Der Existenzbeweis. Es sei

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\varkappa|x-y|}}{|x-y|} \tag{3}$$

die Grundlösung der Helmholtzschen Schwingungsgleichung. Wir führen den Vorzeichenfaktor

---

[1]) Der Nachweis, daß in dem RELLICHschen Eindeutigkeitsbeweis die Greensche Formel angewendet werden kann, erfordert, falls man keine weiteren Regularitätsforderungen an U stellt, eine kleine zusätzliche Überlegung (vgl. [8], Lemma 15).

$$\eta = \eta(\varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \operatorname{Re}\varkappa \geqq 0, \\ -1 & \text{für} \quad \operatorname{Re}\varkappa < 0 \end{cases} \tag{4}$$

ein und gehen von dem Ansatz

$$U(x) = \int_F \nu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y} - i\,\eta\right)\Phi(x, y)\,dF_y \tag{5}$$

aus, der für beliebige ν in G_a die Gleichung (1) und für $r \to \infty$ die Ausstrahlungsbedingung (2) erfüllt. Wir verwenden also eine Kombination von einem einfachen und einem doppelten Flächenpotential, wobei die Belegungen in fester Weise durch den Faktor $i\eta$ miteinander gekoppelt sind. Hierin unterscheidet sich unser Ansatz von dem von KUPRADSE, WEYL und MÜLLER benutzten Ansatz.

Die Randbedingung $U_a = g$ führt nach der Sprungrelation für Doppelpotentiale zu der Integralgleichung

$$\nu(x) + \int_F \nu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y} - i\,\eta\right)\Phi(x, y)\,dF_y = g(x) \quad (x \in F), \tag{6}$$

die wir zur Abkürzung in der Form

$$\nu + K\nu = g \tag{7}$$

schreiben. Legen wir den Banach-Raum $C(F)$ der auf F erklärten stetigen Funktionen ν mit der Norm

$$\|\nu\| = \operatorname*{Max}_{x \in F} |\nu(x)| \tag{8}$$

zugrunde, so erweist sich K als vollstetiger Operator von $C(F)$ in sich (vgl. z. B. [8], § 4). Wir können daher den Fredholmschen Alternativsatz zur Diskussion der Integralgleichung (6) heranziehen.

Es sei ν eine stetige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\nu + K\nu = 0$. Aus der Integralgleichung (6) (mit $g = 0$) und bekannten potentialtheoretischen Sätzen (vgl. z. B. [8], Lemma 5 und Lemma 6) folgt, daß ν auf F hölderstetig differenzierbar ist. Hieraus folgt weiter ([8], Lemma 3 und Lemma 7), daß die durch (11) erklärte Funktion U in $G_a + F$ und $G_i + F$ stetig differenzierbar ist. Wegen

$$\nu + K\nu = 0 \quad \text{gilt} \quad U_a = 0$$

auf F. Nach dem Eindeutigkeitssatz von RELLICH verschwindet daher U im gesamten Außenraum G_a. Mit Hilfe der Sprungrelationen für das Doppelpotential und die Normalableitung des einfachen Potentials ergeben sich somit die Beziehungen

$$U_i = -2\nu \tag{9}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial n} U_i = -2i\eta\nu. \tag{10}$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß die Normalableitung des Doppelpotentials im Fall einer hölderstetig differenzierbaren Belegung bei dem Durchgang durch F stetig ist ([8], Lemma 7). Nach (9) und (10) gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} U_i = i\eta U_i. \tag{11}$$

Hieraus folgt mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

$$(12)\qquad \begin{aligned} i\eta\int_F |U_i|^2 dF &= \int_F \bar{U}_i \frac{\partial}{\partial n} U_i dF = \int_{G_i} \nabla\cdot(\bar{U}\nabla U)\,dV = \\ &= \int_{G_i}(|\nabla U|^2 + \bar{U}\Delta U)\,dV = \int_{G_i}(|\nabla U|^2 - \varkappa^2|U|^2)\,dV. \end{aligned}$$

Nach Wahl des Vorzeichenfaktors η in (4) gilt für alle $\varkappa$

$$(13)\qquad \frac{1}{\eta}\,\mathrm{Im}(\varkappa^2) \geqq 0.$$

Aus (12) ergibt sich daher durch Übergang zum Imaginärteil

$$(14)\qquad \int_F |U_i|^2 dF = -\frac{1}{\eta}\,\mathrm{Im}(\varkappa^2)\int_{G_i}|U|^2 dV \leqq 0$$

und somit

$$(15)\qquad U_i = 0.$$

Aus der Sprungrelation für Doppelpotentiale folgt daher

$$(16)\qquad \nu = \frac{1}{2}(U_a - U_i) = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß die homogene Gleichung $\nu + K\nu = 0$ keine nichttriviale Lösung besitzt. Nach dem ersten Teil des Fredholmschen Alternativsatzes besitzt daher die Integralgleichung (6) für jedes stetige g genau eine Lösung ν. Bilden wir mit ihr die durch (5) erklärte Funktion U, so erhalten wir die gesuchte Lösung des Dirichletschen Außenraumproblems. Damit ist der Existenzbeweis abgeschlossen.

Bemerkungen. Das hier wiedergegebene Verfahren unterscheidet sich von den zitierten klassischen Existenzbeweisen von Kupradse, Weyl und Müller dadurch, daß nur der erste Teil des Fredholmschen Alternativsatzes benutzt wird. Die genannten Autoren verwenden Integralgleichungen, die für abzählbar unendlich viele reelle Werte von $\varkappa$, nämlich für die Eigenwerte $\varkappa_n$ des zugehörigen Neumannschen Innenraumproblems, nicht eindeutig lösbar sind. Für diese Werte von $\varkappa$ waren zusätzliche Untersuchungen erforderlich.

Wie bereits P. R. Garabedian bemerkte [1], ist es wünschenswert, einen einheitlichen Existenzbeweis ohne Sonderbehandlung von Ausnahmefällen zu geben, der ausschließlich auf dem ersten Fall der Fredholmschen Alternative beruht. In der zitierten Arbeit gab Garabedian einen solchen Beweis für den ebenen Fall mit Hilfe konformer Abbildung. Im räumlichen Fall gelang es dem einen von uns, das Außenraumproblem auf ein gekoppeltes Integralgleichungssystem für eine Flächenbelegung und eine Volumenbelegung über den Innenraum zurückzuführen, für das für alle $\varkappa$ mit $\mathrm{Im}\,\varkappa \geqq 0$ der erste Teil der Fredholmschen Alternative vorliegt [8]. Diese Methode ließ sich auch auf das Neumannsche Außenraumproblem und auf das Außenraumproblem der Maxwellschen Gleichungen übertragen [8, 9].

Ein Vorteil der einheitlichen Art der Beweisführung liegt darin, daß sich die Abhängigkeitseigenschaften der Lösungen in natürlicher Weise diskutieren lassen. Zum

Beispiel konnte gezeigt werden, daß die Lösung des Dirichletschen Außenraumproblems in der Halbebene Im $\varkappa \geqq 0$ einschließlich der reellen Achse analytisch von dem Koeffizienten $\varkappa$ abhängt (Prinzip der Grenzabsorption) [8]. Darüber hinaus ist es auch für die numerische Behandlung von Bedeutung, die Ausartungsfälle der Integralgleichung zu vermeiden. In dieser Hinsicht bietet die in [8] beschriebene Methode einen prinzipiell begehbaren Weg zur numerischen Bestimmung der Lösung. Allerdings ist der numerische Aufwand recht groß, da neben den beiden Flächendimensionen auch noch die drei Innenraumdimensionen zu berücksichtigen sind. Wir stellten uns daher die Aufgabe, die erstrebte einheitliche Beweisführung allein mit Hilfe von Flächenbelegungen zu erreichen. Zunächst gelang es einem von uns (B.) zu zeigen, daß sich ein solcher Beweis in sehr natürlicher Weise im Rahmen der Theorie der singulären Integralgleichungen führen läßt. Über diese Ergebnisse wurde 1963 in Vorträgen in Kiel und Mainz berichtet. Der zweite Verfasser bemerkte später, daß sich der Fall des Dirichletschen Außenraumproblems bei geeigneter Modifizierung des Ansatzes auch im Rahmen der Theorie der regulären Integralgleichungen (im Sinn der Theorie von SCHAUDER und RIESZ) behandeln läßt, und gab die in dieser Arbeit dargestellte vereinfachte Beweisanordnung an.

Die Übertragung der Betrachtungen auf beliebige Raumdimensionen bereitet keine Schwierigkeiten. Ferner lassen sich die in [10], § 3 und § 5 betrachteten Dirichletschen Zwischenraumprobleme in entsprechender Weise durch zu (5) analoge Ansätze auf reine Flächenintegralgleichungen zurückführen. Dagegen scheint eine Übertragung der hier dargestellten Methode auf das Neumannsche Außenraumproblem und auf die Randwertprobleme für die Maxwellschen Gleichungen nur möglich zu sein, falls man singuläre Integralgleichungen in die Betrachtungen einbezieht. Auf die hiermit zusammenhängenden Fragen wollen wir in einer späteren Arbeit eingehen, in der verschiedene Anwendungen der Theorie der singulären Integralgleichungen auf Beugungsprobleme besprochen werden sollen.

Die in dieser Arbeit beschriebene Methode eignet sich besonders gut als Ausgangspunkt für die numerische Berechnung der Lösung U des Dirichletschen Außenraumproblems. Über einige Erfahrungen in dieser Hinsicht soll an anderer Stelle berichtet werden.

Literaturverzeichnis

[1] P. R. GARABEDIAN, An integral equation governing electromagnetic waves. Quart. Appl. Math. **12**, 428—433 (1954).

[2] W. D. KUPRADSE, Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen. Berlin 1956, russische Erstausgabe: Moskau 1950.

[3] R. LEIS, Über die Randwertaufgaben des Außenraumes zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung. Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, 21—44 (1962).

[4] C. MÜLLER, Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl. Math. Z. **56**, 80—83 (1952).

[5] F. RELLICH, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **53**, 57—65 (1943).

[6] A. SOMMERFELD, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **21**, 309—353 (1912).

[7] P. WERNER, Zur mathematischen Theorie akustischer Wellenfelder. Arch. Rat. Mech. Anal. **6**, 231—260 (1960).

[8] P. WERNER, Randwertprobleme der mathematischen Akustik. Arch. Rat. Mech. Anal. **10**, 29—66 (1962).

[9] P. Werner, On the exterior boundary value problem of perfect reflection for stationary electromagnetic wave fields. J. Math. Anal. Appl. 7, 348—396 (1963).
[10] P. Werner, Über die Randwertprobleme der Helmholtzschen Schwingungsgleichung. Math. Z. 85, 226—240 (1964).
[11] H. Weyl, Kapazität von Strahlungsfeldern. Math. Z. 55, 187—198 (1952).

Eingegangen am 30. 4. 1964

Anschrift der Autoren:
Helmut Brakhage
Peter Werner
Technische Hochschule Karlsruhe
Institut für Angewandte Mathematik
75 Karlsruhe, Englerstraße 7