Commun. Math. Phys. 121, 639–657 (1989)

Communications in
Mathematical
Physics

Représentations unitaires des super-algèbres de Ramond et de Neveu-Schwartz

François Sauvageot

Département de Mathématiques et d'informatique, Ecole Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. Using R.P. Langlands' method, we give an analytic proof of the classification theorem of the unitary representations of Ramond and Neveu-Schwartz superalgebras, first proved by D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker by a numerical argument.

Sommaire

I. Enoncé du problème

I.1. Introduction

On s'intéresse aux représentations de l'algèbre de Virasoro et ses analogues supersymétriques (Ramond et Neveu-Schwartz): on construit une forme bilinéaire contravariante sur l'espace de la représentation (cf. [4, 6, 10]), et on cherche les représentations qui sont unitarisables pour cette forme.

Le fait majeur est que l'on trouve un quart de plan «trivial» d'unitarisabilité, et des «séries» indexées par des entiers (cf. [1–3, 7, 8, 10 et 11]). Le paragraphe II.1 est consacré à l'analyse du cas «trivial» $z \geqq 3/2$ et $h \geqq 0$. Et, à partir de ce paragraphe, le plan de l'ouvrage suit celui de [8]. Les propriétés découlant immédiatement de [8] (et, pour certains points techniques, de [9]) seront énoncées par souci de complétude, mais non redémontrées.

Les Théorèmes 2 et 3 ont été énoncés, et une preuve reposant essentiellement sur des calculs numériques est donnée dans [2, 3]. Les théorèmes réciproques sont démontrés dans [7]. Une démonstration analytique du Théorème 2 est donnée dans [8].

I.2. Super-algèbres et Super-algèbres de Lie

Définition 1. Si **G** est un groupe abélien, une algèbre A est dite **G**-graduée si A se décompose en une somme directe de sous-espaces $A = \bigoplus_{\alpha \in G} A_\alpha$, pour lesquels $A_\alpha A_\beta \subseteqq A_{\alpha+\beta}$. Un élément a de A_α est dit homogène de degré α, on note $\deg a = \alpha$.

Remarque. Si dans une formule, on écrit $\deg a$, ceci sous-entend que a est homogène et que la formule s'étend par linéarité à A.

Définition 2. Une super-algèbre est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée. Les élements homogènes de degré $\bar{0}$ sont dits pairs, ceux de degré $\bar{1}$ sont dits impairs.

Définition 3. Une super-algèbre de Lie est une super-algèbre $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ avec un crochet [,], tel que:

(SL1) $[a,b] = (-1)^{(\deg a)(\deg b)}[b,a]$ (anticommutativité),

(SL2) $[a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{(\deg a)(\deg b)}[b,[a,c]]$ (identité de Jacobi).

Remarques. $A_{\bar{0}}$ est une algèbre de Lie ordinaire. $A_{\bar{1}}$ est un $A_{\bar{0}}$-module.

La donnée de cette super-algèbre de Lie est alors équivalente à la donnée d'un homomorphisme de $A_{\bar{0}}$-*modules* $\varphi: S^2 A_{\bar{1}} \to A_{\bar{0}}$ tel que $\varphi(a,b)c + \varphi(b,c)a + \varphi(c,a)b = 0$.

Exemple fondamental: Si **A** est une super-algèbre associative, le crochet $[a,b] = ab - (-1)^{(\deg a)(\deg b)} ba$ en fait une super-algèbre de Lie.

Remarque. On construit, comme pour les algèbres de Lie, la super-algèbre enveloppante universelle par $T(A) = K \oplus A \oplus (A \otimes A) \oplus \ldots$. Les $A \otimes \ldots \otimes A$ étant tous $\mathbf{Z}_2$-gradués, T l'est aussi par linéarité. On a alors $U(A) = T(A)/R$ où R est l'idéal bilatère engendré par les $[a,b] - a \otimes b + (-1)^{(\deg a)(\deg b)} b \otimes a$.

Théorème 1 (PBW). *Si $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ est une super-algèbre de Lie, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ une base de $A_{\bar{0}}$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ une base de $A_{\bar{1}}$, alors une base de $U(A)$ est donnée par les éléments de la forme $a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} b_{i_1} \ldots b_{i_s}$ avec $k_i \geqq 0$ (pour $1 \leqq i \leqq m$) et $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqq n$.*

Cf., par exemple, [5].

I.3. L'algèbre de Virasoro. Le théorème de Friedan-Qiu-Shenker

On peut construire l'algèbre de Virasoro de différentes manières (toutes instructives). L'une de celles-ci consiste à s'intéresser à l'algèbre v, algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle à série de Fourier finie (i.e. polynômiaux). On sait alors que $H^2(v, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}$. Un cocycle non nul est donné par:

$$\gamma\left(\frac{1}{i} e^{ki\theta} \frac{d}{d\theta}, \frac{1}{i} e^{li\theta} \frac{d}{d\theta}\right) = \delta_{k,-l} \frac{k(k^2-1)}{12}$$

pour $k, l \in \mathbf{Z}$. L'algèbre de Virasoro est alors isomorphe à l'extension centrale (universelle) $\mathscr{G} = v \oplus \mathbf{C}$, correspondant au cocycle γ.

L'isomorphisme envoie L_k sur $\left(\frac{1}{i} e^{ki\theta} \frac{d}{d\theta}, 1\right)$ et Z sur $(0, 1)$. Et, en fait $\mathbb{G}$ est le revêtement universel de v.

On obtient ainsi une algèbre de Lie complexe ayant pour base $\{L_k, Z\}_{k \in Z}$, satisfaisant aux relations:

$$[L_k, L_n] = (k-n) L_{k+n} + \delta_{k,-n} \frac{k(k^2-1)}{12} Z,$$

$$[L_n, Z] = 0.$$

La sous-algèbre de Cartan associée est alors $\mathscr{H} = \mathbf{C}L_0 \oplus \mathbf{C}Z$, et, pour $\lambda \in \mathscr{H}^*$ tel que $\lambda(L_0) = h$ et $\lambda(Z) = z$, on définit

$$M_\lambda = \{v \in M / L_0 v = hv, Zv = zv\},$$

où M est un $\mathscr{H}$-module.

Une représentation $\mathbf{M}$ de $\mathscr{G}$ avec plus haut poids λ est alors une représentation engendrée par un vecteur v_λ tel que:

$$\begin{cases} L_k v_\lambda = 0 & \\ L_0 v_\lambda = h v_\lambda \quad \text{et} \quad Z v_\lambda = z v_\lambda \end{cases} \quad \text{pour } k > 0,$$

v_λ est alors appelé vecteur de plus haut poids de $\mathbf{M}$.

Le module de Verma associé à λ est alors ainsi construit:

$$M(\lambda) = U(\mathscr{G}) \otimes_{U(B)} \mathbf{C}(\lambda),$$

où $\mathscr{B}$ est le sous-espace de Borel associé à $\mathbf{G}$ (i.e. $\mathscr{B} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{N}$, avec $\mathscr{N} = \bigoplus_{i>0} L_i$ – on note également $\mathscr{N}^- = \bigoplus_{i<0} L_i$–), et où $\mathbf{C}(\lambda)$ est le $\mathscr{B}$-module de dimension 1 avec une $\mathscr{H}$-action donnée par λ et une $\mathscr{N}$-action triviale.

Par simple calcul de crochets, il est alors clair que $M(\lambda) = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} M(\lambda)_{\lambda - m}$. On construit ensuite une forme bilinéaire symétrique contravariante ainsi: Soit ω l'antiautomorphisme linéaire de $U(\mathscr{G})$ tel que $\omega(L_k) = L_{-k}$, $k \in \mathbf{Z}$ et qui laisse invariant $\mathbf{Z}$. Soit β la projection de $U(\mathscr{G}) = U(\mathscr{H}) \oplus (\mathscr{N}^- U(\mathscr{G}) + U(\mathscr{G})\mathscr{N})$ sur $U(\mathscr{H})$; remarquons enfin que l'on peut prendre pour v_λ le vecteur $1 \otimes 1$ de $M(\lambda)$. On définit alors:

$$\langle X v_\lambda, Y v_\lambda \rangle = (\lambda \circ \beta)(\omega(X) Y).$$

La forme est contravariante en ce sens que:

$$\langle Xv, w \rangle = \langle v, \omega(X) w \rangle$$

pour $X \in U(\mathscr{G})$ et $v, w \in M(\lambda)$. Grâce à cette contravariance, on a une décomposition en somme directe orthogonale (i.e. $\langle v, w \rangle = 0$ si $v \in M(\lambda)_\mu$ et $w \in M(\lambda)_\nu$ pour $\mu \neq \nu$). Il est alors clair que le Radical de cette forme est l'unique sous-module maximal de $M(\lambda)$, et donc que $L(\lambda)=M(\lambda)/\mathrm{Rad}\langle\cdot,\cdot\rangle$ est l'unique quotient irréductible de $M(\lambda)$.

On dit alors que la représentation définie par λ est unitarisable si, sur $L(\lambda)$, elle donne une représentation unitaire. D'une manière équivalente, ceci signifie que la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non-négative sur $M(\lambda)$.

On a alors le théorème suivant (cf. [2, 8]):

Théorème 2 (Friedan-Qiu-Shenker). *La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non-négative si et seulement si:*

(i) *soit $z\geqq 1$ et $h\geqq 0$,*

(ii) *soit il existe un entier $m\geqq 2$ et deux entiers p, q tels que $1\leqq q\leqq p<m$ et:*

$$z=1-\frac{6}{m(m+1)},\qquad h=\frac{((m+1)p-mq)^2-1}{4m(m+1)}.$$

L'objet de la présente étude est de prouver l'analogue de ce théorème dans le cas super-symétrique (cf. également [3]).

I.4. Les super-algèbres de Ramond et de Neveu-Schwartz

Celles-ci sont définies par les relations suivantes:

(i) v_ε est engendrée par $\mathbf{Z}$, $\{L_k\}_{(k\in\mathbf{Z})}$, $\{F_l\}_{(l\in\varepsilon+\mathbf{Z})}$, $\varepsilon=0$ ou 1,

(ii) $[L_i,L_j]=(i-j)L_{i+j}+\frac{1}{12}(i^3-i)\delta_{i,-j}Z$,

(iii) $[F_i,F_j]=2L_{i+j}+\frac{1}{3}(i^2-\frac{1}{4})\delta_{i,-j}Z$,

(iv) $[F_i,L_j]=\left(i-\dfrac{j}{2}\right)F_{i+j}$,

(v) $\mathbf{Z}$ est central.

$v_{\varepsilon,\bar 0}$ est engendrée par $\mathbf{Z}$ et les L_k, et $v_{\varepsilon,\bar 1}$ est engendrée par les F_k.

La sous-algèbre de Cartan est définie de la même manière, en rajoutant (si nécessaire) F_0.

Les notions de sous-espaces propres associés à un poids, de représentations avec plus haut poids, de modules de Verma se généralisent immédiatement; et on a encore (avec exactement la même construction) une unique (à multiplication par un scalaire près) forme bilinéaire symétrique contravariante, ainsi qu'un unique quotient irréductible.

Nous nous proposons alors de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *La forme $\langle,\cdot,\rangle$ est unitarisable si et seulement si:*

(i) *soit $z\geqq 3/2$; $h\geqq 0(\varepsilon=1/2)$ ou λ réel $(\varepsilon=0)$,*

(ii) *soit il existe un entier m et deux entiers p et q tels que:*

$$0<q\leqq p+1-2\varepsilon\leqq m+2-2\varepsilon \quad et \quad p-q+1-2\varepsilon\in 2\mathbf{Z},$$

$$z=3/2\left(1-\frac{8}{(m+2)(m+4)}\right) \quad et \quad h=\frac{((m+4)p-(m+2)q)^2-4}{8(m+2)(m+4)}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right).$$

On abrègera souvent $\pi(X)\cdot v$ en Xv.

Si α et β sont deux multi-indices $(n_1,\ldots,n_t)$ et $(l_1,\ldots,l_s)$ (respectivement), avec $n_1\geqq n_2\geqq\ldots\geqq n_t>0$ et $l_1>l_2>\ldots>l_s$, r, $s\in\mathbf{N}$, on note: $\alpha\cdot\beta$ le double multi-indice donné par α et β,

$$v_{\alpha\cdot\beta}=F_{-l_s}\ldots F_{-l_1}L_{-n_t}\ldots L_{-n_1}v_\phi.$$

Alors le module de Verma $V(=M(\lambda))$, est engendré par les $v_{\alpha\cdot\beta}$ pour α et β décrivant tous les multi-indices entiers.

On a nécessairement $\lambda^2=h-\frac{z}{24}$, en effet:

$$\lambda^2=\langle F_0^2 v_\phi, v_\phi\rangle=\left\langle\frac{1}{2}[F_0,F_0]v_\phi,v_\phi\right\rangle=\left\langle\left(L_0-\frac{Z}{24}\right)v_\phi,v_\phi\right\rangle=h-\frac{z}{24}.$$

Et donc, les représentations sont indiciées soit par h et z, si $\varepsilon=1/2$, soit par λ et z sinon.

II. Premiere analyse du probleme

II.1. Premiers paramètres: p, q et m

Première réduction.

Lemme 1 [8]. *Si la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non-négative, alors $h\in\mathbf{R}_+$, $z\in\mathbf{R}_+$, $\left(\text{et } h\geqq\frac{z}{24}\text{ si } \varepsilon=0\right)$.*

$$\textit{Posons:}\quad\begin{cases} z(m)=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{8}{(m+2)(m+4)}\right)\\[2ex] \text{et } h^{\varepsilon}_{p,q}(m)=\dfrac{((m+4)p-(m+2)q)^2-4}{8(m+2)(m+4)}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right).\end{cases}$$

Pour $k_1\geqq k_2\geqq\ldots\geqq k_r>0$ et $l_1>\ldots>l_s>0$, soit $\alpha\bullet\beta=(k_1,\ldots,k_r)\bullet(l_1,\ldots,l_s)$, notons $\varrho(\alpha\bullet\beta)=r+s$ et $v(\alpha\bullet\beta)=\sum_{i=1}^{r}k_i+\sum_{j=1}^{s}l_j$.

Alors $V=\bigoplus_{n\geqq 0}V_n$ avec $V_n=\mathrm{Vect}(v_{\alpha\cdot\beta}/v(\alpha\bullet\beta)=n)$, et les V_n sont 2 à 2 orthogonaux pour la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Il existe une autre forme sesquilinéaire définie sur V, à savoir $\{v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\}=\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta}$ étendue par linéarité. Les V_n sont encore orthogonaux pour cette forme et, en se restreignant à V_n, on peut écrire:

$$\langle u,v\rangle_n=\{H_n(u),v\}_n$$

avec H_n opérateur linéaire hermitien (dépendant de (h,z) ou de (λ,z) selon le cas).

Dénotons par $P(n)$ la dimension de V_n. Le point crucial de la démonstration est la formule de Kac pour le déterminant de H_n (cf. [7] par exemple):

$$\det H_n=A_n\prod_{k\leqq 2n}\ \prod_{\substack{pq=k\\ 1-2\varepsilon+p-q\in 2\mathbf{N}}}(h-h^{\varepsilon}_{p,q}(m))^{P\left(n-\frac{pq}{2}\right)}\quad\text{si } z=z(m),$$

avec $A_n>0$.

Cette formule permet de démontrer la non-négativité pour $h\geqq 0$, $z\geqq\frac{3}{2}$, et $h\geqq\frac{z}{24}$ (si $\varepsilon=0$):

Proposition 1. *La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non-négative pour $h \geqq 0$, $z \geqq \frac{3}{2}$, $h \geqq \frac{z}{24}$ (si $\varepsilon \geqq 0$).*

Démonstration. Par continuité, il suffit de le voir pour $h>0$, $z>\frac{3}{2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $z=z(m) >\frac{3}{2}$, alors:

pour $\varepsilon=0$

$$\left(h-\frac{z}{24}\right)-\left(h_{p,q}^{0}(m)-\frac{z}{24}\right)=h-\frac{z}{24}-\frac{[(m+4)p-(m+2)q]^2}{8(m+2)(m+4)},$$

or $z(m)>\frac{3}{2}$ impose $(m+2)(m+4)<0$. Donc $h-h_{p,q}^0>0$. Pour $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $z(m)>\frac{3}{2}$ impose $m\in]-4,\ -2[$ ou $m=3+i\delta(\delta\in\mathbf{R},\ i^2=-1)$.

Dans le premier cas $2q \leqq (m+4)(p-q)+2q$ prouve que $h_{p,q}^{1/2}(m) \leqq 0$; dans le second cas, on a $\operatorname{Im}(h_{p,q}^{1/2}(m)) \neq 0$.

D'où $\det H_n \neq 0$. Il suffit donc de prouver la proposition pour *une* paire (h,z) (ou $(\lambda,z)\ldots$).

On va démontrer par récurrence que:

(i) $$\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\alpha\cdot\beta}\rangle = c_{\alpha,\beta} h^{\varrho(\alpha\cdot\beta)}(1+o(1)), \qquad c_{\alpha,\beta}>0,$$

(ii) $$\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle = o\left(h^{\frac{\varrho(\alpha\cdot\beta)+\varrho(\gamma\cdot\delta)}{2}}\right) \text{ si } (\alpha\bullet\beta)\neq(\gamma\bullet\delta).$$

La récurrence se fait sur $\varrho(\alpha\bullet\beta)+\varrho(\gamma\bullet\delta)$.

Pour prouver ceci, nous avons besoin de deux Lemmes de «réordonnement» assez naturels et dont les démonstrations sont triviales:

Lemme 2. *Pour tout $r \geqq 1$, $(k_i)_{1\leqq i\leqq r}\in\mathbf{N}^{*r}$, $(\varepsilon_i)_{1\leqq i\leqq r}\in\{0,1\}^r$*

$$X_{-k_r}^{\varepsilon_r}\ldots X_{-k_1}^{\varepsilon_1}v_\phi = \sum_{\substack{\nu(\alpha\bullet\beta)=\sum_{i=1}^{r}k_i\\ \varrho(\alpha\bullet\beta)\leqq r}} s(\alpha\bullet\beta)v_{\alpha\cdot\beta},$$

où on a convenu $X_{-k_i}^0=L_{-k_i}$ et $X_{-k_i}^1=F_{-k_i}$ et où les $s(\alpha\bullet\beta)$ sont des réels (en fait au plus demi-entiers), indépendants de h, z et λ.

Lemme 3.

$$F_l L_{-n_t}\ldots L_{-n_1}v_\phi=\begin{cases}0 & si\ l>\sum_{i=1}^{t}n_i;\\ \sum s(\alpha\bullet\beta)v_{\alpha\cdot\beta} & si\ l\leqq\sum_{i=1}^{t}n_i\end{cases},$$

où les $s(\alpha\bullet\beta)$ sont nuls si $\nu(\alpha\bullet\beta)\neq -l+\sum_{i=1}^{t}n_i$, ou si $\varrho(\alpha\bullet\beta)>t$.

Et où $(n_1,\ldots,n_t)$ est quelconque dans $\mathbf{N}^t$, $l\in\mathbf{N}$, $t\in\mathbf{N}^*$.

Démontrons la proposition. Si $\varrho(\alpha\bullet\beta)+\varrho(\gamma\bullet\delta)=2$:

1^er^ cas.

$$\langle F_{-l_1}v_\phi, F_{-l_2}v_\phi\rangle=\langle F_{l_2}F_{-l_1}v_\phi, v_\phi\rangle=\left\langle\left(2L_{l_2-l_1}+\delta_{l_2-l_1}\frac{4l_1^2-1}{12}Z\right)v_\phi, v_\phi\right\rangle$$
$$=\begin{cases}0, & si\ l_1\neq l_2\\ 2h+\dfrac{4l_1^2-1}{12}z, & si\ l_1=l_2.\end{cases}$$

2^e cas.

$$\begin{aligned}\langle F_{-l_1}v_\phi, L_{-n_1}v_\phi\rangle &= \langle L_{n_1}F_{-l_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &= \left(l_1+\frac{n_1}{2}\right)\langle F_{n_1-l_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &= \begin{cases} 0, & si\ n_1 \neq l_1 \\ \left(l_1+\frac{n_1}{2}\right)\lambda, & sinon. \end{cases}\end{aligned}$$

3^e cas.

$$\begin{aligned}\langle L_{-n_1}v_\phi, L_{-n_2}v_\phi\rangle &= \langle L_{n_2}L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &= \left\langle\left((n_1+n_2)L_{n_2-n_1}+\delta_{n_2-n_1}\frac{n_1(n_1^2-1)}{6}Z\right)v_\phi, v_\phi\right\rangle \\ &= \begin{cases} 0, & si\ n_1 \neq n_2 \\ 2n_1h+\frac{n_1(n_1^2-1)}{6}z, & sinon. \end{cases}\end{aligned}$$

Comme $\lambda \sim h^{1/2}$, la propriété est vérifiée.

$\mathbf{H}_{r-1} \Rightarrow \mathbf{H}_r$:

1^{er} cas: β ou $\delta \neq \emptyset$; alors notons δ celui qui contient le plus petit indice l dans son écriture $(l_1, \ldots, l_s)$. On a:

$$\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle = \langle L_{k_1}\ldots L_{k_r}F_{m_1}\ldots F_{m_u}F_{-l_s}\ldots F_{-l_1}L_{-n_t}\ldots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle$$

avec $m_u \leqq l_s$ (et éventuellement $s=0$, i.e. $F_{-l_s}\ldots F_{-l_1}L_{-n_t}\ldots L_{-n_1} = L_{-n_t}\ldots L_{-n_1}$).

On a donc:

$$\begin{aligned}\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle &= (-1)^s\langle L_{k_1}\ldots L_{k_r}F_{m_1}\ldots F_{m_{u-1}}F_{-l_s}\ldots F_{-l_1}F_{m_u}L_{-n_t}\ldots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{s}(-1)^{s-j}\Big[2\langle L_{k_1}\ldots F_{m_{u-1}}F_{-l_s}\ldots F_{-l_{j+1}}L_{-(l_j-m_u)} \\ &\times F_{-l_{j-1}}\ldots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle \\ &+\delta_{m_u,l_j}\frac{4m_u^2-1}{12}z\langle L_{k_1}\ldots F_{m_{u-1}}F_{-l_s}\ldots F_{-l_{j+1}} \\ &\times F_{-l_{j-1}}\ldots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle\Big].\end{aligned}$$

Pour le 1^{er} terme, on applique d'abord le Lemme 3 et le Lemme 2, puis l'hypothèse de récurrence, et on obtient un $O\left(h^{\frac{\varrho(\alpha\cdot\beta)+(\varrho(\gamma\cdot\delta)-1)}{2}}\right)$, c'est-à-dire un $o\left(h^{\frac{\varrho(\alpha\cdot\gamma)+\varrho(\gamma\cdot\delta)}{2}}\right)$.

Au dernier terme, on applique l'hypothèse de récurrence, et on obtient un $O\left(h^{\frac{\varrho(\alpha\cdot\beta)+\varrho(\gamma\cdot\delta)-2}{2}}\right)$.

Quand aux autres termes, on peut leur appliquer le Lemme 2, sauf peut-être pour $j=s$ – dans le cas où $l_s=m_u$ –, et on obtient le même ordre de grandeur que pour le premier terme, sauf si on est dans le cas $l_s=m_u$, où on obtient:

$$2\left(h+\sum_{i=1}^{t} n_j+\sum_{j=1}^{s} l_j\right)\langle v_{\alpha\cdot\beta'}, v_{\gamma\cdot\delta'}\rangle$$

avec $\beta'=(m_1,\dots,m_{u-1})$ et $\delta'=(l_1,\dots,l_{s-1})$. En appliquant une dernière fois l'hypothèse de récurrence, on obtient $\mathbf{H}_r$.

2^e cas: $\beta=\delta=\emptyset$. On pose alors $\gamma=(k_1,\dots,k_r)$ et $\alpha=(n_1,\dots,n_t)$. On suppose, de puls, que $k_r\leqq n_t$.

$$\begin{aligned}\langle v_{\alpha\cdot\beta}, v_{\gamma\cdot\delta}\rangle &= \langle L_{k_1}\dots L_{k_r}L_{-n_t}\dots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle\\ &=\sum_{j=1}^{t}\Bigg[(k_r+l_j)\langle L_{k_1}\dots L_{k_{r-1}}L_{-n_t}\dots L_{-n_{j+1}}L_{-(n_j-k_r)}L_{-n_{j-1}}\dots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle\\ &\quad+\frac{k_r(k_r^2-1)}{12}\delta_{l_j-k_r}z\langle L_{k_1}\dots L_{k_{r-1}}L_{-n_t}\dots L_{-n_{j+1}}L_{-n_{j-1}}\dots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle\Bigg].\end{aligned}$$

Pour les termes tels que $l_j-k_r>0$, on applique le Lemme 2 puis l'hypothèse de récurrence, et c'est fini. Pour les autres – i.e. $j>i$ – on obtient

$$2k_r\sum_{j=i}^{t}\langle L_{k_1}\dots L_{k_{r-1}}L_{-n_t}\dots L_{-n_{j+1}}L_{-n_{j-1}}\dots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle(h+c(j,z)).$$

C'est-à-dire $Ah\langle L_{k_1}\dots L_{k_{r-1}}L_{-n_{t-1}}\dots L_{-n_1}v_\phi, v_\phi\rangle+o\left(h^{\frac{r(\alpha)+r(\gamma)}{2}}\right)$ avec $A>0$.

Et la récurrence se propage une fois de plus.

Dès lors la positivité est claire en décomposant sur la base formée par les $v_{\alpha\cdot\beta}$. Q.E.D.

II.2. Domaine d'étude; Premier point caractéristique

Construction du domaine d'étude:

Remarquons que $z(-6-m)=z(m)$ et $h^\varepsilon_{p,q}(-6-m)=h^\varepsilon_{p,q}(m)$, donc on se limite à $0\leqq z\leqq\frac{3}{2}$ pour $m\geqq 0$.

On a alors: $h^\varepsilon_{p,q}(m)-h^\varepsilon_{q,p}(m)=\dfrac{(m+3)(p^2-q^2)}{(m+2)(m+4)}$, i.e. $p>q\Leftrightarrow h^\varepsilon_{p,q}(m)>h^\varepsilon_{q,p}(m)$.

Pour $m>0$ définissons $M(m)$ tel que:

$$M^2=4+8(m+2)(m+4)h \quad\text{et}\quad M\geqq 0.$$

Remarquons que $M\geqq 2$, et que $M\geqq\sqrt{\dfrac{(m+2)(m+4)}{2}}$ si $\varepsilon=0$.

Soit D le domaine de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$\begin{cases}|(m+2)x-(m+4)y|\leqq M\\ (m+4)x-(m+2)y\geqq M\\ 0\leqq y\leqq x.\end{cases}$$

Propriété 1 [8].

(i) $h^{\varepsilon}_{p,q}(m) \geqq h \geqq h^{\varepsilon}_{q,p}(m) \Leftrightarrow (p,q) \in D$,

(ii) D contient un point de $\mathbf{N}^2$ avec $y > 0$.

Posons $p(h,z) = \operatorname{Min} p$ *et* $q(h,z) = \operatorname{Min} q$ *(respectivement pour* (λ, z)*) où les minima sont pris sur* $\{(p,q) \in D / p - q + 1 - 2\varepsilon \in 2\mathbf{N}\}$.

Alors $\exists p', q'$ *tels que* $(p,q') \in D$ *et* $(p',q) \in D$. *Et on a* $q \leqq q'$ *et* $p \leqq p'$,

$$\begin{aligned} \text{donc } * & p \geqq q' \geqq q \\ * & (m+2)p - (m+4)q \geqq (m+2)p - (m+4)q' \geqq -M, \\ * & (m+2)p - (m+4)q \leqq (m+2)p' - (m+4)q \leqq M, \\ * & (m+4)p - (m+2)q \geqq (m+4)p - (m+2)q' \geqq M. \end{aligned}$$

Et donc $(p,q) \in D$.

Définition 1. Si $p - q + 1 - 2\varepsilon \in 2\mathbf{N}$, on pose $P(h,z) = (p,q)$ (respectivement pour (λ, z)). Sinon, on peut remarquer que $(p+1, q)$ et $(p, q+1)$ sont dans D, car, en regardant le raisonnement précédent on s'aperçoit que $(p,y) \in D$ pour $q \leqq y \leqq q'$ (et, ici, $q' > q$), et que, de même, $(x,q) \in D$ pour $p \leqq x \leqq p'$ (et $p' > p$). On est alors amené à poser, dans ce dernier cas: $P(h,z) = (p+1, q)$ (respectivement pour (λ, z)).

Propriété 2. Si $(p_0, q_0) \in D$, avec $p_0 - q_0 + 1 - 2\varepsilon \in 2\mathbf{N}$, alors le produit $p_0 q_0$ est inferieur au produit des coordonnées du point $P(h,z)$ si et seulement si $P(h,z) = (p_0, q_0)$.

Démonstration. Posons $P(h,z) = (p,q)$ (ceci est une nouvelle notation et non pas une supposition) et $2n = pq$.

Si $(p(h,z),\ q(h,z)) = P(h,z)$, alors:

si $p_0 q_0 \leqq 2n$ et $p_0 \geqq q_0$ avec $(p_0, q_0) \neq (p,q)$ et $p_0 - q_0 + 1 - 2\varepsilon \in 2\mathbf{N}$, alors soit $p_0 < p$, soit $q_0 < q$. Donc $(p_0, q_0) \notin D$.

Si $P(h,z) = (p(h,z) + 1,\ q(h,z))$, alors:

Si p_0 et q_0 vérifient les mêmes hypothèses que précédemment, alors on a $p_0 < p$ ou $q_0 < q$. Dans ce dernier cas $(p_0, q_0) \notin D$. Dans le premier cas, si $p_0 < p - 1$ on a encore $(p_0, q_0) \notin D$; on étudie donc le cas où $p_0 = p - 1$ et $q_0 = q + 1$. On a $pq - p_0 q_0 = p(h,z) - q(h,z)$; donc il est nécessaire qu'il y ait égalité: $p(h,z) = q(h,z)$. Alors, en reportant dans les inégalités de définition de D

$$(m+2)p - (m+4)q \geqq -M; (m+4)p - (m+2)q \geqq M,$$

on obtient $p(h,z) = q(h,z) = \dfrac{M}{2}$. Mais alors $(m+2)p_0 - (m+4)q_0 = -M - (m+4) < -M$.

Et on a encore $(p_0, q_0) \notin D$ (le cas $q_0 > q + 1$ est exclus, car, dans ce cas, $p_0 q_0 > pq + p - q - 1 > pq$; en effet $p - q - 1 = p(h,z) - q(h,z) \geqq 0$).

Proposition 2 [8]. *Si* $P(h,z)$ *(respectivement* $P(\lambda, z)$*) est intérieur à* D*, alors la forme* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *prend des valeurs négatives sur* V.

Définition 2. Soit $r \geqq s$ des entiers naturels non nuls. Posons

$$\phi^{\varepsilon}_{r,s}(m) = \begin{cases} (h - h^{\varepsilon}_{r,s}(m))(h - h^{\varepsilon}_{s,r}(m)), & \text{si } r \neq s \\ h - h^{\varepsilon}_{r,s}(m), & \text{si } r = s. \end{cases}$$

De sorte que si $(r,s)\notin D$ et $r\neq s$, alors $\phi^{\varepsilon}_{r,s}(m)>0$. On a également:

$$\phi_{r,r}<0 \Leftrightarrow r>\frac{M}{2}.$$

Remarquons que si $r^2=pq$, alors $\phi_{r,r}\geqq 0$:

$(r+1,r-1)\notin D$, sinon ceci contredirait le fait que pq est minimal; donc, en tenant compte de:

$$\begin{cases}(m+2)(r+1)-(m+4)(r-1)=2m+6-2r\\(m+4)(r+1)-(m+2)(r-1)=2m+6+2r\end{cases}$$

et, en remarquant que $M<2r<M+2$ entraîne $2m+6+2r>M$ et $2m+6-2r>-M$, on obtient:

$2m+6-2r>M$ car $(r+1,r-1)\notin D$.

De plus $p\geqq r$ car $p\geqq q$ et $pq=r^2$. Or $p=r \Rightarrow q=r$, et alors $\phi_{r,r}=0$. Et si $p\geqq r+1$, $q\leqq r-1\,(pq=r^2)$. En reportant, on trouve:

$$\begin{aligned}(m+2)p-(m+4)q&\geqq(m+2)(r+1)-(m+4)q\\&\geqq(m+4)(r+1-q)-2(r+1)\\&\geqq 2(m+4)-2(r+1)\\&\geqq 2m+6-2r\\&>M.\end{aligned}$$

Et ceci est une contradiction.

III. Analyses locales; fin de la demonstration

III.1. Domaine de variation du paramètre réel m

Posons maintenant $P(h,z)=(p,q)$. On voit qu'il y a trois cas:

(A) $$(m+2)p-(m+4)q=M,$$

(B) $$(m+4)p-(m+2)q=M,$$

(C) $$(m+2)p-(m+4)q=-M \qquad (p\neq q).$$

Lemme 1 [8]. *Le cas* (C) *ne se produit pas.*

Désormais nous fixons (p,q). Dans le cas (A) [respectivement (B)], on aura $h=h^{\varepsilon}_{q,p}(m)$ [respectivement $h^{\varepsilon}_{p,q}(m)$].

Lemme 2 [8]. (i) *L'ensemble de tous les* $m\geqq 0$ *pour lesquels* $h=h^{\varepsilon}_{q,p}(m)$ *et* $z=z(m)$ *donnent le cas* (A) *est l'intervalle* $m>p+q-4$ $\left(\text{à condition d'exclure le cas non intéressant } q\geqq\frac{M}{2}\right)$.

(ii) *L'ensemble de tous les* $m\geqq 0$ *pour lesquels* $h=h^{\varepsilon}_{p,q}(m)$ *et* $z=z(m)$ *donnent le cas* (B) *est l'intervalle* $m>p+q-3$, *sauf si* $p=q=1$, *auquel cas c'est* $m\geqq 0$.

Remarque. Dans le cas (A), avec $\varepsilon=\frac{1}{2}$, si $q\geqq\frac{M}{2}$, la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prend des valeurs négatives sur V.

Démonstration. On a $\phi^{\varepsilon}_{q,q}<0$, et si r est tel que $2(r-1)<M\leqq 2r$, alors $r\leqq q$ et en raisonnant comme dans la Proposition 2 du II, on obtient $\det H^{\varepsilon}_{r^2}<0$.

Pour $0\leqq z<\frac{3}{2}$, m est une fonction analytique de z, et on peut écrire:

$$h^{\varepsilon}_{p,q}(m)=h^{\varepsilon}_{p,q}(z)=h(z) \quad \text{et de même pour le cas } h^{\varepsilon}_{q,p}.$$

Fixons z et considérons $H^{\varepsilon}_{n_1}(h,z)$ comme une fonction de h, au voisinage de $h(z)$. Ses valeurs propres sont les solutions d'une équation polynômiale à coefficients polynômiaux (donc analytiques réels). De plus ses valeurs propres sont réelles pour h réel, car $H^{\varepsilon}_{n_1}(h,z)$ est symétrique; on peut ainsi faire un développement de Puiseux des racines:

$$\alpha_i(h)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}(h-h(z))^{1/k}+\alpha_{i2}(h-h(z))^{2/k}+\dots \quad \text{pour } 1\leqq k\leqq P(n_1).$$

Mais alors α_{ij} est réel pour tout j:

$\alpha_i(h)$ est réel pour h réel; $h(z)$ est aussi réel.

Donc α_{i0} est réel; mais alors aussi

$$\alpha_{i1}=\lim_{h\to h(z)}\left[\frac{\alpha_i(h)-\alpha_{i0}}{(h-h(z))^{1/k}}\right].$$

Et ainsi de suite pour tout j.

Mais, en multipliant $h-h(z)$ par $e^{\sqrt{-1}\pi}=-1\in\mathbf{R}$, on obtient:

$$\alpha_{ij}\in\mathbf{R}, \qquad \alpha_{ij}e^{\sqrt{-1}\pi j/k}\in\mathbf{R}.$$

$$\text{Donc}\, j\notin k\mathbf{Z} \Rightarrow \alpha_{ij}=0.$$

On peut aussi prendre $k=1$ et:

Propriéte 1.

$$\alpha_i(h)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}(h-h(z))+\alpha_{i2}(h-h(z))^2+\dots.$$

Donc, cf. [8], dans un voisinage de $(h(m),z(m))$, on peut trouver une fonction analytique $v(h,z)$ à valeurs dans V_n telle que $v(h,z)$ soit de norme 1, soit vecteur propre pour $H^{\varepsilon}_n(h,z)$, et corresponde à la valeur propre 0 quand $h=h(m)$; $z=z(m)$, cf. [9].

De plus,

$$L_0v(h(m),z(m))=(h(m)+n)v(h(m),z(m)),$$
$$L_kv(h(m),z(m))=0 \quad \text{pour } k>0,$$
$$\text{car } \langle L_kv(h(m),z(m)),u\rangle=\langle v(h(m),z(m)),L_{-k}u\rangle=0\ \forall u\in V_{n-k}.$$

Or, $L_kv(h(m),z(m))\in V_{n-k}$ et $H^{\varepsilon}_{n-k}(h(m),z(m))$ est inversible (car $n-k<n$).

$$\text{Donc, } L_kv(h(m),z(m))\in V^{\perp}_{n-k}=\{0\}.$$

Il existe donc un homomorphisme de v_{ε}-modules

$$\phi: V^{h(m)+n,\,z(m)}\to V^{h(m),\,z(m)}$$

transportant $v_{\phi}^{h(m)+n,\,z(m)}$ sur $v(h(m),z(m))$.

Grâce à ce vecteur, on va pouvoir étudier la structure de la forme hermitienne contravariante quand m tend vers l'infini.

Définition 1. Pour $n_1 < n'$ ou $m \neq m'$, posons $U_{n_1} = U_{n_1}(m)$ l'espace des vecteurs propres pour 0 dans V_{n_1}.

Pour (h, z) voisin de $(h(m'), z(m'))$, on pose:

$$U_{n_1}(h,z) = \{L_{-n_t} \dots L_{-n_1} F_{-l_s} \dots F_{-l_1} v(h,z) / \Sigma k_i + \Sigma l_j = n' - n\}.$$

On définit alors $U_{n'}(m) = U_{n'}(h(m), z(m))$. Les deux définitions coïncidant quand elles s'appliquent toutes les deux cf. [8]. Alors, $U_{n_1}(m)$ est défini et est une fonction analytique de m: Il existe $\{v_1(m), \dots, v_{P(n_1)}(m)\}$ tel que $v_i(m)$ soit analytique en m, et $\{v_1(m), \dots, v_{\dim U_{n_1}(m)}\}$ soit une base de $U_{n_1}(m)$.).

Soit W_{n_1} son orthogonal par rapport à la forme $\{\cdot, \cdot\}$.

III.2. Deuxième point caractéristique du problème

On va, maintenant, chercher à définir un deuxième point caractéristique du problème. Ce point va correspondre au deuxième point minimal pour la fonction produit sur la frontière de D, avec la bonne parité.

Si on regarde les droites $x - y = p - q + 2k$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et leurs intersections avec D, on se rend compte que les points minimaux correspondent (si cette intersection existe) à $k = -1$ dans le cas (A), et à $k = 1$ dans le cas (B). Malheureusement, cette intersection n'existe pas toujours dans le cas (A), comme le montre un petit calcul. Aussi, dans ce cas, il faut distinguer deux sous-cas, correspondant, respectivement, à:

Cas (A1): $p - q \geqq 3$ ou $p - q = 2$, avec m non entier.

Cas (A2): $p - q = 1$ ou $p - q = 2$, avec m entier.

Remarque. Le cas m entier ne nous intéressera pas, puisque c'est justement ce que l'on veut démontrer.

Dans le cas (A1), l'intersection des 2 droites $(m+4)x - (m+2)y = M$ et $x - y = p - q - 2$ est un point $(x(m), y(m))$ avec $p' - 1 < x(m) \leqq p'$ pour un certain $p' \geqq p - 1$. Si $x(m) = p'$, alors $y(m) = q' = p' - p + q + 2$, et $m = p' + q - 2$.

Dans le cas (A2) ou (B), l'intersection des 2 droites $(m+2)x - (m+4)y = M$ et $x - y = p - q + 2$ est un point $(x(m), y(m))$ avec $p' - 1 < x(m) \leqq p'$ pour un certain $p' \geqq p$. Si $x(m) = p'$, alors $y(m) = q' = p' - p + q - 2$, et:

Dans le cas (A2): $m = p' - p - 4$.

Dans le cas (B): $m = p + q' - 2$.

Et on a donc $m \in \mathbf{Z}$.

Remarque. En plus, dans le cas (A2), on a aussi

$$(m+2)p - (m+4)q = M,$$
$$(m+2)(p-q) = M + 2q,$$
$$m + 2 = M + 2q.$$

Définition – Propriété 2. $*$ si $p' - 1 < x(m) < p'$ et si (p_1, q_1) est sur la frontière de D avec la bonne parité, et si $p_1 q_1 \leqq p'q'$, alors $(p_1, q_1) = (p, q)$.

$*$ si $x(m) = p'$ et (p_1, q_1) comme ci-dessus, alors (p_1, q_1) est soit (p, q), soit (p', q').

Démonstration.

Cas (A1):

On écrit $p_1 - q_1 = p' - q' + 2k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Si $k \leqq 0$, alors

$$\begin{aligned}(m+4)p_1-(m+2)q_1 &= (m+2)(p_1-q_1)+2p_1\\ &\leqq (m+2)(x(m)-y(m))+2p_1\\ &\leqq M+2(p_1-x(m)).\end{aligned}$$

Donc $p_1 \geqq x(m)$, soit $p_1 \geqq p'$. On a aussi $q_1=q'+(p_1-p')-2k$; et donc le seul cas possible d'égalité est: $(p_1,q_1)=(p',q')$.

Si $k=1$, on a $p-q=p_1-q_1$. Et de

$$\begin{cases}(m+2)p_1-(m+4)q_1=M & \text{ou}\\ (m+2)p_1-(m+4)q_1=-M & \text{ou}\\ (m+4)p_1-(m+2)q_1=M,\end{cases}$$

on tire:

$$(p_1,q_1)=\begin{cases}(p,q)\\ (p+M,q+M).\\ (-q,-p)\end{cases}$$

Le troisième cas est clairement impossible; quant au premier, il est admis dans le lemme. Reste le second:

$$(m+4)(p+M-2)-(m+2)(q+M)=M+2(m+3)(p-q-1)-2 \geqq M.$$

Donc $p' \leqq p+M-2$, soit $q' \leqq q+M$, d'où la contradiction sur le produit p_1q_1.

Si $k>1$, remarquons

$$\begin{aligned}(m+2)(x(m)-y(m))+2x(m) &= (m+2)(p-q)-2q,\\ m+2 &= x(m)+q.\end{aligned}$$

Soit alors $x'=x(m)+2k$,

$$\begin{aligned}(m+2)x'-(m+4)y(m) &= M-2x(m)-2y(m)+2k(m+2)\\ &\geqq M+2(2(m+2)-x(m)-y(m))\\ &\geqq M+2(x(m)-y(m)+2q)\\ &\geqq M+2(p+q-2)>M.\end{aligned}$$

Donc $p_1 \geqq x'$ et $q_1 \geqq y$; soit $q_1 \geqq q'$ et $p_1>p'$. Contradiction.

Cas (A2):

Ce cas est trivial, car, en écrivant $p_1-q_1=p-q+2k$, on a:

Si $k<-1$, la droite $x-y=p_1-q_1$ ne rencontre pas D.

Si $k=-1$, on a encore:

$$(p_1,q_1)=\begin{cases}(p,q)\\ (p+M,q+M)\\ (-q,-p).\end{cases}$$

Encore une fois, seul le deuxième cas pose problème, et on a:

$$(m+2)(p+M-2)-(m+4)(q+M)=-M-2(m+2)<M.$$

On conclut encore que $p' \leqq p+M-2$, et $q' \leqq q+M$;

Si $k \geqq 0$,

$$(m+2)p_1-(m+4)q_1 \geqq M+2(x(m)-p_1),$$

d'où $p_1 \geqq p'$. Contradiction.

Cas (B):

On procède de même.

Si $k \geqq 0$,

$$(m+2)p_1-(m+4)q_1 = M+2(y(m)-q_1)+2k(m+2).$$

On retrouve comme seule possibilité $(p_1, q_1)=(p', q')$.

Si $k=-1$, en écrivant de même les équations de la frontière de D, on obtient comme possibilités:

$$(p_1, q_1)=\begin{cases}(-q,-p)\\(M-q, M-p)\\(p,q).\end{cases}$$

Seul le deuxième cas pose problème:

$$(m+2)(M-q)-(m+4)(M-p-2)=-M+2(m+4).$$

Si $p \neq q$, alors $M=(m+4)(p-q)+2q>m+4$; et donc $p' \leqq M-q$, soit $q'<M-p$, et on a une contradiction sur le produit p_1q_1.

Si, au contraire, $p=q$ le seul point commun entre la droite $x=y$ et D est (p, q), donc le problème est clair [en fait, $p=q=p_1=q_1=M/2$].

Si $k<-1$, on a encore $m+4=x(m)+q$ et

$$(m+4)x(m)-(m+2)(y(m)-2k) \leqq M-(p-q+2).$$

Soit $p_1 \leqq p'$ et $q_1>q'$. Q.E.D.

Il nous faut établir la Proposition suivante:

Proposition 3. *Si le cas* (A) *ou* (B) *se produit, et que* $p'-1<x(m)<p'$, *alors la forme* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *prend des valeurs négatives sur* V.

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde.

Remarque. On peut fixer p, q, p' et laisser m paramétrer la courbe $z=z(m)$; $h=h^{\varepsilon}_{p,q}(m)$ (B) ou $h=h^{\varepsilon}_{p,q}(m)$ (A).

III.3. Analyse locale de la forme hermitienne contravariante

L'étude se conduit assez simplement, mais demande un peu de technique. Tout d'abord, il s'agit d'étudier l'homomorphisme mis à jour au Paragraphe 1.

Lemme 3. $\det H^{h(m')+n,\, z(m')}_{n'-n} \neq 0$.

Démonstration. On doit prouver que $h(m')+n \neq h_{p_1,q_1}$ pour $p_1q_1 \leqq 2(n'-n)$, i.e.: Dans le cas (A):

$$[(m'+2)p-(m'+4)q]^2+8(m'+2)(m'+4)\frac{pq}{2} \neq [(m'+4)p_1-(m'+2)q_1]^2.$$

Dans le cas (B):

$$[(m'+4)p-(m'+2)q]^2+8(m'+2)(m'+4)\frac{pq}{2}\neq[(m'+2)p_1-(m'+4)q_1]^2.$$

Et, ceci est équivalent à:

$$\begin{cases}(m'+2)p+(m'+4)q\neq\pm[(m'+4)p_1-(m'+2)q_1]\text{ (A)} & \text{ou}\\(m'+4)p+(m'+2)q\neq\pm[(m'+2)p_1-(m'+4)q_1]\text{ (B)}.\end{cases}$$

$m'+2$ et $m'+4$ sont premiers entre eux si m' est impair ($m'\in\mathbf{N}$); et, sinon, $\frac{m'+2}{2}$ et $\frac{m'+4}{2}$ le sont.

Raisonnons par l'absurde: Dans le cas contraire,

$$\exists k\in\mathbf{Z}\text{ tel que }\begin{cases}p\pm q_1=k(m'+4)\text{ et }\pm p_1-q=k(m'+2)\text{ (A)} & \text{ou}\\p\pm p_1=k(m'+2)\text{ et }\pm q_1-q=k(m'+4)\text{ (B)}.\end{cases}$$

Ecrivons $p_1q_1\leqq 2(n'-n)=p'q'-pq$ sous la forme:

$$\begin{aligned}p_1q_1+pq&=(p\pm p_1)(\pm q_1-q)+(p\pm p_1)q-(\pm q_1-q)p\\&=(p\pm q_1)(\pm p_1-q)+(p\pm q_1)q-(\pm p_1-q)p\\&=k^2(m'+2)(m'+4)+k(m'+a)q-k(m'+6-a)p\ \begin{cases}a=4 & \text{si (A)}\\a=2 & \text{si (B)}\end{cases}\\&\leqq p'q'=[(m'+6-a)-q][(m'+a)-p].\end{aligned}$$

Soit:

$$(1-k^2)(m'+2)(m'+4)-(q+kq)(m'+a)-(p-kp)(m'+6-a)+pq\geqq 0$$

$$[(1-k)(m'+6-a)-q][(1+k)(m'+a)-p]\geqq 0$$

$$\text{Or,}\begin{cases}m'+6-a=\begin{cases}p'+q\\M+2q\text{ (A2)}\end{cases}. & >q\\[2ex] m'+a=\begin{cases}p+q'\\M+2p\text{ (A2)}\end{cases} & >p.\end{cases}$$

Si $k\neq\pm1$ le signe du produit est donc celui de $(1-k^2)(m'+2)(m'+4)$. Et donc, nécessairement, $k=0$.

Si $k=\pm1$ le produit est clairement négatif.

Mais si $k=0$, alors

$$\begin{cases}p\pm q_1=0 & \text{et} \quad q=\pm p_1\text{ (A)} \quad \text{ou}\\p\pm p_1=0 & \text{et} \quad q=\pm q_1\text{ (B)}.\end{cases}$$

Et ceci est évidemment une contradiction. Q.E.D.

On voit facilement (cf. [8]) que $J_{n_1}(m)$, restriction de $H_{n_1}(m)$ à W_{n_1}, est non-singulière sauf peut-être si $n=n'$ et $m=m'$. L'opérateur J_{n_1} étant continu, et même analytique, notre supposition implique alors que J_{n_1} est positive (en tant que forme) pour tout m, si $n_1<n'$. Il s'agit, maintenant, de l'étudier au point critique:

Lemme 4 [8]. *Au voisinage de* $(h(m'), z(m'))$, *on a:*

$$\alpha(h,z)=a(h,z)\cdot(k-h(z)) \text{ avec } 0<A\leqq|a(h,z)|\leqq 1/A$$

si: A est une constante,

$H_n(h,z)\cdot v(h,z)=\alpha(h,z)\cdot v(h,z)$ cf. III.1,

$h(z)=h^{\varepsilon}_{p,q}(m)$ ou $h^{\varepsilon}_{q,p}(m)$, si $z=z(m)$.

Lemme 5 [8]. *Soit* $K_{n'}(h,z)$ *la restriction de* $H_{n'}(h,z)$ *à* $U_{n'}(h,z)$.
Dans un voisinage de $(h(m'), z(m'))$, *on a:*

$$\det K_{n'}(h,z)=k(h,z)\cdot\alpha(h,z)^{P(n'-n)}$$

et, il existe une constante K telle que: $0<K\leqq|k(h,z)|\leqq 1/K$.

On en déduit la propriété fondamentale suivante:

Propriété 3 [8]. Au voisinage de m', il existe $D\in\mathbf{R}$

$$\text{tel que } \det J_{n'}(m)=d(m)\cdot(m-m') \text{ avec } 0<D\leqq|d(m)|\leqq 1/D.$$

Ainsi, on obtient que pour $m'>m$, la forme prend des valeurs négatives car $\det J_{n'}(m)$ change de signe en m'.

Corollaire 1 [8]. (a) *si* $x(m)>p'-1$, $x(m)\neq p'$ *et* $n_1\leqq n'=\frac{1}{2}p'q'$, alors la dimension de l'espace des vecteurs nuls dans V_{n_1} est $P(n_1-n)$.

(b) *si* $x(m)=p'$ *et* $n_1<n'$, cette dimension est encore $P(n_1-n)$, mais si $n_1=n'$ c'est $P(n_1-n)+1$.

III.4. Etude locale à l'infini

La conclusion de cette étude est donc:

La supposition que $H_{n_1}(h(m), z(m))$ est non-négative pour un m donné $(p'-1<x(m)<p')$ a amené la conclusion que $J_{n_1}(m)$ est positive pour des m grands, si $n_1<n'$, mais que $J_{n'}(m)$ a au moins une valeur propre négative pour m grand. Nous montrons maintenant, pour conclure, que ceci est impossible en étudiant ce qui se passe à la limite (i.e. $z\to 3/2$).

Quand m tend vers l'infini, $(h^{\varepsilon}_{p,q}(m), z(m))$ tend vers le point $\left(\frac{(p-q)^2}{8}, 3/2\right)$ si $\varepsilon=1/2$, et $(\lambda(m), z(m))$ tend vers $\left(\pm\frac{p-q}{\sqrt{8}}, 3/2\right)$ sinon. On désignera le point limite par un indice 0 (e.g. (h_0, z_0)).

Si $p\neq q$, on peut paramétrer la courbe par $\mu=\frac{1}{m}$; sinon, on peut prendre $\mu=3/2-z$. Dès lors les matrices $H_{n_1}(\mu)=H_{n_1}(m)=H_{n_1}(h(m), z(m))$ sont des fonctions analytiques du paramètre μ, et les valeurs propres de $H_{n_1}(\mu)$ sont alors données par des séries entières:

$$\alpha_i=\alpha_i(\mu)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}\mu+\dots.$$

Nous définissons $V^{(n_1)}_{0,k}$ comme étant l'espace des valeurs en $\mu=0$ des f germes de fonctions holomorphes au voisinage de 0, à valeurs dans V_{n_1}, et telles qu'il existe g germe en 0 de fonction holomorphe à valeurs dans V_{n_1} et:

$$H_{n_1}(\mu)\,f(\mu)=\mu^k g(\mu).$$

Lemme 6 [9]. *Il existe $P(\mu)$ et $Q(\mu)$, deux matrices analytiques telles que:*

Leur déterminant commun est constant, égal à 1.

La matrice $P(\mu)H_{n_1}(\mu)Q(\mu)$ est diagonale (et on peut même faire en sorte que les coefficients diagonaux soient ordonnés par ordres en $\mu=0$ décroissants).

Lemme 7 [9]. *Si on note $d_k^{(n_1)}=\mathrm{Dim}(V_{0,k}^{(n_1)})$, alors:*

$$\sum_{k\geqq 1} d_k^{(n_1)}=ord_0 \det H_{n_1}(\mu).$$

III.5. Conclusion. Le théorème FQS

Définition 3. Si f et g sont deux germes, en 0, de fonctions à valeurs dans V_{n_1}, telles que $H_{n_1}(\mu)f(\mu)$ est d'ordre au moins k, en 0 (respectivement pour g), on pose:

$$\langle f,g\rangle_k(\mu)=\mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)f(\mu),g(\mu)\}.$$

Si $v,w\in V_{0,k}^{(n_1)}$, avec $v=f(0)$ et $w=g(0)$, on pose:

$$\langle v,w\rangle_k=\lim_{\mu\to 0}\mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)f(\mu),g(\mu)\}.$$

La définition est licite car, si $f(0)=h(0)$, alors $(f-h)(0)=0$. Et alors, en s'intéressant au cas à $(f-h)(\mu)=\mu f_1(\mu)$, on obtient:

$$\begin{aligned} H_{n_1}(\mu)g(\mu)&=\mu^k g_1(\mu),\\ \mu^{-k}\{H_{n_1}(\mu)(f-h)(\mu),g(\mu)\}&=\mu^{-k+1}\{f_1(\mu),\mu^k g_1(\mu)\}\\ &=\mu\{f_1(\mu),g_1(\mu)\}.\end{aligned}$$

On peut également remarquer que le calcul précédent prouve que $V_{0,k+1}^{(n_1)}$ et $V_{0,k}^{(n_1)}$ sont orthogonaux par rapport à la forme $\langle\,,\cdot\,,\rangle_k$; et donc, celle-ci induit une forme bilinéaire symétrique sur le quotient $V_{0,k}^{(n_1)}/V_{0,k+1}^{(n_1)}$, notée similairement.

Propriété 4 [9]. La forme $\langle\,,\cdot\,,\rangle_k$ est non-dégénérée sur $V_{0,k}^{(n_1)}$, $k\geqq 0$.

Posons

$$\begin{aligned} V^k&=\bigoplus_{n_1} V_{0,k}^{(n_1)},\\ X^k&=V^k/V^{k+1}=\bigoplus_{n_1} V_{0,k}^{(n_1)}/V_{0,k+1}^{(n_1)}.\end{aligned}$$

On étend la forme bilinéaire que l'on avait pour chaque n_1, à tout l'espace, en décrétant que les $V_{0,k}^{(n_1)}$ sont orthogonaux deux à deux, pour des n_1 distincts.

Il est alors clair que $H_{n_1}(\mu)$ est non-négative pour de petits μ, si et seulement is les formes $\langle\,,\cdot\,,\rangle_k$ sont toutes positives.

Corollaire 2 [8]. (a) *Les espaces V^k sont invariants par $\pi=\pi^{h_0,z_0}$, et donc v_ε opère sur X^k.*

(b) *La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ sur X^k, vérifie:*

$$\begin{cases}\langle L_m x,y\rangle_k=\langle x,L_{-m}y\rangle_k & m\in\mathbf{Z}\\ \langle F_n x,y\rangle_k=\langle x,F_{-n}y\rangle_k & n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Pour $h\geqq 0$, la représentation $\pi^{h,3/2}$ sur $V^{h,3/2}$, a un unique quotient irréductible $\varrho^{h,3/2}$, sur $X^{h,3/2}$, sur lequel on a une forme hermitienne qui fait de $\varrho^{h,3/2}$ une représentation unitaire, dans le sens que:

$$\varrho^{h,3/2}(L_m)^* = \varrho^{h,3/2}(L_{-m}) \quad \text{et} \quad \varrho^{h,3/2}(F_n)^* = \varrho^{h,3/2}(F_{-n}).$$

Une telle forme est unique, à multiplication par un scalaire près.

Prenons, en particulier, $h = \frac{r^2}{8}$, $r \in \mathbf{Z}$ (avec $r = p - q$).

Alors, $h = h^{1/2}_{p_2, q_2}(0)$ si et seulement si $r^2 = (p_2 - q_2)^2$.

De même, si $\lambda = \pm \frac{r}{\sqrt{8}}$, $r \in \mathbf{N}$, alors $h = h^0_{p_2, q_2}(0)$ si et seulement si $r^2 = (p_2 - q_2)^2$.

En particulier $h = h^{\varepsilon}_{r+1,1}(0)$. Donc $r+1$ est le plus petit entier pour lequel H_n est dégénérée et comme, de plus, l'espace propre associé à 0 est de dimension 1, V^1 s'envoie dans un quotient de $V^{h+r+1,3/2}$. En continuant, on obtient:

Propriété 5 [8]. $V^{h,3/2}$ admet une filtration de sous-modules $V^{h,3/2}(k)$, $k \geqq 0$, telle que:

$$V^{h,3/2} = V^{h,3/2}(0) \supsetneqq V^{h,3/2}(1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq V^{h,3/2}(k) \supsetneqq \ldots,$$

la représentation sur le quotient $V^{h,3/2}(k)/V^{h,3/2}(k+1)$ est $\varrho^{h(k),3/2}$.

En posant: $h(k) = (r+2k)^2/8$ si $\varepsilon = 1/2$, et $\lambda(k) = \pm(r+2k)/\sqrt{8}$ sinon.

En conclusion, X^k est une somme directe de sous-espaces irréductibles et invariants X^k_j, et la restriction de $\langle\,,\cdot\,,\rangle_k$ à X^k_j est soit positive, soit négative. L'hypothèse que nous essayons de contredire implique, alors, que la forme est positive si X^k_j contient des vecteurs de poids $h + n_1$, $n_1 < n'$, et qu'il existe j et k tels que, sur X^k_j, la forme est négative et contient un vecteur de poids $h + n'$.

Le Lemme suivant assure donc la contradiction:

Lemme 8. *L'équation* $\frac{r^2}{8} + n' = \frac{(r+2l)^2}{8}$ *n'a pas de solutions dans* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. On peut réécrire l'équation sous la forme: $2n' = l(l+r)$.

Or $2n' = p'q'$ et $r = p - q$, donc:

$$\begin{aligned}(p'+l)(q'-l) &= p'q' - l^2 + l(q'-p') \\ &= p'q' - l^2 + l(q-p) \pm 2l \\ &= \pm 2l.\end{aligned}$$

Or $p' + l > l$, donc la seule solution est:

$$p' = l \quad \text{et} \quad q' - l = \begin{cases} 1 & (\text{A}1) \\ -1 & (\text{A}2) \quad \text{ou (B)}. \end{cases}$$

Dans le cas (A1), on obtient $p' - q' = -1$, et ceci est une contradiction.

Dans les cas (A2) ou (B), on obtient $p - q = p' - q' - 2 = -1$, et on a encore une contradiction. Q.E.D.

Ceci achève la démonstration du Théorème.

Remerciements. Je tiens en tout premier lieu à remercier R. P. Langlands sans qui cet article n'aurait pas vu le jour, et qui a bien voulu consacrer de son temps à m'expliquer son propre article. Je remercie également J. P. Labesse pour son aide.

Bibliographie

1. Belavin, A., Polyakov, A., Zamolodchikov, A.B.: Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions. J. Stat. Phys. **34**, 763–774 (1984)
2. Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S.: Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents. In: Vertex operators in mathematics and physics M.S.R.I. Pub. **3**, 419–450 (1985)
3. Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S.: Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model. Phys. Lett. **151**B, 37–43 (1985)
4. Jantzen, J.C.: Moduln mit einem höchsten Gewicht. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 750. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979
5. Kac, V.G.: Lie superalgebras. Adv. Math. **26**, 8–96 (1977)
6. Kac, V.G.: Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras, Lecture Notes in Physics, Vol. 94, pp. 441–445. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1979
7. Kac, V.G., Wakimoto, M.: Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwartz and Ramond algebras. In: Proceedings of the symposium on conformal groups and structures, Clausthal (1985)
8. Langlands, R.P.: Infinite dimensional Lie algebras and their applications. Kass, S. (ed.). Singapore: World Scientific 1988
9. Rocha-caridi, A.: Invent. Math. **72**, 57–75 (1983)
10. Rocha-caridi, A.: Vacuum vector representations of the Virasoro algebra, M.S.R.I. Pub. **3**, 451–473 (1985)
11. Shapovalov, N.N.: On a bilinear form on the universal enveloping algebra of a complex semi-simple Lie algebra. Funct. Anal. Appl. **6**, 307–312 (1972)

Communicated by H. Araki

Received July 1, 1988