

# Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III.

Von  
H. Weyl in Zürich.

## Kapitel IV. Darstellung aller halb-einfachen Gruppen.

### § 1.

#### Das einzelne Element der Gruppe.

$\alpha^0$  bedeute eine infinitesimale halb-einfache Gruppe von  $r$  Parametern,  $\alpha_u^0$  diejenige infinitesimale Gruppe, welche aus ihr durch die am Schluß des vorigen Kapitels gekennzeichnete „unitäre Beschränkung“ hervorgeht. Die zu ihren Elementen  $a$  adjungierten infinitesimalen linearen Transformationen  $dx = [ax]$  erzeugen eine kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen  $\tilde{a}$ , bzw.  $\tilde{a}_u$ . Da zu  $\tilde{a}_u$  nach Kapitel III, Satz 6 eine invariante definite quadratische Form gehört, ist  $\tilde{a}_u$  ein *geschlossenes Gebilde*. Das infinitesimale Element  $\tilde{h} = \tilde{h}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  der adjungierten Gruppe erteilt dem willkürlichen Element

$$x = \tilde{h}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) + \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} e_{\alpha}$$

von  $\alpha^0$  mit den „Hauptparametern“  $\kappa_i$  und den „Nebenparametern“  $\tau_{\alpha}$  den Zuwachs  $dx = [hx]$ , der sich aus den Formeln ergibt:

$$d\kappa_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad d\tau_{\alpha} = \alpha \cdot \tau_{\alpha}.$$

Die daraus durch Iteration entstehende endliche Transformation  $(\varepsilon)$  von  $\tilde{a}$ :

$$(1) \quad x' = (\varepsilon) x (\varepsilon)^{-1},$$

die man zweckmäßig durch  $e^{\lambda}$  bezeichnet, lautet daher, in den Parametern ausgedrückt:

$$(2) \quad \kappa'_i = \kappa_i, \quad \tau'_\alpha = e^{\alpha} \cdot \tau_{\alpha}.$$

Die „Hauptelemente“  $(\varepsilon)$  bilden eine  $n$ -parametrische Abelsche Untergruppe in  $\tilde{a}$ . Gehört  $(\varepsilon)$  zu  $\tilde{a}_u$ , so sind die  $\lambda_i$  rein imaginär; wir schreiben dann  $\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\varphi_i$  und  $2\pi\sqrt{-1}\alpha$  an Stelle von  $\alpha$ . Es gilt:

Satz 1. Jedes Element  $t$  von  $\tilde{a}_u$  läßt sich in die Form bringen

$$(3) \quad t = u^{-1}(\varepsilon)u,$$

wo  $u$  sowohl wie das Hauptelement  $(\varepsilon)$  gleichfalls zu  $\tilde{a}_u$  gehören.

In den in Kapitel I und II behandelten Sonderfällen traf dieser Satz mit bekannten algebraischen Tatsachen zusammen. Hier soll er allgemein mittels der Kontinuitätsmethode durch die gleichen Rechnungen begründet werden, die uns früher zur Volumbestimmung dienten.

Man gehe nämlich von einem in der Form (3) dargestellten Element  $t$  zu dem endlich benachbarten  $t + dt$  über und suche  $(\varepsilon)$  und  $u$  dabei so zu variieren, daß die Gleichung (3) bestehen bleibt. Die Abweichung des infinitesimalen Elementes  $(t + dt)t^{-1}$  von der Identität werde mit  $\delta t$  bezeichnet, ebenso sei  $du \cdot u^{-1} = \delta u$  gesetzt. Die in Kapitel I, § 6 eingeführten Begriffe werden sinngemäß übertragen. Wir finden analog zu der dort aufgestellten Gleichung (25):

$$(4) \quad u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = h(2\pi i d\varphi_1, \dots, 2\pi i d\varphi_n) + \{(\varepsilon)\delta u(\varepsilon)^{-1} - \delta u\}.$$

Sind  $\delta u_\alpha$  die Nebenparameter von  $\delta u$ , so sind die Haupt- und Nebenparameter von  $u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$  also

$$(5) \quad 2\pi\sqrt{-1}d\varphi_i, \quad \text{bzw.} \quad (e(\alpha) - 1)\delta u_\alpha.$$

Bei gegebenem Zuwachs  $dt$  bestimmen sich daraus eindeutig 1. die Änderungen der „Drehwinkel“  $\varphi_i$  von  $t$  oder die Änderung von  $(\varepsilon)$ , und 2.  $\delta u$  und damit die Variationen der Parameter von  $u$ , wenn wir die Hauptparameter von  $\delta u$  gleich 0 nehmen, d. h. festsetzen, daß der Übergang von  $u$  zu  $u + du$  „senkrecht“ zur „Geraden“  $[u]$  erfolgen soll. Nur muß vorausgesetzt werden, daß  $(\varepsilon)$  nicht *singulär* ist, daß nämlich  $e(\alpha)$  für keine der Wurzeln  $\alpha$  gleich 1, keiner der  $r - n$  Wurzelwinkel  $\alpha$  eine Voll-drehung ist.

Es durchlaufe  $u$  die ganze Mannigfaltigkeit  $\tilde{a}_u$ , bzw. die durch „Projektion“ daraus entstehende Mannigfaltigkeit  $[\tilde{a}_u]$  von  $n$  Dimensionen weniger, deren Elemente die „Geraden“ von  $\tilde{a}_u$  sind,  $(\varepsilon)$  aber alle nicht-singulären Hauptelemente von  $\tilde{a}_u$ . Unter diesen Umständen beschreibt  $t = u^{-1}(\varepsilon)u$  ein Gebiet  $\mathfrak{X}$  auf  $\tilde{a}_u$ . Denn gemäß unserer Rechnung, welche lehrt, daß die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, gehört mit  $t$  stets auch eine ganze Umgebung von  $t$  dem Bereiche  $\mathfrak{X}$  an. Wegen der Geschlossenheit des Gebildes  $\tilde{a}_u$ , auf welchem  $u$  und  $(\varepsilon)$  variieren, ist jedes

Randelement  $t_0$  von  $\mathfrak{X}$  gleichfalls in der Form (3) darstellbar, aber hier wird nun wenigstens eines der  $e(\alpha)$  gleich 1. Die *singulären Elemente*  $t$ , die man aus (3) erhält, wenn  $u$  ganz  $\tilde{a}_u$  durchläuft, ( $\varepsilon$ ) hingegen nur diejenigen Hauptelemente, für welche einer der Wurzelwinkel  $\alpha = 0$  ist, bilden ein Kontinuum  $t$ . Wir haben erkannt, daß  $\mathfrak{X}$  eines der durch  $t$  auf  $\tilde{a}_u$  bestimmten Gebiete ist. Der Beweis von Satz 1 wird zu Ende geführt durch die Erkenntnis, daß das Kontinuum  $t$  *drei* Dimensionen weniger hat als  $\tilde{a}_u$  und folglich  $\tilde{a}_u$  durch  $t$  nicht zerlegt wird.

Ist ( $\varepsilon$ ) ein singuläres Hauptelement, für welches die Wurzel  $\alpha = 0$  ist, so kann man, ohne  $t$  zu ändern,  $u$  in (3) ersetzen durch irgendein Element von der Gestalt  $s \cdot u$ , wo  $s$  die  $(n+2)$ -parametrische Gruppe  $\mathfrak{g}$  durchläuft, deren infinitesimale Elemente sich linear aus den Hauptelementen  $h$  und  $e_\alpha, e_{-\alpha}$  zusammensetzen. Denn für ein infinitesimales Element  $s^0$  von  $\mathfrak{g}$  stimmt  $(\varepsilon)s^0(\varepsilon)^{-1}$  nach den Gleichungen (2) mit  $s^0$  überein; und die Vertauschbarkeit mit ( $\varepsilon$ ) überträgt sich von den infinitesimalen auf alle Elemente der Gruppe  $\mathfrak{g}$ . Die zu einem festen singulären ( $\varepsilon$ ) gehörigen Elemente von der Form  $u^{-1}(\varepsilon)u$  bilden also nur eine  $(r-n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die singulären Hauptelemente selber eine  $(n-1)$ -dimensionale.

Nach (3) sind die  $r-n$  Größen  $e(\alpha)$  samt der  $n$ -fach zu rechnenden Zahl 1 die charakteristischen Wurzeln, die Multiplikatoren der linearen Transformation  $t$  von  $\tilde{a}_u$  (oder  $\tilde{a}$ ); die  $e(\alpha)$  sind also bis auf die Reihenfolge eindeutig durch  $t$  bestimmt.

Will man die analogen Überlegungen für die ganze Gruppe  $\tilde{a}$ , nicht die unitär beschränkte  $\tilde{a}_u$  durchführen, so muß man diejenigen Transformationen  $t$  als singuläre ausnehmen, die nicht bloß  $n$ , sondern  $n+1$  Multiplikatoren  $= 1$  besitzen. Sie bilden ein Kontinuum  $t$  von 1 *komplexen* Dimension weniger als  $\tilde{a}$ . Da infolgedessen  $\tilde{a}$  durch  $t$  nicht zerlegt wird und die Randpunkte des analog wie oben definierten Gebietes  $\mathfrak{X}$  sicher zu  $t$  gehören, ergibt sich auch hier das Resultat, das jedes nicht-singuläre Element  $t$  von  $\tilde{a}$  sich mit Hilfe eines Elementes  $u$  und eines Hauptelementes ( $\varepsilon$ ) von  $\tilde{a}$  in der Form (3) schreiben läßt. Auf die zu  $t$  gehörigen singulären Elemente überträgt sich diese Darstellungsweise aber nicht, denn sonst hätte  $t$  nicht 1, sondern 3 komplexe Dimensionen weniger als  $\tilde{a}$ ; hier treten ähnliche Komplikationen auf, wie sie die Elementarteilerttheorie kennen lehrt.

Der Aufbau einer halb-einfachen Gruppe in § 1 des vorigen Kapitels ging davon aus, daß ein beliebiges nicht-singuläres (infinitesimales) Element zum Hauptelement ernannt wurde. Wir verstehen jetzt, warum die Resultate davon unabhängig sind, auf welches nicht-singuläre Element  $t_0$  unsere Wahl dabei fiel. Denn da man  $t_0$  stets aus einem Hauptelement durch

Transformation mittels eines gewissen zu  $\tilde{a}$  gehörigen  $u$  gewinnen kann, kommt die Abänderung jener Wahl darauf hinaus, daß alle Elemente der Gruppe mittels des festen  $u$  transformiert, die Elemente  $x$  der infinitesimalen Gruppe  $\alpha^0$  dem Automorphismus  $x' = u^{-1} x u$  unterworfen werden.

## § 2.

**Analysis situs. Volumbestimmung. Volle Reduzibilität.**

Im vorigen Paragraphen legten wir, obschon es sich um reine Strukturfragen handelte, die adjungierte Gruppe der Betrachtung zugrunde, damit die Gruppe auch hinsichtlich ihrer Zusammenhangsverhältnisse genau festgelegt war.  $\tilde{a}_u$  ist nicht notwendig einfach zusammenhängend, ich behaupte aber:

**Satz 2.** *Ein gewisses endlichblättriges Überlagerungsgebilde über  $\tilde{a}_u$  ist einfach zusammenhängend.*

Dieses universelle Überlagerungsgebilde  $\alpha_u$  ist als die wahre abstrakte Gruppe zu betrachten, deren Darstellung durch lineare Transformationen unser Problem ist. Jede Darstellung der infinitesimalen Gruppe  $\alpha^0$  liefert eine *eindeutige* Darstellung von  $\alpha_u$ .

Ein Element  $t$  auf  $\tilde{a}_u$  beschreibe eine geschlossene Kurve  $\mathfrak{K}$ , welche das  $(r-3)$ -parametrische Kontinuum  $t$  der singulären Elemente nicht trifft. Ich verfolge die stetige Änderung der Drehwinkel  $\varphi_i$  von  $t$  bei Durchlaufung der Kurve und die damit verbundene stetige Änderung der Wurzeln

$$\alpha = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

und der Größen  $e(\alpha)$ . Ich behaupte: Kehren alle  $e(\alpha)$  zu ihren Ausgangswerten zurück, so kann ich die Kurve  $\mathfrak{K}$  auf  $\tilde{a}_u$  stetig in den Einheitspunkt zusammenziehen. Denn kehren die  $e(\alpha)$  zu ihren Ausgangswerten zurück, so gilt das gleiche für die Wurzeln  $\alpha$  selber, weil  $e(\alpha)$  niemals den Wert 1 passiert,  $\alpha$  niemals gleich einem Vollwinkel wird. In (3) hängen  $u$  und die aus  $n$  Einsen und den Größen  $e(\alpha)$  bestehende Diagonalmatrix  $(\varepsilon)$  stetig von dem Kurvenparameter ab. Die Deformation nehme ich so vor, daß  $u$  vom Deformationsparameter  $\sigma$  unabhängig bleibt,  $\varphi_i$  jedoch ersetzt wird durch  $\sigma \cdot \varphi_i$ ;  $\sigma$  nimmt stetig von 1 bis 0 ab<sup>1)</sup>. — Da die

<sup>1)</sup> Wählen wir als Ausgangspunkt für die zu durchlaufenden geschlossenen Kurven  $\mathfrak{K}$  ein Hauptelement  $t_0$ , dessen  $e(\alpha)$  nicht bloß von 1, sondern auch alle untereinander verschieden sind, und startet  $u$  als Einheitsmatrix, so ist der Endwert von  $u$  nach Durchlaufung der Kurve eine mit  $t_0$  vertauschbare Matrix, zerfällt also in ein  $n$ -zeiliges und  $r-n$  einzeilige Quadrate, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. Infolgedessen bleibt  $\mathfrak{K}$  bei der geschilderten Deformation eine *geschlossene* Kurve. Eine analoge Bemerkung wäre schon der topologischen Untersuchung der Drehungsgruppe in Kapitel II hinzuzufügen gewesen.

$e(\alpha)$  bei Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve  $\mathfrak{K}$  auf  $\tilde{\alpha}_u$  höchstens eine Permutation erfahren, ist damit der Satz bewiesen; das einfach zusammenhängende Überlagerungsgebilde ist höchstens  $(r - n)!$ -blättrig.

Weil  $\alpha_u$  geschlossen ist, gilt der Hauptsatz von § 1 so gut für  $\alpha_u$  wie für  $\tilde{\alpha}_u$ .

Das Volumen  $d\Omega$  desjenigen Teiles von  $\alpha_u$ , auf welchem die Elemente  $t$  liegen, deren Drehwinkel  $\varphi_i$  dem Spielraum  $\varphi_i \dots \varphi_i + d\varphi_i$  angehören, wird berechnet auf Grund der Gleichung (4) bzw. (5). Die Volummessung auf der durch Projektion entstehenden Mannigfaltigkeit  $[\alpha_u]$  ist möglich, weil der Übergang von dem beliebigen Element  $\delta u$  der infinitesimalen Gruppe  $\alpha^0$  zu

$$\delta u' = (\varepsilon) \delta u (\varepsilon)^{-1}$$

mittels einer zu  $\tilde{\alpha}_u$  gehörigen Haupttransformation  $(\varepsilon)$  volumtreu ist. Denn es multiplizieren sich dabei die Nebenparameter  $\delta u_\alpha$  von  $\delta u$  mit den Faktoren  $e(\alpha)$ ; und da die Wurzeln  $\alpha$  paarweise einander entgegengesetzt gleich sind, ist das Produkt der Faktoren = 1. Dieselbe Tatsache genügt nach einer Bemerkung in § 3 des II. Kapitels, um einzusehen, daß der Übergang

$$\delta t \rightarrow u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$$

unimodular ist. Somit erhalten wir, unter Fortlassung eines konstanten von den Drehwinkeln unabhängigen Faktors,

$$d\Omega = \prod_{\alpha} (e(\alpha) - 1) d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n$$

oder

$$(6) \quad d\Omega = \Delta \bar{\Delta} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_n,$$

$$(7) \quad \Delta = \prod_{\alpha}^+ s\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Das letzte Produkt erstreckt sich nur über die *positiven* Wurzeln.

Die folgenden beiden Tatsachen:

1.  $\alpha_u$  ist geschlossen;
2. eine Linearform der Haupt- und Nebenparameter  $\lambda_i, \tau_\alpha$  des willkürlichen Elementes von  $\alpha^0$  verschwindet identisch, wenn sie unter der unitären Einschränkung

$$(8) \quad \lambda_i \text{ rein imaginär, } \tau_{-\alpha} = \bar{\tau}_\alpha$$

verschwindet,

führen auf bekannten Wegen zu dem

**Satz 3.** *Jede Darstellung von  $\alpha^0$  durch lineare Transformationen zerfällt in eindeutig bestimmter Weise in irreduzible Darstellungen.*

## § 3.

**Bestimmung der Dimensionszahl und Charakteristik einer irreduziblen Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht.**

Die Hauptparameter  $\lambda_i$  mögen so gewählt sein — sie sind dadurch bis auf eine ganzzahlige unimodulare Transformation bestimmt —, daß eine Linearform  $\mathcal{E}$  derselben dann und nur dann ganzzahlige Koeffizienten besitzt, wenn  $\frac{2\mathcal{E}\alpha}{\alpha_n}$  für jede Wurzel  $\alpha$  eine ganze Zahl ist („ganzzahlige Form“, Kapitel III, § 4). Die Wurzeln  $\alpha$  selber sind ganzzahlige Formen. Diejenigen Linearformen der  $\lambda_i$ , welche aus einer,  $\Delta$ , durch die Substitutionen  $S$  der endlichen Gruppe ( $S$ ) hervorgehen (Kapitel III, § 4), mögen zu  $\Delta$  äquivalent heißen. Schon im vorigen Kapitel erkannten wir:

**Satz 4.** *Die in einer irreduziblen Darstellung von  $a^0$  vorkommenden Gewichte sind ganzzahlige Formen. Mit einer Linearform treten auch immer die äquivalenten als Gewichte der gleichen Multiplizität auf. Das höchste Gewicht ist demnach eine ganzzahlige Linearform, die von keiner ihrer äquivalenten übertroffen wird. Es existieren nicht zwei inäquivalente irreduzible Darstellungen von demselben höchsten Gewicht.*

Der letzte Satz ist nach Cartan wie in Kap. I, § 3 zu beweisen.

Bei Beschränkung auf  $\alpha_n$  ersetzen wir die Parameter  $\lambda_i$  durch die Winkelvariablen  $\varphi_i$  ( $\lambda_i = 2\pi\sqrt{-1}\varphi_i$ ). Durchläuft

$$\Delta = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n$$

die sämtlichen vorkommenden Gewichte in der richtigen Multiplizität, so ist die der Darstellung entsprechende *primitive Charakteristik*

$$\chi = \sum_{\Delta} e^{\Delta} = \sum e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \dots + m_n\varphi_n).$$

Die endliche Fourierreihe  $\chi$  ist invariant gegenüber den Substitutionen der Gruppe ( $S$ ). Nach I. Schur gilt unter Verwendung des Integrations-elementes (6)

$$(9) \quad \frac{1}{\Omega} \int \chi(\varphi)\chi(-\varphi) d\Omega = 1 \quad \text{mit} \quad \Omega = \int d\Omega$$

und für die Charakteristiken  $\chi, \chi'$  zweier inäquivalenter irreduzibler Darstellungen

$$(10) \quad \int \chi(\varphi)\chi'(-\varphi) d\Omega = 0.$$

Um auf Grund dieser Orthogonalitätsrelationen die Charakteristiken zu berechnen, liegt es nahe, das Produkt

$$(11) \quad \chi \cdot \Delta = \xi$$

einzuführen. Das ist eine endliche Fourierreihe, die sich gegenüber der Gruppe ( $S$ ) nicht wie  $\chi$  symmetrisch, sondern *alternierend* verhält.

Zunächst nämlich ist  $\Delta$  eine *Fourierreihe*, d. h. eine endliche lineare Kombination von Termen der Gestalt  $e(\Phi)$ , wo die  $\Phi$  *ganzzahlige* Linearformen der Drehwinkel  $\varphi_i$  bedeuten. Um dies einzusehen, müssen wir zeigen, daß nicht erst die Summe  $\Sigma^+ \varrho$  der positiven Wurzeln, sondern bereits die Hälfte davon eine ganzzahlige Form

$$\Phi^0 = r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \dots + r_n \varphi_n$$

ist, oder daß für jede Wurzel  $\alpha$

$$(12) \quad \sum_{\varrho}^+ \frac{\varrho_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}}$$

eine ganze Zahl ist. Beweis: Zu jeder positiven Wurzel  $\varrho$  gehört die aus ihr durch die Substitution  $S_{\alpha}$  hervorgehende Wurzel

$$\varrho' = \varrho - \frac{2\varrho_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} \alpha \quad \text{mit} \quad \varrho'_{\alpha} = -\varrho_{\alpha}.$$

Dieselbe Substitution verwandelt  $\varrho'$  in  $\varrho$ . In (12) kommt neben  $\varrho$  die Wurzel  $\tilde{\varrho} = +\varrho'$  oder  $-\varrho'$  vor, je nachdem  $\varrho'$  positiv oder negativ ist. *Im ersten Fall* liefert das Wurzelpaar  $\varrho, \tilde{\varrho}$  zur Summe (12) den Beitrag 0. Wenn ausnahmsweise  $\tilde{\varrho}$ , d. i.  $\varrho' = \varrho$ , also  $\varrho_{\alpha} = 0$  ist, bleibt dies gültig; der Beitrag der *einen* Wurzel  $\varrho$  ist dann ebenfalls = 0. *Im zweiten Fall* ist,  $\tilde{\varrho} \neq \varrho$  vorausgesetzt, der Beitrag des Wurzelpaares  $\varrho, \tilde{\varrho}$  die ganze Zahl

$$\frac{\varrho_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} + \frac{\tilde{\varrho}_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} = \frac{2\varrho_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}}.$$

$\tilde{\varrho}$  kann hier nur dann  $=\varrho$  sein, wenn  $\varrho$  ein Multiplum von  $\alpha$ , mithin<sup>2)</sup>  $\varrho = \pm \alpha$  ist; der Beitrag dieses Gliedes zu der Summe (12) ist  $\pm 1$ .

$\Delta$  ist aber nicht nur eine Fourierreihe, sondern geht durch die Substitution  $S_{\alpha}$  in  $-\Delta$  über. Wir können die Wurzel  $\alpha$  als positiv voraus-

<sup>2)</sup> Denn neben  $\pm \alpha$  kann nicht ein weiteres konstantes Multiplum  $c\alpha$  von  $\alpha$  gleichfalls als Wurzel auftreten. Man stelle sonst nämlich diejenige  $\alpha$ -Serie von Wurzeln auf, zu welcher  $c\alpha$  gehört:

$$(*) \quad \dots, (c-1)\alpha, c\alpha, (c+1)\alpha, \dots$$

Die bekannte Schlußweise lehrt, daß der Schwerpunkt der Zahlenreihe  $\dots, c-1, c, c+1, \dots$  im Nullpunkt liegt.  $c$  ist also entweder eine ganze Zahl oder eine halbganze. Daß der erste Fall ausgeschlossen ist, wurde in Kap. III, Satz 4 gezeigt. Ist

$c$  halbganz, so kommt  $\frac{\alpha}{2}$  in der Reihe (\*) vor. Es ist aber unmöglich, daß neben

$\frac{\alpha}{2}$  auch  $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$  als Wurzel auftritt.

setzen. Im Produkt (7) verwandelt sich der eine Faktor  $s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  durch  $S_\alpha$  in  $s\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Ist  $\varrho \neq \alpha$  und  $\varrho'$  negativ, so liefert das positive Wurzelpaar  $\varrho, \tilde{\varrho}$  zu dem Produkt den Beitrag  $s\left(\frac{\varrho}{2}\right) s\left(-\frac{\varrho'}{2}\right)$ , der durch  $S_\alpha$  übergeht in  $s\left(\frac{\varrho'}{2}\right) s\left(-\frac{\varrho}{2}\right)$ , also ungeändert bleibt. Ist hingegen  $\varrho'$  positiv, so ist der entsprechende Beitrag

$$s\left(\frac{\varrho}{2}\right) s\left(\frac{\varrho'}{2}\right), \quad \text{bzw.} \quad s\left(\frac{\varrho}{2}\right),$$

je nachdem  $\varrho \neq \varrho'$  oder  $\varrho = \varrho'$  ist; er ist wiederum invariant gegenüber  $S_\alpha$ .

Eine Substitution der Gruppe  $(S)$  heiße *gerade* oder *ungerade*, je nachdem sie  $\Delta$  in  $+\Delta$  oder  $-\Delta$  überführt. Das Produkt einer geraden Anzahl von Erzeugenden  $S_\alpha$  ist gerade, das Produkt einer ungeraden Anzahl ungerade. Mit  $\Delta$  ist auch (11) eine *alternierende Fourierreihe*, d. i. eine solche, welche bei den geraden Substitutionen von  $(S)$  ungeändert bleibt, bei den ungeraden ihr Vorzeichen wechselt. Jede alternierende Fourierreihe ist eine lineare Kombination aus den *Elementarsummen*

$$(13) \quad \xi(l_1, l_2, \dots, l_n) = \sum_S \pm e(\Phi S); \quad \Phi = l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \dots + l_n \varphi_n.$$

Darin bedeutet  $\Phi$  eine ganzzahlige Form, welche höher steht als alle ihre äquivalenten. (Diese sind dann samt und sonders untereinander verschieden.) Die Summe erstreckt sich alternierend über alle Substitutionen  $S$  der Gruppe  $(S)$ .

Jede alternierende Fourierreihe, insbesondere jede Elementarsumme  $\xi(l)$  ist in dem Sinne durch  $\Delta$  teilbar, daß der Quotient wiederum eine endliche — gegenüber  $(S)$  symmetrische — Fourierreihe ist. Der Nachweis beruht auf dem

**Hilfssatz:** *Eine Fourierreihe ist dann und nur dann teilbar durch  $e(\alpha) - 1$ , wenn sie für alle Argumentwerte  $\varphi$ , verschwindet, die  $\alpha$  zum Vollwinkel machen.*

Jedes Glied  $e(\Phi)$  einer Fourierreihe  $\eta$  nimmt bei der Substitution  $S_\alpha$  einen Faktor  $e(g\alpha)$  an,  $g = -\frac{2\Phi_\alpha}{\alpha_\alpha}$  = ganze Zahl. Es ist also  $\eta S_\alpha = \eta$ , wenn  $\alpha$  ein Vollwinkel ist. Außerdem gilt, wenn  $\eta$  alternierend ist, identisch in allen Argumenten  $\eta S_\alpha = -\eta$ . Folglich muß in diesem Falle  $\eta = 0$  sein für alle Argumentwerte, die  $\alpha$  zum Vollwinkel machen. Nach dem Hilfssatz kann man daher setzen

$$\eta = (e(\alpha) - 1) \eta^*, \quad \eta^* = \text{Fourierreihe.}$$



Ist  $\beta$  neben  $\alpha$  eine zweite positive Wurzel, so verschwindet, weil die Ebenen  $\beta = 0$  und  $\alpha = 0$  im  $n$ -dimensionalen Raum der Winkelvariablen  $\varphi$ , nicht zusammenfallen, mit  $\eta$  auch  $\eta^*$  auf allen Ebenen:  $\beta =$  ganze Zahl. Darum enthält  $\eta^*$  den Faktor  $e(\beta) - 1$ . So ergibt sich schließlich, daß  $\eta$  durch das Produkt

$$\prod_{\alpha}^{+} (e(\alpha) - 1) \quad \text{und damit durch } \Delta$$

teilbar ist.

Im Hilfssatz möge  $\alpha$  irgendeine ganzzahlige Form bedeuten. Ist  $g$  der größte gemeinsame Teiler ihrer Koeffizienten, so kann man voraussetzen, daß  $\varphi_1 = \frac{\alpha}{g}$  ist; denn dies ist durch eine unimodulare Transformation immer zu erreichen.  $\eta$  ist ein Polynom<sup>3)</sup> in  $z = e(\varphi_1)$ , dessen Koeffizienten Fourierreihen der Argumente  $\varphi_2, \dots, \varphi_n$  sind. Nach Voraussetzung verschwindet dieses Polynom für die  $g$ -ten Einheitswurzeln  $z$ , welche der Gleichung  $z^g = 1$  genügen, und enthält darum den Faktor  $z^g - 1$  oder  $e(\alpha) - 1$ .

Zu jeder Elementarsumme (13) kann man also die gegenüber  $(S)$  symmetrische Fourierreihe

$$(14) \quad \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\Delta} = \chi(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

bilden. Da  $e(\Phi)$ ,

$$(15) \quad \Phi = l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \dots + l_n \varphi_n,$$

das höchste Glied in  $\xi(l)$  und  $e(\Phi^0)$ ,

$$\Phi^0 = r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \dots + r_n \varphi_n,$$

das höchste Glied in  $\Delta$  ist, wird das höchste Glied  $e(\Psi)$ ,

$$(16) \quad \Psi = m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \dots + m_n \varphi_n,$$

von  $\chi(m)$  gegeben durch

$$\Psi = \Phi - \Phi^0, \quad m_i = l_i - r_i.$$

Weil  $\chi(m)$  symmetrisch ist, kann  $\Psi$  nicht tiefer stehen als irgendeine der äquivalenten Formen  $\Psi S$ .

Für eine beliebige Linearform  $\mathcal{E}$  ist die Summe aller  $\mathcal{E}S$  gleich 0. Denn diese Summe ist eine Linearform  $H$ , welche gegenüber allen Substitutionen  $S_{\alpha}$  invariant ist, d. h. für jede Wurzel  $\alpha$  die Gleichung  $H_{\alpha} = 0$  erfüllt. Darum ist nach einem in § 4 des vorigen Kapitels erbrachten Beweis in der Tat  $H = 0$ . Wird also  $\mathcal{E}$  von keiner seiner Äquivalenten  $\mathcal{E}S$  der Höhe nach übertroffen, so ist  $\mathcal{E}$  notwendig 0 oder positiv.

<sup>3)</sup> In etwas erweitertem Sinne: lineare Kombination endlichvieler ganzzahliger (nicht notwendig positiver) Potenzen von  $z$ .

Mithin ist (16) nicht negativ. Ordnet man verschiedene Fourierreihen nach der Höhe ihres höchsten Gliedes, so ist also keine Elementarsumme  $\xi(l)$  niedriger als  $\Delta$ . Doch  $\Delta$  ist als alternierende Fourierreihe gleich  $\xi(r_1, r_2, \dots, r_n) +$  niedrigeren Elementarsummen. Da solche niedrigeren Elementarsummen nicht existieren, ergibt sich, daß  $\Delta$  selbst die niedrigste Elementarsumme,

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \dots, r_n),$$

sein muß. — Ist umgekehrt (16) eine vorgegebene ganzzahlige Form, die von keiner ihrer äquivalenten der Höhe nach übertroffen wird, so steht  $\Phi = \Psi + \Phi^0$  höher als alle übrigen dazu äquivalenten Formen. Man kann daher nach (11) dasjenige  $\chi(m)$  bilden, dessen höchstes Glied das gegebene  $e(\Psi)$  ist.

Für das Produkt zweier verschiedener Elementarsummen findet man die *Orthogonalitätsrelation*

$$(17) \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 \xi(l_1, l_2, \dots, l_n) \bar{\xi}(l'_1, l'_2, \dots, l'_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n = 0.$$

Denn in keinem Glied des Produktes

$$e(\Phi S) \cdot e(-\Phi' S') = e(\Phi S - \Phi' S')$$

ist die ganzzahlige Form  $\Phi S - \Phi' S' = 0$ , weil ein  $\Phi S$  nicht mit einem  $\Phi' S'$  übereinstimmen kann, ohne daß die ganze Gruppe äquivalenter Formen  $\Phi S$  mit der ganzen Gruppe  $\Phi' S$  zusammenfällt und daher auch in beiden Gruppen die höchsten Formen  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$  übereinstimmen. Ähnlich ergibt sich als Wert des Integrals

$$(18) \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 \xi(l_1, l_2, \dots, l_n) \bar{\xi}(l_1, l_2, \dots, l_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n$$

die Ordnung der Gruppe ( $S$ ). Verwendet man die letzte Gleichung insbesondere für die niedrigste Elementarsumme,  $l_i = r_i$ , so findet man, daß das Gesamtvolumen  $\Omega = \int d\Omega$  mit dieser Ordnungszahl übereinstimmt. Darum kann man an Stelle von (18) auch schreiben

$$(19) \quad \frac{1}{\Omega} \int \chi(m) \bar{\chi}(m) d\Omega = 1,$$

während (17) gleichbedeutend ist mit der Gleichung

$$(20) \quad \int \chi(m) \bar{\chi}(m') d\Omega = 0 \quad (m \neq m')$$

die Größen  $\chi(m)$  genügen denselben Orthogonalitätsrelationen, welche nach (9), (10) für die Charakteristiken der irreduziblen Darstellungen bestehen.

Daraus soll bewiesen werden, daß jene primitiven Charakteristiken mit den  $\chi(m)$  identisch sind. „Mögliches höchstes Gewicht“ ist jede ganzzahlige Linearform (16), die von keiner ihrer äquivalenten übertroffen wird. Ist (16) das höchste Gewicht der primitiven Charakteristik  $\chi$ , so ist die alternierende Fourierreihe  $\xi = \chi \cdot \Delta$  additiv zusammengesetzt aus Elementarsummen (13), deren höchste zu den Zahlen  $l_i = m_i + r_i$  gehört. Es gilt also eine Gleichung

$$(21) \quad \chi = c\chi(m) + c'\chi(m') + \dots,$$

wo der erste Koeffizient  $c \neq 0$  ist und die folgenden Glieder  $\chi(m'), \dots$  niedriger stehen als  $\chi(m)$ . In den früher behandelten Sonderfällen habe ich hieraus, aus den Orthogonalitätsrelationen (9), (10) und den entsprechenden für die Größen  $\chi(m)$  durch induktives Fortschreiten von niedrigeren zu höheren Gewichten die Gleichung  $\chi = \chi(m)$  erschlossen, indem ich mich auf die von Cartan sichergestellte Tatsache stützte, daß zu jedem möglichen höchsten Gewicht wirklich eine irreduzible Darstellung gehöre. Dadurch erschien die Bestimmung der Charakteristik *einer* irreduziblen Darstellung an die Existenz und Beherrschung *aller* gebunden. Direkter kommt man zum Ziel auf Grund der arithmetischen Bemerkung, daß die Koeffizienten  $c, c', \dots$  in (21) ganze Zahlen sind. Denn die Fourierreihe  $\xi$  hat ganzzahlige Koeffizienten, ebenso jede der Elementarsummen  $\xi(l)$ . Außerdem ist aber der Koeffizient des höchsten Gliedes in  $\xi(l)$  gleich 1. Daraus ergibt sich in der Tat Glied für Glied die Ganzzahligkeit von  $c, c', \dots$ . Die Beziehung (9) aber liefert mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für die  $\chi(m)$  die Gleichung

$$1 = c^2 + c'^2 + \dots$$

Darum muß

$$c = \pm 1, \quad c' = 0, \quad \dots$$

sein. Da alle Koeffizienten von  $\chi$ , insbesondere der des höchsten Gliedes, positive ganze Zahlen sind, ist notwendig  $c = +1$ ,  $\chi = \chi(m)$ . Von neuem ist damit der Cartansche Satz bewiesen, daß das höchste Gewicht in einer irreduziblen Darstellung die Multiplizität 1 besitzt, und daß nur *eine* irreduzible Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht existieren kann. Denn der Koeffizient des höchsten Gliedes in  $\chi(m)$  ist  $= 1$ ; und gäbe es zwei inäquivalente irreduzible Darstellungen vom höchsten Gewicht (16), so müßten nach unserem Resultat ihre Charakteristiken  $\chi$  und  $\chi'$  beide  $= \chi(m)$  sein; und das widerspricht der Relation (10) (oder dem Burnsideschen Theorem).

Aus der Charakteristikenformel  $\chi = \chi(m)$  ermittelt man die *Dimensionszahl*, indem man alle Drehwinkel  $\varphi_i = 0$  setzt. Wir führen die

Berechnung folgendermaßen durch. In Kap. III, § 4 lernten wir eine positiv-definite, gegenüber den Substitutionen der Gruppe  $(S)$  invariante quadratische Form

$$G(x) = \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k \quad (g_{ki} = g_{ik})$$

im Gebiete der willkürlichen Linearformen  $x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \dots + x_n \varphi_n$  kennen. Gleichzeitig mit ihr trat die reziproke Form

$$Q(\varphi) = \sum_{ik} q_{ik} \varphi_i \varphi_k \quad (= \sum_{\varrho} \varrho^2)$$

auf. Wir setzen allgemein

$$x'_i = \sum_k g_{ik} x_k, \quad x_i = \sum_k q_{ik} x'_k$$

und machen unter Benutzung einer einzigen Variablen  $\varphi$  in  $\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)$  die Substitution  $\varphi_i = r'_i \varphi$ . Das höchste Glied in  $\xi(l)$  lautet dann

$$e(\varphi \sum_i l_i r'_i) = e(\varphi \sum_{ik} q_{ik} r'_i l'_k).$$

Wegen des invarianten Charakters der Form  $Q$  geht

$$\sum_{ik} q_{ik} r'_i l'_k$$

durch Ausübung einer zu  $(S)$  gehörigen Transformation  $S$  auf die Größen  $r'_i$  in denselben Ausdruck über wie durch Ausübung der inversen  $S^{-1}$  auf die  $l'_i$ . Infolgedessen hat die alternierende Summe

$$\sum_S \pm e(\varphi \sum_{ik} q_{ik} r'_i l'_k) S$$

den gleichen Wert, ob man nun die Operationen  $S$  auf die Größen  $r'_i$  oder auf die Größen  $l'_i$  ausübt. Mit andern Worten: die Elementarsumme  $\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)$  geht durch die Substitution  $\varphi_i = r'_i \varphi$  in dieselbe Funktion von  $\varphi$  über wie  $\xi(r_1, r_2, \dots, r_n)$  durch die Substitution  $\varphi_i = l'_i \varphi$ . Weil aber

$$\xi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \prod_a^+ s\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist, kommt für  $\varphi_i = r'_i \varphi$ :

$$\xi(l_1, l_2, \dots, l_n) = \prod_a^+ s\left(\frac{\varphi}{2} G(l, a)\right),$$

wo sich das Produkt rechts über alle Systeme ganzer Zahlen  $a = a_1, a_2, \dots, a_n$  erstreckt, denen positive Wurzeln

$$\alpha = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n$$

korrespondieren. Für  $\varphi_i = r'_i \varphi$ ,  $\varphi$  unendlich klein, gilt darum

$$\xi(l_1, l_2, \dots, l_n) \sim (2\pi i \varphi)^{\frac{r-n}{2}} \cdot \prod_a^+ G(l, a).$$

Daraus findet man als Wert von

$$\chi(m) = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \dots, r_n)}$$

für verschwindende Drehwinkel  $\varphi_i$ :

$$N_m = \frac{\prod_a^+ G(l, a)}{\prod_a^+ G(r, a)}$$

Satz 5. Die Charakteristik der irreduziblen Darstellung vom höchsten Gewicht

$$m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \dots + m_n \varphi_n$$

ist

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \dots, r_n)}$$

$\xi(l)$  bedeutet die alternierend über alle Substitutionen  $S$  der Gruppe ( $S$ ) zu erstreckende Elementarsumme

$$\sum_S \pm e(\Phi S), \quad \Phi = l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \dots + l_n \varphi_n.$$

$\Delta = \xi(r)$  ist die niedrigste dieser Elementarsummen,

$$\Phi^0 = r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \dots + r_n \varphi_n$$

(gleich der halben Summe aller positiven Wurzeln) die niedrigste ganzzahlige Form, welche höher steht als alle ihre äquivalenten. Die ganzen Zahlen  $l_i$  sind  $= m_i + r_i$  zu nehmen. Die Dimensionszahl jener Darstellung beträgt

$$N = \prod_a \frac{G(l, a)}{G(r, a)} = \prod_a \frac{\Phi_a}{\Phi_a^0},$$

wo das Produkt sich über alle Wurzeln

$$\alpha = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n$$

in solcher Weise erstreckt, daß jedes Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln  $\alpha, -\alpha$  nur durch einen Faktor vertreten ist.

#### § 4.

#### Über die Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen.

Es gilt endlich einzusehen:

Satz 6. Zu jeder ganzzahligen Linearform  $\Psi$ , die von keiner ihrer äquivalenten übertroffen wird, gehört eine irreduzible Darstellung, deren höchstes Gewicht  $\Psi$  ist.

Dies ist bereits von Cartan bewiesen worden<sup>4)</sup>. Aber seine Konstruktion gründet sich auf die explizite Herstellung aller einfachen Gruppen

<sup>4)</sup> Cartan II.

und muß für jede Gruppe besonders durchgeführt werden. Er zeigt in jedem Falle, daß unter den möglichen höchsten Gewichten  $n$  angegeben werden können:  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ , aus denen sich jedes linear mittels ganzer, nicht-negativer Koeffizienten  $p_i$  kombinieren läßt:

$$(22) \quad p_1 \Psi_1 + p_2 \Psi_2 + \dots + p_n \Psi_n \quad (p_i \geq 0).$$

Es gelingt ihm, die irreduziblen Darstellungen ausfindig zu machen, welche zu diesen höchsten Gewichten  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  gehören. Durch Komposition gewinnt man daraus, wie wir wissen, eine Darstellung mit dem höchsten Gewicht (22), und aus ihr läßt sich eine irreduzible mit demselben höchsten Gewicht abspalten. Cartans Methode besteht also in einer direkten algebraischen Konstruktion; sie baut die Darstellungen von unten her durch Komposition auf. Die halb-einfachen Gruppen werden aus den einfachen zusammengesetzt.

Ein anderer Weg, den man einschlagen kann, ist der des Abbaus von vornherein bekannter Darstellungen. Es liegt nahe, als Ausgangspunkt wiederum die adjungierte Gruppe  $\tilde{a}$  zu benutzen und durch Reduktion dieser Darstellung und ihrer Potenzen die irreduziblen zu konstruieren. Statt der Potenzen kann man allgemeiner jede Darstellung der vollen linearen Gruppe  $\mathfrak{g}_{(r)}$  in  $r$  Dimensionen verwenden; denn eine solche liefert natürlich immer auch eine Darstellung der in  $\mathfrak{g}_{(r)}$  enthaltenen Untergruppe  $\tilde{a}$ . Aber auf diesem Wege wird man nur solche irreduzible Darstellungen gewinnen, welche auf  $\tilde{a}$  eindeutig sind.

Der richtige Ausgangspunkt für den Abbau liegt nicht in der adjungierten Gruppe, sondern in der sogenannten *regulären Darstellung*, die Frobenius in der Theorie der endlichen Gruppen zu analogem Zwecke verwendet hat. Sie liefert durch ihre Reduktion mit einem Schlage alle irreduziblen Darstellungen. Ihr Substrat kann deshalb selbstverständlich nicht ein Raum von endlich vielen Dimensionen sein, sondern sie ist eine Gruppe linearer Transformationen im „Raume“ aller eindeutigen stetigen Funktionen  $\eta(s)$ , deren Argument  $s$  die geschlossene einfach zusammenhängende Gruppenmannigfaltigkeit  $\alpha_n$  durchläuft. Und zwar entspricht dem Elemente  $s_0$  von  $\alpha_n$  die Transformation  $T(s_0)$ :  $\eta \rightarrow \eta'$  jenes Funktionalraumes, welche durch die Gleichung

$$\eta(s) = \eta'(s_0^{-1}s)$$

gegeben wird. Man sieht sofort, daß für irgend zwei Elemente  $s_0, t_0$

$$T(s_0)T(t_0) = T(s_0 t_0)$$

gilt. Durch die Reduktion dieser regulären Darstellung kommt man, analog wie in der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere operierend, zu dem Ergebnis:

**Satz 6a.** *Die primitiven Charakteristiken bilden ein (zum Integrationselement  $d\Omega$  gehöriges) vollständiges Orthogonalsystem für die Gesamtheit der auf  $\alpha_u$  eindeutigen Klassenfunktionen.*

Das ist die natürliche, ohne Fallunterscheidungen durchführbare, freilich transzendente Konstruktionsmethode. In Verbindung mit den uns bekannten Eigenschaften der primitiven Charakteristiken geht aus dem angegebenen Resultat hervor:

1. Zwei Hauptelemente  $(\varepsilon)$ ,  $(\varepsilon')$ , für welche die (bis auf eine unimodulare Transformation bestimmten) normierten Winkelvariablen mod 1 gleiche Werte haben:

$$\varphi_i \equiv \varphi'_i \pmod{1},$$

fallen auf  $\alpha_u$  zusammen.

2. Zwei Hauptelemente  $(\varepsilon)$ ,  $(\varepsilon')$  sind innerhalb  $\alpha_u$  konjugiert, wenn das eine aus dem andern durch eine auf die Winkelvariablen auszuübende Substitution  $S$  der Gruppe  $(S)$  hervorgeht; oder zu jedem solchen  $S$  gibt es ein Element  $u_S$  von  $\alpha_u$  derart, daß

$$(\varepsilon)S = u_S^{-1}(\varepsilon)u_S$$

ist.

Die Sätze 6 und 6a kommen zur Übereinstimmung, wenn von diesen beiden Behauptungen die Umkehrung zutrifft. Sie gilt es also direkt zu beweisen. Ich verzichte vorläufig auf die exakte Durchführung dieser ganzen Methode, weil sie mir beim gegenwärtigen Stand der Untersuchung einen zu großen Kraftaufwand an ein Ziel zu verschwenden scheint, das bereits auf anderm Wege erreicht ist. Doch hoffe ich, daß sich das bald ändern wird; gewisse Ansätze von Cartan, welche an die vorliegende Arbeit anschließen und von denen der Verf. brieflich Kenntnis hat, versprechen in dieser Hinsicht merkliche Erleichterungen.

## § 5.

### Beziehung zur Invariantentheorie.

Es sei  $\alpha$  eine gegebene Gruppe homogener linearer Transformationen in  $m$  Dimensionen. Liegen eine oder mehrere willkürliche Formen bestimmter Ordnung der  $m$ -gliedrigen Variablenreihen  $x, y, \dots$  vor, so versteht man unter einer *Invariante* dieser Formen gegenüber der Gruppe  $\alpha$  bekanntlich eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten jener Formen, welche homogen ist in den Koeffizienten jeder einzelnen Form und sich nicht ändert, wenn man die Formen durch jene ersetzt, die aus ihnen durch eine willkürliche, kogredient auf die Variablenreihen  $x, y, \dots$  auszuübende Transformation  $s$  der Gruppe  $\alpha$  hervorgehen. Nun erleiden aber z. B. die Koeffizienten einer willkürlichen kubischen Form der  $x$  unter dem Einfluß der Variablentransformationen gleichfalls eine Gruppe linearer

Transformationen, die auf  $\alpha$  isomorph bezogen ist. Wir können das Problem daher so fassen und zugleich verallgemeinern. Es liegen mehrere Darstellungen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  der in abstracto gegebenen Gruppe  $\alpha$  durch lineare Transformationen vor. Dem Element  $s$  von  $\alpha$  möge in  $\mathfrak{A}$  die lineare Transformation  $S$  des willkürlichen  $m$ -dimensionalen Vektors  $x$ , in  $\mathfrak{B}$  die lineare Transformation  $T$  des willkürlichen  $n$ -dimensionalen Vektors  $y, \dots$  korrespondieren. Eine ganze rationale Funktion  $J(x, y, \dots)$ , welche homogen ist in den Komponenten jedes der Vektoren  $x, y, \dots$ , heißt eine zugehörige *Invariante*, wenn sie bei den simultanen Transformationen  $S, T, \dots$ , welche das beliebige Element  $s$  von  $\alpha$  an ihren Argumenten induziert, ungeändert bleibt. Der Hilbertsche Beweis des *Fundamentalsatzes*: daß alle zu den gegebenen Darstellungen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  gehörigen Invarianten sich aus endlich vielen ganz rational aufbauen lassen, erfordert eine Methode, die aus jeder in den Komponenten der einzelnen Vektoren homogenen ganzen rationalen Funktion  $f(x, y, \dots)$  eine Invariante  $J_f$  erzeugt, die insbesondere dann, wenn  $f$  selber schon eine Invariante ist, mit  $f$  zusammenfällt (evtl. bis auf einen konstanten von 0 verschiedenen Faktor). Zu diesem Zweck hat Hurwitz die *Integrationsmethode* ersonnen. Wir erkennen jetzt die Tragweite dieser Methode: sie führt nicht bloß für die projektive und die orthogonale Gruppe zum Ziel, auf welche Hurwitz sie allein angewendet hatte, sondern für alle halb-einfachen Gruppen. Sie erweist damit ihre große Überlegenheit über die rein algebraischen Methoden, welche Differentiationsprozesse nach Art des Cayleyschen  $\Omega$ -Prozesses heranziehen. Zum erstenmal ist damit auf natürliche Weise ein gruppentheoretischer Gültigkeitsbereich für die Invariantentheorie abgegrenzt.

Man führt die unitäre Beschränkung ein und bildet das über die geschlossene Mannigfaltigkeit  $\alpha_u$  zu erstreckende Integral

$$\int_{\alpha_u} f(xS, yT, \dots) |ds| = J_f(x, y, \dots).$$

$J_f(x, y, \dots)$  ist gewiß eine Invariante gegenüber  $\alpha_u$ . Daß hier aber die unitäre Beschränkung wieder fortgelassen werden kann, zeigt man am bequemsten, indem man durch die infinitesimalen Operationen hindurchgeht. Die Änderung  $dJ_f$  von  $J_f$  bei einer infinitesimalen Operation von  $\alpha$  ist eine Linearform von deren Parametern. Die Form verschwindet, wenn diese Parameter der unitären Beschränkung (8) unterworfen sind; also verschwindet sie überhaupt identisch.  $J_f$  ist folglich gegenüber den infinitesimalen Operationen von  $\alpha$ , demnach auch gegenüber allen Operationen von  $\alpha$  invariant.

Betrachtet man nur diejenigen Invarianten, welche in bezug auf jeden der Argumentvektoren  $x, y, \dots$  von bestimmter Ordnung sind, so entsteht die viel weniger tiefliegende Frage nach den linear unabhängigen unter



den Invarianten der so definierten endlichen *Schar*. Ist z. B. in  $x$  die Ordnung 3, in  $y$  die Ordnung 2, ... vorgeschrieben, so kann man die Scharinvarianten als Linearformen der Variablen

$$x_i, x_k, x_l, y_r, y_s, \dots$$

betrachten, die ihrerseits das Substrat für eine in gewisser Weise aus den Darstellungen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  komponierte Darstellung  $\mathfrak{A}$  abgeben. Das Problem besteht also in abgeänderter Bezeichnung darin: im  $x$ -Raum einer Darstellung  $\mathfrak{A}$  der Gruppe  $\alpha$  die sämtlichen Linearformen  $J = J(x)$  zu ermitteln, welche sich bei den linearen Transformationen der Gruppe  $\mathfrak{A}$  nicht ändern. Die Anzahl der linear unabhängigen  $J$  gibt offenbar an, wie oft in  $\mathfrak{A}$  bei vollständiger Reduktion die Identität  $J' = J$  als irreduzible Darstellung von  $\alpha$  vorkommt. Enthält  $\mathfrak{A}$  die irreduzible Darstellung vom höchsten Gewicht (16) und der Charakteristik  $\chi_m$  bei vollständiger Reduktion  $g_m$ -mal, so gilt für die Charakteristik  $\zeta$  von  $\mathfrak{A}$ :

$$\zeta(\varphi) = \sum g_m \chi_m(\varphi).$$

Daraus folgt mittels der Orthogonalitätsrelationen für die  $\chi_m$ :

$$(23) \quad g_m = \frac{1}{\Omega} \int \zeta(\varphi) \chi_m(-\varphi) d\Omega.$$

Insbesondere ist die Anzahl der linear unabhängigen Scharinvarianten

$$(24) \quad g_0 = \frac{1}{\Omega} \int \zeta(\varphi) d\Omega.$$

Diese Formel wurde von Hrn. I. Schur im Falle der orthogonalen Gruppe entwickelt<sup>5)</sup> und zu interessanten Folgerungen verwendet.

Aber auch die allgemeinere Formel (23) hat ihr Interesse. Ist  $J$  eine Invariante mehrerer Formen, so stellt die Gleichung  $J = 0$  eine invariante Beziehung zwischen diesen Formen dar. Es gibt jedoch auch invariante Beziehungen zwischen Formen, welche nicht durch eine, sondern durch mehrere, z. B. durch zwei Gleichungen  $J_1 = 0, J_2 = 0$  ausgedrückt werden. Dann gehen  $J_1, J_2$  unter dem Einfluß der Substitutionen der Gruppe über in lineare Kombinationen dieser beiden Funktionen. Wenn nicht jede der beiden Funktionen einzeln invariant ist, muß  $J_1$  in den Komponenten jeder Form von der gleichen Ordnung sein wie  $J_2$ . Betrachten wir wiederum nur solche Paare  $(J_1, J_2)$ , für welche diese Ordnungszahlen vorgeschrieben sind, so kann man das Problem so stellen: alle Paare  $(J_1, J_2)$  von Linearformen im  $x$ -Raum zu bestimmen, die unter dem Einfluß der Gruppenelemente von  $\alpha$  vorgegebene, ihnen isomorph zugeordnete lineare Transformationen  $t$  erleiden:

$$\begin{aligned} J'_1 &= t_{11} J_1 + t_{12} J_2, \\ J'_2 &= t_{21} J_1 + t_{22} J_2. \end{aligned}$$

<sup>5)</sup> Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1924, S. 189–208 und 346–355.

Die letzteren sollen eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{a}$  bilden. Kommt bei vollständiger Reduktion der Transformationsgruppe  $\mathfrak{A}$  der Variablen  $x$  diese irreduzible Darstellung  $g$ -mal in  $\mathfrak{A}$  vor, so behaupte ich, gibt es  $g$  derartige Paare

$$(J'_1, J'_2), (J''_1, J''_2), \dots,$$

aus denen sich alle mittels konstanter Koeffizienten linear zusammensetzen lassen:

$$J_1 = \alpha' J'_1 + \alpha'' J''_1 + \dots,$$

$$J_2 = \alpha' J'_2 + \alpha'' J''_2 + \dots$$

In der Tat: entsprechen demselben Element von  $\mathfrak{a}$  in der  $N$ -dimensionalen Darstellung  $\mathfrak{A}$  die Matrix  $T$ , in der vorgegebenen zweidimensionalen irreduziblen Darstellung die Matrix  $t$ , so kommt die Forderung, daß das Paar

$$J_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1N} x_N,$$

$$J_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2N} x_N$$

die Transformation  $t$  erleidet, wenn die  $x$  durch  $T$  transformiert werden, für die rechteckige Matrix  $A$  der Koeffizienten  $a$  auf die Gleichung hinaus:

$$tA = AT.$$

Enthält das allgemeine  $T$ , in vollständig reduzierter Form geschrieben, längs der Hauptdiagonale  $g$ -mal die Matrix  $t$ , im übrigen aber lauter zu  $t$  inäquivalente irreduzible Matrizen, so teile man diesem Zerfall entsprechend die Reihe der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  und damit die Matrix  $A$  in Abschnitte ein. Für jeden der ersten  $g$  quadratischen Abschnitte  $A$  von  $A$  hat man die Gleichung

$$tA = At,$$

für die übrigen rechteckigen Abschnitte  $B$  Gleichungen

$$tB = Bt',$$

in denen  $t'$  irreduzibel und inäquivalent zu  $t$  ist. Nach einem in Kap. I, § 6 erwähnten Satz von Schur folgt daraus, daß die Abschnitte  $A$  zweidimensionale Einheitsmatrizen sind, die Abschnitte  $B$  verschwinden. Das ist aber genau die aufgestellte Behauptung, daß  $(J_1, J_2)$  sich linear zusammensetzt aus den Paaren

$$(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2g-1}, x_{2g}),$$

an deren jedem  $T$  die Transformation  $t$  induziert. Das Resultat lautet: In zwei Darstellungen einer gegebenen halb-einfachen Gruppe, von denen die zweite irreduzibel ist, mögen einem willkürlichen Gruppenelement die linearen Transformationen oder Matrizen  $T$  bzw.  $t$  korrespondieren. Die erste Darstellung, deren Träger der  $x$ -Raum ist, sei  $N$ -dimensional, die zweite  $n$ -dimensional. Es gilt, Systeme  $J_1, J_2, \dots, J_n$  von  $n$  Linearformen

der  $N$  Variablen  $x$  zu ermitteln, welche allgemein untereinander nach  $t$  transformiert werden, wenn die Variablen  $x$  der Transformation  $T$  unterworfen werden. Die Anzahl der linear unabhängigen dieser „invarianten Systeme“ ist, wenn  $\zeta$  und  $\chi_m$  die Charakteristiken der beiden Darstellungen sind, aus der Formel (23) zu entnehmen.

### Inhaltsübersicht.

#### Kapitel I. Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.

- § 1. Ziel der Untersuchung.
- § 2. Cartans infinitesimale Methode: Die Gewichte.
- § 3. Cartans infinitesimale Methode: Bestimmung einer irreduziblen Darstellung durch ihr höchstes Gewicht.
- § 4. Erzeugung der irreduziblen Darstellungen.
- § 5. Der Satz von der vollen Reduzibilität.
- § 6. Bestimmung der Charakteristiken und Dimensionszahlen.
- § 7. Zusammenhang mit der symmetrischen Gruppe und ihren Charakteren.
- § 8. Die Gruppe aller linearen Transformationen.

#### Kapitel II. Die Darstellungen der Komplexgruppe und der Drehungsgruppe.

- § 1. Das einzelne Element der Komplexgruppe. Die unitäre Beschränkung.
- § 2. Darstellungen der Komplexgruppe: Infinitesimaler Teil.
- § 3. Darstellungen der Komplexgruppe: Integraler Teil.
- § 4. Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Infinitesimaler Teil.
- § 5. Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Integraler Teil.

#### Kapitel III. Struktur der halb-einfachen Gruppen.

- Einleitung.
- § 1. Grundbegriffe. Zerlegung nach einer maximalen auflösbaren Untergruppe.
- § 2. Die Gewichte.
- § 3. Cartans Kriterium für die auflösbaren und für die halb-einfachen Gruppen.
- § 4. Die Gruppe  $(S)$ .
- § 5. Die unitäre Beschränkung.
- Anhang.

#### Kapitel IV. Darstellung aller halb-einfachen Gruppen.

- § 1. Das einzelne Element der Gruppe.
- § 2. Analysis situs. Volumbestimmung. Volle Reduzibilität.
- § 3. Bestimmung der Dimensionszahl und Charakteristik einer irreduziblen Darstellung von gegebenem höchsten Gewicht.
- § 4. Über die Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen.
- § 5. Beziehung zur Invariantentheorie.

(Eingegangen am 23. April 1925.)

Berichtigung zu Teil I (23, S. 271–309):

Auf S. 292, Zeile 3, lies  $n + 1$  anstelle von  $n + 2$ .

Das in Kap. I, § 3 (23, S. 281) und Kap. IV, § 3 Burnside zugeschriebene grundlegende Theorem rührt in Wahrheit von Frobenius und J. Schur her: d. Berliner Akad. 1906, S. 215.