WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 73, 386–392 (1960)

Sylowtürme in subnormalen Untergruppen

Herrn OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 gewidmet

Von
HELMUT WIELANDT

1. FRAGESTELLUNG. Schon oft ist die Frage behandelt worden, was man über die arithmetischen Eigenschaften einer endlichen Gruppe sagen kann, wenn man etwas über die arithmetischen Eigenschaften der Faktorgruppen in einer von $\mathfrak{G}$ bis 1 absteigenden Normalreihe (z.B. einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$) weiß; eine besonders eingehende Untersuchung verdankt man P. HALL [2]. Im folgenden geht es um eine verwandte Frage: $\mathfrak{G}$ sei das Erzeugnis gegebener subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$; welchen Einfluß haben die arithmetischen Eigenschaften der $\mathfrak{G}_\nu$ auf diejenigen von $\mathfrak{G}$? Eine gründliche Untersuchung erscheint lohnend. Man wird damit beginnen, daß man spezielle arithmetische Eigenschaften daraufhin betrachtet, ob sie sich von den $\mathfrak{G}_\nu$ auf $\mathfrak{G}$ übertragen. Das soll im folgenden für eine in mancher Hinsicht besonders interessante Eigenschaft geschehen, nämlich die, daß die Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$, kurz gesagt, π-Hallgruppen mit Sylowtürmen gegebener Anordnung enthalten. Wir denken uns eine Menge π von Primzahlen und eine vollständige Ordnung $*$ von π gegeben und festgehalten; die Relation $p*q$ lesen wir als „p unterhalb von q".

DEFINITION 1.1. *Unter einer π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Untergruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, die eine Normalreihe der Gestalt*

$$\mathfrak{P} \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'' \leqq \cdots \leqq \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \ldots \mathfrak{P}^{(k)} = \mathfrak{G}^* \tag{1.2}$$

besitzt. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}$ eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ zu demjenigen in π auftretenden Primteiler p der Ordnung $|\mathfrak{G}|$, der der unterste bezüglich der Ordnung $*$ ist; $\mathfrak{P}'$ bedeutet eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ zum nächsthöheren Primteiler p' von $|\mathfrak{G}|$ in π, usw. Liegt kein Primteiler von $|\mathfrak{G}|$ in π, so setzen wir $\mathfrak{G}^* = 1$. Die Normalreihe 1.2 *nennen wir im Anschluß an* HUPPERT [3, S. 415] *einen π-Sylowturm der Anordnung $*$, oder kurz einen π^*-Turm* (*von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$*).

Bevor wir die Frage untersuchen, ob sich die Eigenschaft, eine π^*-Hallgruppe zu enthalten, von subnormalen Untergruppen auf ihr Erzeugnis vererbt, stellen wir einige Definitionen und allgemeine Tatsachen über subnormale Untergruppen und Hallgruppen zusammen.

2. BEZEICHNUNGEN, HILFSSÄTZE. Im folgenden bedeuten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ stets Untergruppen einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ von endlicher Ordnung. Das Erzeugnis von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$, Normalität von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B}$. Kann man $\mathfrak{A}$ von einer Obergruppe $\mathfrak{B}$ aus durch eine absteigende

Normalkette erreichen, so heißt $\mathfrak{A}$ subnormal in $\mathfrak{B}$ und wir schreiben $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}$. $\mathfrak{H}$ heißt eine π-Gruppe, wenn jeder Primteiler von $|\mathfrak{H}|$ in π liegt. Eine π-Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ heißt eine π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn ihr Index durch keine Primzahl aus π teilbar ist. Die in 1.1 definierten π^*-Hallgruppen sind auch π-Hallgruppen. Man weiß:

2.1. *Ist* $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$, *so ist* $\mathfrak{A} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{B}$ [4, (3)].

2.2. *Das Erzeugnis subnormaler Untergruppen* $\mathfrak{G}_\nu$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist subnormal in* $\mathfrak{G}$; *in seiner Ordnung gehen nur Primteiler von* $\Pi|\mathfrak{G}_\nu|$ *auf* [4, (10)].

Ferner gilt:

2.3. *Eine subnormale π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ ist normal in $\mathfrak{G}$ und enthält alle π-Untergruppen von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Die normale Hülle (das Erzeugnis aller Konjugierten) von $\mathfrak{H}$ ist nach 2.2 eine π-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und enthält die π-Hallgruppe $\mathfrak{H}$, stimmt also mit $\mathfrak{H}$ überein: es ist $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{B}$ eine beliebige π-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ eine π-Gruppe $\geqq \mathfrak{H}$ und stimmt daher mit $\mathfrak{H}$ überein.

2.4. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormal in $\mathfrak{G}$, und es sei $\mathfrak{H}_\nu$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Dann enthält der Index des Erzeugnisses $\langle \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n \rangle$ in $\langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$ nur Primteiler, die in einem der Indizes $|\mathfrak{G}_\nu : \mathfrak{H}_\nu|$ aufgehen* [5, (2.3)].

2.5. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ seien subnormal in $\mathfrak{G}$.*

A. *Dann ist $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ eine π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$.*

B. *Es ist $\langle \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{H} \cap \langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle$.*

C. *Ist $\mathfrak{H}$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$.*

Beweis. Für den Fall, daß π aus nur einer Primzahl besteht, sind A und B bekannt [5, (3.1—2)], und C fällt mit A zusammen. Im allgemeinen Fall sei p eine beliebige Primzahl aus π. Dann gibt es in $\mathfrak{H}$ eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$.

A. Da $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ die p-Sylowgruppe $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_\nu$ von $\mathfrak{G}_\nu$ enthält, tritt im Index von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ in $\mathfrak{G}_\nu$ kein Primteiler aus π auf. Andererseits ist $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ eine π-Gruppe, also eine π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$.

B. Die Beziehung $\leqq$ ist trivial. Die Beziehung $\geqq$ gilt deswegen, weil die linke Seite für jedes $p \in \pi$ eine p-Sylowgruppe der rechten Seite enthält, nämlich $\langle \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_n \rangle$.

C. Der π^*-Turm von $\mathfrak{H}$ (nach 2.3 gibt es nur einen) geht beim Schneiden mit $\mathfrak{G}_\nu$ in einen π^*-Turm von $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_\nu$ über.

2.6. *Je zwei π^*-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert* (P. Hall [2] Th. A 1).

3. Der Existenzsatz.

Satz 3.1. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen. Jedes $\mathfrak{G}_\nu$ enthalte eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{G}_\nu^*$. Dann enthält $\mathfrak{G}$ eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$.*

BEWEIS. Wir erledigen zunächst einige Sonderfälle.

A. $\mathfrak{G}$ *sei eine π-Gruppe. Zu zeigen ist, daß $\mathfrak{G}$ eine Normalkette* 1.2 *besitzt.* Gibt es keinen Primteiler von $|\mathfrak{G}|$ in π, so ist $\mathfrak{G}^* = 1$ zu setzen und wir sind fertig. Weiterhin gebe es solche Primteiler; p sei der unterste von ihnen und $\mathfrak{P}$ eine zugehörige Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ normal ist. Der Durchschnitt $\mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}_\nu$ ist nach 2.5 eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Nach der Definition 1.1 enthält $\mathfrak{G}_\nu$ eine normale p-Sylowgruppe ($=1$, wenn p nicht in $|\mathfrak{G}_\nu|$ aufgeht). Sie ist nach SYLOW zu $\mathfrak{P}_\nu$ konjugiert, daher ist $\mathfrak{P}_\nu \trianglelefteq \mathfrak{G}_\nu$. Da $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ vorausgesetzt ist, folgt $\mathfrak{P}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$. Nach 2.2 ist auch $\mathfrak{Q} = \langle \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n \rangle$ subnormal in $\mathfrak{G}$. Nach 2.5 B ist andererseits $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{P}$, also ist $\mathfrak{P} \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$. Hieraus folgt nach 2.3 $\mathfrak{P} \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Wir gehen zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ über. Sie hat eine kleinere Ordnung als $\mathfrak{G}$ und erfüllt wieder die Voraussetzungen von A, also kommen wir durch einen Induktionsschluß bezüglich $|\mathfrak{G}|$ ans Ziel.

B. *Nun sei $n=2$, $\mathfrak{G}_1 \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2 \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Für jede Wahl der $G_\nu \in \mathfrak{G}_\nu$ sei $\langle G_1^{-1} \mathfrak{G}_1^* G_1, G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2 \rangle = \mathfrak{G}$. Über die Ordnung von $\mathfrak{G}$ wird nichts vorausgesetzt. Behauptet wird: $\mathfrak{G}$ ist eine π-Gruppe und besitzt einen π^*-Turm.*

Wir bilden $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$; dann ist $\mathfrak{D} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{D} \cong \mathfrak{G}_1/\mathfrak{D} \times \mathfrak{G}_2/\mathfrak{D}$.

Wenn in $|\mathfrak{D}|$ kein Primteiler aus π aufgeht, dann enthält $\mathfrak{G}_\nu/\mathfrak{D}$ eine zu $\mathfrak{G}_\nu^*$ isomorphe π^*-Hallgruppe, nämlich $\mathfrak{G}_\nu^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D}$. Also enthält $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ eine zu $\mathfrak{G}_1^* \times \mathfrak{G}_2^*$ isomorphe π^*-Hallgruppe, nämlich $\mathfrak{G}_1^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D} \times \mathfrak{G}_2^* \mathfrak{D}/\mathfrak{D} = \mathfrak{B}/\mathfrak{D}$. Da in $|\mathfrak{D}|$ kein Primteiler aus π aufgeht, ist $(|\mathfrak{D}|, |\mathfrak{B}/\mathfrak{D}|) = 1$. Nach einem bekannten Satz von SCHUR und ZASSENHAUS [6, Kap. IV Satz 25] enthält $\mathfrak{B}$ eine zu $\mathfrak{G}_1^* \times \mathfrak{G}_2^*$ isomorphe Vertretergruppe $\mathfrak{G}^*$ zum Normalteiler $\mathfrak{D}$; $\mathfrak{G}^*$ ist eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Wir haben noch zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ eine π-Gruppe, d.h. $= \mathfrak{G}^*$ ist. Dazu genügt es nach der Voraussetzung von B, zu zeigen, daß $\mathfrak{G}^*$ zwei Untergruppen der Gestalt $G_1^{-1} \mathfrak{G}_1^* G_1$, $G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2$ enthält. Untergruppen dieser Art sind aber in der Tat nach 2.5 C und 2.6 die Durchschnitte $\mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$.

Weiterhin können wir also annehmen, daß $|\mathfrak{D}|$ durch eine Primzahl $q \in \pi$ teilbar ist. Wir bilden die beiden Durchschnitte $\mathfrak{D}_\nu^* = \mathfrak{G}_\nu^* \cap \mathfrak{D}$; es ist $\mathfrak{D}_\nu^* \trianglelefteq \mathfrak{G}_\nu^*$. Nach 2.5 ist $\mathfrak{D}_\nu^*$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{D}$; wegen $|\mathfrak{D}| \equiv 0 \bmod q$, $q \in \pi$ ist also $\mathfrak{D}_\nu^* \neq 1$. Nach 2.6 sind $\mathfrak{D}_1^*$ und $\mathfrak{D}_2^*$ in $\mathfrak{D}$ konjugiert, also gibt es ein $G_2 \in \mathfrak{G}_2$ mit $\mathfrak{D}_1^* = G_2^{-1} \mathfrak{D}_2^* G_2$. Hieraus folgt $\mathfrak{D}_1^* \trianglelefteq \langle \mathfrak{G}_1^*, G_2^{-1} \mathfrak{G}_2^* G_2 \rangle = \mathfrak{G}$. Wir können nun zur kleineren Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_1^*$ übergehen, die offenbar wieder die Voraussetzungen von B erfüllt und daher schon als π-Gruppe angenommen werden kann. Da $\mathfrak{D}_1^*$ ebenfalls eine π-Gruppe ist, ist auch $\mathfrak{G}$ eine solche. Nun zeigt das Ergebnis von A, daß $\mathfrak{G}$ einen π^*-Turm besitzt, und wir sind auch in diesem Fall fertig.

C. *Wir mildern die Einschränkungen von* B. *Es sei $n=2$, $\mathfrak{G}_1 \trianglelefteq \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2 \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Behauptung: $\mathfrak{G}$ enthält eine π^*-Hallgruppe.* Wir konstruieren sie nach einem Minimalprinzip: Unter allen Erzeugnissen $\langle \mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_2^* \rangle$, worin $\mathfrak{H}_\nu^*$ alle π^*-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchläuft, wählen wir irgendein minimales aus; es heiße $\mathfrak{H}$. Wir behaupten, daß $\mathfrak{H}$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Wir legen die Gruppen $\mathfrak{H}_\nu^*$ so fest, daß $\mathfrak{H} = \langle \mathfrak{H}_1^*, \mathfrak{H}_2^* \rangle$ ist. Es wird $\mathfrak{H}_\nu^* \leqq \mathfrak{H}_\nu \leqq \mathfrak{G}_\nu$, wenn wir die normale Hülle von $\mathfrak{H}_\nu^*$ in $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_\nu$ bezeichnen. Daher erfüllen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\nu$, $\mathfrak{H}_\nu^*$ die Voraussetzungen, die wir in B für $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\nu$, $\mathfrak{G}_\nu^*$ gemacht haben. Also ist $\mathfrak{H}$ eine π-Gruppe mit einem π^*-Turm. Dieser baut sich aus q-Sylowgruppen ($q \in \pi$) von $\mathfrak{H}$ auf; aber da nach 2.4 der Index von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ durch keine Primzahl aus π teilbar ist, sind das zugleich Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{H}$, wie behauptet, eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

D. Nun sei n beliebig und $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq \mathfrak{G}$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Dann ergibt ein Induktionsschluß bezüglich n, ausgehend von dem eben erledigten Fall $n = 2$, die Existenz von $\mathfrak{G}^*$.

E. Jetzt beweisen wir den Satz 3.1 in voller Allgemeinheit durch einen Induktionsschluß bezüglich $|\mathfrak{G}|$. Dabei können wir annehmen, daß jedes $\mathfrak{G}_\nu \neq \mathfrak{G}$ ist. Dann ist wegen $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ auch die normale Hülle $\mathfrak{N}_\nu$ von $\mathfrak{G}_\nu$ kleiner als $\mathfrak{G}$, daher darf der Satz 3.1 auf $\mathfrak{N}_\nu$ schon angewandt werden. Wir prüfen die Voraussetzungen nach: Es ist $\mathfrak{N}_\nu = \langle \ldots, G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G, \ldots \rangle$; nach 2.1 ist $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{N}_\nu$, und $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu G$ enthält die π^*-Hallgruppe $G^{-1}\mathfrak{G}_\nu^* G$. Nach Induktionsvoraussetzung enthält $\mathfrak{N}_\nu$ eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{N}_\nu^*$. Daher enthält $\mathfrak{G}$ nach dem Ergebnis von D, angewandt auf $\mathfrak{N}_\nu$ statt $\mathfrak{G}_\nu$, eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$. Damit ist Satz 3.1 bewiesen. Als nächstes wollen wir das unter einschränkenden Voraussetzungen verwendete Minimalprinzip auf die allgemeine Situation des Satzes 3.1 erweitern, um näheren Aufschluß über die Gruppen $\mathfrak{G}^*$ zu erhalten.

4. Die Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}^*$.

Wir schicken eine Folgerung aus Satz 3.1 voraus:

Satz 4.1. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{G}$ erzeugen. Sei $\mathfrak{H}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Genau dann enthält $\mathfrak{H}$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{H}$ für jedes ν eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$ enthält.*

Beweis. A. Sei $\mathfrak{G}^* \leqq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}^*$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$ nach 2.5 C eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$ und in $\mathfrak{H}$ enthalten.

B. Sei $\mathfrak{G}_\nu^* \leqq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}_\nu^*$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Wir setzen $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{G}_\nu \cap \mathfrak{H}$. Wegen $\mathfrak{G}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{H}_\nu \trianglelefteq\trianglelefteq \mathfrak{H}$, ferner ist $\mathfrak{G}_\nu^*$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{H}_\nu$. Nach 2.4 hat das Erzeugnis $\mathfrak{E} = \langle \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n \rangle$ in $\mathfrak{G}$ einen Index, der keinen Primteiler aus π enthält. Nach Satz 3.1 besitzt $\mathfrak{E}$ andererseits eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{E}^*$. Diese ist dann auch eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir geben nun eine charakteristische Minimaleigenschaft von $\mathfrak{G}^*$ an.

Satz 4.2. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ subnormale Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{G}$ erzeugen. Dann sind die π^*-Hallgruppen $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ die minimalen unter den Erzeugnissen*

$$\langle \mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_n^* \rangle, \tag{4.2'}$$

wenn man $\mathfrak{G}_\nu^*$ alle π^*-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchlaufen läßt.

Ist die Menge dieser Erzeugnisse leer, weil eine der Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ keine π^*-Hallgruppe enthält, so ist die Behauptung des Satzes so zu verstehen, daß dann auch keine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ existiert.

BEWEIS. A. Jede π^*-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$ läßt sich in der Form 4.2′ darstellen. Denn der Durchschnitt $\mathfrak{G}_\nu^* = \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_\nu$ ist nach 2.5 C eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$, und nach 2.5 B ist

$$\langle \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{G}^* \cap \langle \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n \rangle = \mathfrak{G}^* \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*.$$

$\mathfrak{G}^*$ enthält keine kleinere Gruppe $\mathfrak{H}$ der Gestalt 4.2′. Denn eine solche müßte nach 4.1 wieder eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ enthalten, also mindestens die Ordnung $|\mathfrak{G}^*|$ haben.

B. Sei $\mathfrak{H}$ eine minimale Gruppe der Gestalt 4.2′. Da $\mathfrak{H}$ von jedem $\mathfrak{G}_\nu$ eine π^*-Hallgruppe enthält, enthält $\mathfrak{H}$ nach 4.1 eine π^*-Hallgruppe $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}^*$ nach A ebenfalls die Gestalt 4.2′ hat und $\mathfrak{H}$ eine minimale Gruppe dieser Art ist, folgt $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^*$, also ist $\mathfrak{H}$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$.

5. HALLGRUPPEN MIT MEHREREN SYLOWTÜRMEN. Wie bisher sei eine Menge π von Primzahlen gegeben. Wir wollen aber jetzt nicht nur eine einzelne vollständige Ordnung $*$ von π betrachten, sondern eine beliebig gegebene Menge von solchen, etwa $O = \{*, **, \ldots\}$.

DEFINITION 5.1. *Unter einer π^O-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine π-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$, die sowohl einen π^*-Turm wie einen π^{**}-Turm usw. im Sinne von Definition 1.1 besitzt.*

Wir fragen, wann das Erzeugnis subnormaler Untergruppen eine π^O-Hallgruppe enthält. Zur Vorbereitung beweisen wir die folgende Bemerkung:

HILFSSATZ 5.2. *Es seien $*$ und $**$ vollständige Ordnungen von π. In $\mathfrak{G}$ gebe es eine π-Hallgruppe, die sowohl einen π^*-Turm wie einen π^{**}-Turm besitzt. Dann sind die π^*-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ identisch mit den π^{**}-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$.*

BEWEIS. Sei $O = \{*, **\}$, $\mathfrak{G}^O$ eine π^O-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ eine π^*-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$. Nach 2.6 sind $\mathfrak{G}^O$ und $\mathfrak{G}^*$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Daher besitzt $\mathfrak{G}^*$ einen π^{**}-Turm, ist also auch eine π^{**}-Hallgruppe. Ebenso ist jede π^{**}-Hallgruppe zugleich eine π^*-Hallgruppe.

Dieser Hilfssatz genügt noch nicht, um den Existenzsatz 3.1 auf die π^O-Hallgruppen zu erweitern; denn aus der Existenz der $\mathfrak{G}_\nu^O$ folgt zunächst nur die Existenz eines $\mathfrak{G}^*$ und eines $\mathfrak{G}^{**}$, woraus auch mit 5.2 noch nicht auf die Existenz von $\mathfrak{G}^O$ geschlossen werden kann. Wenn wir jedoch die kennzeichnende Extremaleigenschaft heranziehen, so folgt aus der Existenz der $\mathfrak{G}_\nu^O$ nach dem Hilfssatz, daß die $\mathfrak{G}_\nu^*$ mit den $\mathfrak{G}_\nu^{**}$ identisch sind. Dann sind aber auch die beiden durch Satz 4.2 gegebenen Darstellungen von $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}^{**}$ identisch, also ist dann jedes $\mathfrak{G}^*$ zugleich ein $\mathfrak{G}^{**}$, das heißt ein $\mathfrak{G}^O$. Damit können wir die folgende Zusammenfassung und Erweiterung aller bisherigen Ergebnisse aussprechen:

HAUPTSATZ 5.3. *Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei das Erzeugnis subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Es sei O eine Menge von vollständigen Ordnungen* *einer gegebenen Menge π von Primzahlen. Genau dann enthält $\mathfrak{G}$ eine π^O-Hallgruppe im Sinne der Definition 5.1, wenn jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eine π^O-Hallgruppe enthält. Die $\mathfrak{G}^O$ sind die minimalen unter den Erzeugnissen $\langle\mathfrak{G}_1^O, \ldots, \mathfrak{G}_n^O\rangle$, wenn $\mathfrak{G}_\nu^O$ alle π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$ durchläuft.*

Wenn eine π-Gruppe mehrere π-Sylowtürme besitzt, so sind die möglichen Anordnungen von π nicht unabhängig voneinander. Wenn z.B. eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ Sylowtürme zu den drei Anordnungen (pqr), (qrp), (rpq) besitzt, so enthält sie je eine normale p-, q- und r-Sylowgruppe, d.h. sie ist nilpotent; dann aber besitzt sie Sylowtürme zu allen sechs möglichen Anordnungen von p, q, r. Als Nebenergebnis dieser Überlegung können wir dem Sonderfall des Hauptsatzes, der durch Aufnahme *aller* Anordnungen von π in die Menge O entsteht, die folgende Form geben:

5.4. *In* 5.3 *darf man „π^*-Hallgruppe" überall durch „nilpotente π-Hallgruppe" ersetzen.*

Welche Anordnungen von π-Sylowtürmen bei einer gegebenen π-Gruppe $\mathfrak{G}$ auftreten können, hat Baer [*1*] ermittelt. Es sind das diejenigen *vollständigen* Ordnungen von π, die mit einer durch $\mathfrak{G}$ bestimmten *teilweisen* Ordnung σ von π verträglich sind. Umgekehrt gibt es zu jeder teilweisen Ordnung σ von π auch π-Gruppen, welche die mit σ verträglichen Anordnungen von π-Sylowtürmen gestatten, aber keine andern; es sind dies genau die von Baer eingeführten σ-verstreuten π-Gruppen. Ihre nicht ganz kurze Definition findet man z.B. in [*1*] auf S. 242.

Auf Grund dieses Zusammenhanges läßt sich der Hauptsatz auch als ein Satz über σ-verstreute Hallgruppen formulieren:

5.5. *In* 5.3 *darf man „π^O-Hallgruppe" überall durch „σ-verstreute π-Hallgruppe" ersetzen, wenn anstelle von O eine teilweise Ordnung σ von π gegeben ist.*

6. Die Anzahl der π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$. Wieder sei $\mathfrak{G}$ das Erzeugnis subnormaler Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$; π sei eine Menge von Primzahlen, O eine Menge von Ordnungen von π. Wir bezeichnen die Anzahl der verschiedenen π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ mit N, die entsprechende Anzahl für $\mathfrak{G}_\nu$ mit N_ν. Dann können wir den Existenzsatz so aussprechen: Sind alle $N_\nu \neq 0$, so ist $N \neq 0$. Dies legt die Frage nach genaueren Aussagen über den Einfluß der N_ν auf N nahe. Wir beweisen:

Satz 6.1. A. *N teilt $|\mathfrak{G}|$; kein Primfaktor von N liegt in π.*

B. *Es ist $N_\nu | N$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n$.*

C. *N enthält genau dieselben Primfaktoren wie $N_1 N_2 \ldots N_n$.*

D. *Es ist $N \leqq N_1 N_2 \ldots N_n$.*

Beweis. A. Je zwei π^O-Hallgruppen $\mathfrak{G}^O$ von $\mathfrak{G}$ sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert (2.6). Daher ist N der Index des Normalisators von $\mathfrak{G}^O$ in $\mathfrak{G}$, also ein Teiler von $|\mathfrak{G}:\mathfrak{G}^O|$.

B. Wir können $N > 0$ annehmen. Wir verteilen die N π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$ auf Äquivalenzklassen, indem wir die zusammenfassen, die denselben Durchschnitt mit $\mathfrak{G}_\nu$ haben (ν fest). Die auftretenden Durchschnitte sind π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}_\nu$, und zwar treten alle N_ν derartigen Gruppen wirklich auf, da sie zueinander in $\mathfrak{G}_\nu$ konjugiert sind. Also gibt es genau N_ν Äquivalenzklassen, und je zwei Klassen sind konjugiert, enthalten also die gleiche Anzahl, etwa k_ν, von π^O-Hallgruppen von $\mathfrak{G}$. Daher ist $N = k_\nu N_\nu$.

C. Nach B ist jeder Primfaktor von $N_1 N_2 \ldots N_n$ auch einer von N. Sei nun umgekehrt p eine Primzahl, die in keinem der N_ν aufgeht; zu zeigen ist, daß p auch nicht in N aufgeht. Die Voraussetzung besagt, daß der Index des Normalisators einer π^O-Hallgruppe $\mathfrak{G}_\nu^O$ in $\mathfrak{G}_\nu$ nicht durch p teilbar ist. Dann enthält dieser Normalisator eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$. Multiplizieren wir $\mathfrak{G}_\nu^O$ mit dieser Sylowgruppe, so entsteht eine ϱ^O-Hallgruppe von $\mathfrak{G}_\nu$, wenn wir unter ϱ^O die Menge $\pi \cup p$ in denjenigen Anordnungen verstehen, die aus π^O durch Hinzufügen von p als höchstem Element entstehen (wir können annehmen, daß p nicht in π liegt, da sonst p schon nach A nicht in N aufgeht). Unter unserer Voraussetzung enthält also jedes $\mathfrak{G}_\nu$ eine ϱ^O-Hallgruppe, daher enthält nach dem Existenzsatz auch $\mathfrak{G}$ eine solche. Das besagt aber, daß der Normalisator einer π^O-Hallgruppe $\mathfrak{G}^O$ von $\mathfrak{G}$ eine volle p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ enthält, also ist sein Index N nicht durch p teilbar.

D. Jede π^O-Hallgruppe von $\mathfrak{G}$ läßt sich nach 5.3 auf mindestens eine Art in der Form $\mathfrak{G}^O = \langle \mathfrak{G}_1^O, \ldots, \mathfrak{G}_n^O \rangle$ darstellen. Also ist die Anzahl N der verschiedenen Gruppen $\mathfrak{G}^O$ höchstens gleich der Anzahl $N_1 N_2 \ldots N_n$ der verschiedenen n-tupel $\mathfrak{G}_1^O, \ldots, \mathfrak{G}_n^O$. Damit ist der Beweis des Satzes 6.1 beendet.

Die Aussagen 6.1 C und D legen die Vermutung nahe, daß N ein Teiler von $N_1 N_2 \ldots N_n$ ist. Doch scheinen die bisher entwickelten Hilfsmittel zum Beweis nicht auszureichen.

Literatur

[1] BAER, R.: Sylowturmgruppen. Math. Z. **69**, 239–246 (1958). — [2] HALL, P.: Theorems like Sylow's. Proc. London math. Soc. (3) **6**, 286–304 (1956). — [3] HUPPERT, B.: Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409–434 (1954). — [4] WIELANDT, H.: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209–244 (1939). — [5] WIELANDT, H.: Sylowgruppen und Kompositionsstruktur. Abh. math. Sem. Hamburg **22**, 215–228 (1958). — [6] ZASSENHAUS, H.: Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937; zweite Auflage (englisch) Göttingen 1958.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 14. März 1960)