

## Über die bistellare Äquivalenz simplicialer Sphären und Polytope

Udo Pachner

Math. Institut der Universität Bochum, Postfach 102148, D-4630 Bochum,  
Bundesrepublik Deutschland

### 1. Begriffe und Bezeichnungen

Sei  $\mathcal{C}$  ein endlicher simplicialer  $(d-1)$ -Komplex. Die Elemente aus  $\mathcal{C}$  heißen *Zellen* von  $\mathcal{C}$ , *Ecken* von  $\mathcal{C}$  sind die 0-Zellen, *Kanten* die 1-Zellen und *Facetten* die  $(d-1)$ -Zellen von  $\mathcal{C}$ . Für  $A \in \mathcal{C}$  bezeichnet  $\text{st}(A; \mathcal{C}) := \{B \in \mathcal{C} : A \subset B\}$  den *Stern* von  $A$  in  $\mathcal{C}$ ,  $\text{clst}(A; \mathcal{C})$  ist der kleinste  $\text{st}(A; \mathcal{C})$  enthaltende Subkomplex von  $\mathcal{C}$ ,  $\text{ast}(A; \mathcal{C}) := \{B \in \mathcal{C} : B \cap A = \emptyset\}$  heißt *Antistern* und  $\text{link}(A; \mathcal{C}) := \text{clst}(A; \mathcal{C}) \cap \text{ast}(A; \mathcal{C})$  *Verkettungskomplex* von  $A$  in  $\mathcal{C}$ . Die *Trägermenge* von  $\mathcal{C}$  ist definiert durch  $\text{set } \mathcal{C} := \cup \{A : A \in \mathcal{C}\}$ .

Für ein (konvexes) Polytop  $P$  bezeichnet  $\mathcal{F}(P)$  den Seitenverband von  $P$  (einschließlich  $\emptyset$  und  $P$ ) und  $\mathcal{B}(P) = \mathcal{F}(P) \setminus \{P\}$  den Randkomplex von  $P$ . Es ist  $\text{bd } P = \text{set } \mathcal{B}(P)$  der Rand von  $P$  und  $\text{int } P = P \setminus \text{bd } P$  das Innere von  $P$ . Die Gesamtheit der Ecken von  $P$  wird mit  $\text{vert } P$  bezeichnet. Im folgenden steht  $T^d$  stets für ein  $d$ -dimensionales Simplex.

Als (elementare) *stellare Unterteilung* von  $\mathcal{C}$  definieren wir wie üblich eine Operation der folgenden Art:

$$(1.1) \quad \sigma_{(A,a)} \mathcal{C} := (\mathcal{C} \setminus \text{st}(A; \mathcal{C})) \cup a \cdot \mathcal{B}(A) \cdot \text{link}(A; \mathcal{C}).$$

Hierbei bezeichnet „ $\cdot$ “ die Verbindung („join“ in [8, 9]) und  $a$  ist ein geeignet zu wählender Punkt (z.B. ist  $a \in \text{int } A$  stets geeignet). Interessiert nur das kombinatorische Ergebnis der Operation, so schreiben wir kurz  $\sigma_{(A,a)} = \sigma_A$ . Wir nennen  $\sigma_A$  eine *Facettenteilung*, wenn  $A$  eine Facette von  $\mathcal{C}$  ist. Bei Vorliegen von (1.1) heißt  $\mathcal{C} = \sigma_A^{-1}(\sigma_A \mathcal{C})$  eine *inverse stellare Unterteilung* von  $\sigma_A \mathcal{C}$ . Die Bedeutung dieser Operation liegt unter anderem darin, daß die p.l. Homöomorphie von Polyedern im euklidischen Raum  $E^d$  äquivalent damit ist, daß sich Triangulierungen dieser Polyeder durch stellare Unterteilungen und inverse ineinander überführen lassen [1, 9]. Es sei bemerkt, daß im folgenden mit Sphären, Kugeln stets p.l. Sphären bzw. p.l. Kugeln, mit kombinatorischen Sphären bzw. Kugeln stets endliche simplicialerlegungen von Sphären bzw. Kugeln gemeint sind.

Bei vielen kombinatorischen Untersuchungen sind *bistellare Operationen* übersichtlicher als stellare Operationen:

$$(1.2) \quad \chi_A \mathcal{C} := \sigma_B^{-1} \sigma_A \mathcal{C} = (\mathcal{C} \setminus A \cdot \mathcal{B}(B)) \cup \mathcal{B}(A) \cdot B.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß  $A$  eine  $k$ -Zelle aus  $\mathcal{C}$  ( $0 \leq k < d-1$ ) und  $B$  ein  $(d-1-k)$ -Simplex mit den Eigenschaften  $B \notin \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{B}(B) = \text{link}(A; \mathcal{C})$  ist. Für  $0 < k < d-1$  gilt  $\chi_B \chi_A \mathcal{C} = \mathcal{C}$  d.h. anders als bei den stellaren Unterteilungen sind hier die inversen Operationen ebenfalls bistellare Operationen. Deshalb und wegen  $\chi_A \mathcal{C} = \sigma_B^{-1} \mathcal{C}$  für  $k=0$  setzen wir  $\chi_A \mathcal{C} := \sigma_A \mathcal{C}$  (Facettenteilung) für  $k=d-1$ . Figur 1 vermittelt eine anschauliche Vorstellung von bistellaren Operationen.

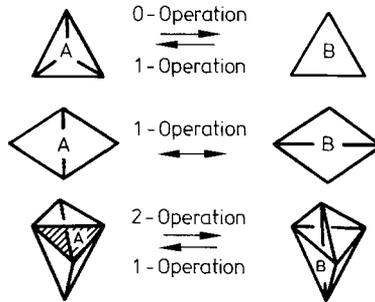


Fig. 1

Zwei kombinatorische Sphären heißen *bistellar äquivalent* ( $\mathcal{C} \stackrel{\text{bst}}{\sim} \mathcal{C}'$ ), wenn sie durch bistellare Operationen ineinander überführt werden können.

Sei nun  $\mathcal{C}' = \chi_A \mathcal{C}$  und  $p \in \text{link}(A; \mathcal{C})$  (also  $\dim A < d-1$ ). Dann gilt  $B = p \cdot T$  für ein  $T \in \mathcal{C}$  und  $F := A \cdot T$  ist eine Facette von  $\mathcal{C}$ . Durch  $p, F$  ist  $\chi_A$  dann ebenfalls eindeutig bestimmt, was wir durch  $\chi_A = \chi_{(p, F)}$  ausdrücken. Es gilt dann:

$$(1.3) \quad \text{clst}(p; \mathcal{C}) \cap \mathcal{F}(F) = \text{clst}(A; \mathcal{B}(F)) = \mathcal{F}(A) \cdot \mathcal{B}(T).$$

Solche bistellaren Operationen mit ausgezeichnetem Punkt  $p$  haben eine Beziehung zu Schälungen von Komplexen. Ist nämlich  $p$  eine Ecke einer kombinatorischen  $(d-1)$ -Sphäre, so ergibt sich aus der Existenz einer Äquivalenzkette

$$\chi_{(p, F_1)} \cdots \chi_{(p, F_r)} \mathcal{C} = \mathcal{B}(T^d)$$

wegen (1.3) eine Anordnung  $F_0, F_1, \dots, F_r$  der Facetten aus  $\text{ast}(p; \mathcal{C})$ , für die gilt:

$$(1.4) \quad F_k \cap \left( \bigcup_{i=0}^{k-1} F_i \right) \quad \text{ist eine } (d-2)\text{-Kugel für } 1 \leq k \leq r.$$

Diese Anordnungsmöglichkeit – hier von  $\text{ast}(p; \mathcal{C})$  – bezeichnet man als *Schälbarkeit* einer Kugel. Läßt man in (1.4) für  $k=r$  als Durchschnitt auch eine  $(d-2)$ -Sphäre zu, so erhält man den Schälbarkeitsbegriff für kombinatorische Sphären. In [6] findet man einen ausführlichen Überblick über diesen Problemkreis.

## 2. Ergebnisse über Schälungen und bistellare Äquivalenzen

Eines der bedeutendsten Ergebnisse über Schälungen haben Brugesser und Mani [5] gefunden.

**2.1 Theorem.** *Randkomplexe konvexer Polytope sind schälbar.*

In [5] wird darüber hinaus gezeigt, daß man beim Schälen von Polytopen mit den Facetten des Sterns einer beliebigen Ecke beginnen und hierbei noch genauer beschriebene Anordnungen wählen kann.

Schälungen von Sphären sind beim Studium von Cohen-Macaulay-Ringen benutzt worden [10, 16] und spielten eine Schlüsselrolle beim ersten Beweis der Upper Bound Conjecture [12, 15]. Ungelöst ist immer noch:

**2.2 Problem.** *Ist für  $d \geq 4$ , jede kombinatorische  $(d-1)$ -Sphäre schälbar?*

Ebenfalls unbeantwortet ist die schwächere Frage:

**2.3 Problem.** *Sind kombinatorische Sphären gleicher Dimension stets bistellar äquivalent?*

Für niedrige Dimensionen ist dieses Problem in [14] positiv beantwortet.

**2.4 Theorem.** *Für  $d \leq 5$  ist jede kombinatorische  $(d-1)$ -Sphäre bistellar äquivalent zu  $\mathcal{B}(T^d)$ .*

Mit der Methode von Brugesser/Mani hat Ewald [7] dieses Problem auch für Polytope gelöst.

**2.5 Theorem.** *Der Randkomplex eines simplizialen  $d$ -Polytops  $P$  ist stets bistellar äquivalent zu  $\mathcal{B}(T^d)$ . Die Überführung von  $\mathcal{B}(P)$  in  $\mathcal{B}(T^d)$  kann dabei so vollzogen werden, daß keine  $(d-1)$ -Operation (Facettenteilung) vorkommt und jede Zwischensphäre polytopal ist.*

Wir geben noch einen Zusammenhang zwischen Problem 2.2 und 2.3 an.

**2.6 Lemma.** *Ist eine kombinatorische  $(d-1)$ -Sphäre  $\mathcal{S}$  nicht oder nur unter Verwendung von mindestens zwei  $(d-1)$ -Operationen bistellar in  $\mathcal{B}(T^d)$  überführbar, so ist  $\mathcal{S}$  nicht schälbar. Ist mindestens eine  $(d-1)$ -Operation notwendig, so sind die Antisterne sämtlicher Ecken von  $\mathcal{S}$  nicht schälbar.*

Ansatzpunkt für ein Gegenbeispiel könnten Untersuchungen von Kleinschmidt [11] liefern:

**2.7 Theorem.** *Es gibt eine 3-Sphäre mit 15 Ecken, bei der der Antistern einer Ecke nicht schälbar ist.*

Sei nun  $\mathcal{S}_{(n,d-1)}$  das System der kombinatorischen  $(d-1)$ -Sphären mit  $n$  Ecken. Wir fassen nun die Sphären als Ecken eines Graphen auf, wobei zwei Sphären genau dann durch eine Kante miteinander verbunden sind, wenn sie durch eine bistellare  $k$ -Operation ineinander überführt werden können (da die Eckenzahl unverändert bleibt, muß  $0 < k < d-1$  sein). Der so erhaltene ungerichtete Graph  $\mathcal{G}_{(n,d-1)}$  heiße  $\chi$ -Graph von  $\mathcal{S}_{(n,d-1)}$ . Altshuler, Bokowski und Steinberg [2] haben mit Hilfe eines Rechners gezeigt:

**2.8 Theorem.**  $\mathcal{G}_{(n,3)}$  ist für  $n \leq 9$  zusammenhängend.

Hiermit lassen sich dann alle kombinatorischen Typen aus  $\mathcal{G}_{(n,3)}$ ,  $n \leq 9$ , bestimmen [2].

Die Autoren vermuten, daß  $\mathcal{G}_{(n,3)}$  für alle  $n$  zusammenhängend ist. Zu diesem Problem ist in [14] gezeigt worden:

**2.9 Theorem.** Es gibt einen zusammenhängenden Subgraphen  $\mathcal{G}'_{(n,d-1)}$  von  $\mathcal{G}_{(n,d-1)}$ , der genau die  $(d-1)$ -Sphären mit  $n$  Ecken enthält, die bistellar ohne  $(d-1)$ -Operationen in  $\mathcal{B}(T^d)$  überführt werden können. Hierzu zählen z.B.

- (1) Die Randkomplexe aller simplizialen  $(d-1)$ -Polytope mit  $n$ -Ecken.
- (2) Alle kombinatorischen  $(d-1)$ -Sphären mit  $n$  Ecken, bei denen der Antistern mindestens einer Ecke schälbar ist.

Es sei bemerkt, daß der Zusammenhang von  $\mathcal{G}_{(n,d-1)}$  gleichbedeutend mit  $\mathcal{G}_{(n,d-1)} = \mathcal{G}'_{(n,d-1)}$  ist.

Auf Anregung von Altshuler haben wir uns um eine Verschärfung von Theorem 2.9 (1) bemüht. Zur einfachen Formulierung definieren wir:

**2.10 Definition.** Zwei simpliziale  $d$ -Polytope  $P, P'$  heißen g.b. äquivalent (geometrisch bistellar äquivalent), wenn es eine Kette  $P = P_0, \dots, P_r = P'$  von Polytopen gibt, wobei  $\mathcal{B}(P_i) \approx \chi_{A_i} \mathcal{B}(P_{i-1})$  gilt. Haben alle Polytope der Kette gleiche Eckenzahl, so heißen  $P, P'$  s.g.b. äquivalent.

**2.11 Theorem.** Simpliziale  $d$ -Polytope gleicher Eckenzahl sind stets s.g.b. äquivalent.

**Korollar.** Der Subgraph von  $\mathcal{G}_{(n,d-1)}$ , der von den Randkomplexen simplizialer Polytope aufgespannt wird, ist für alle  $n, d$  zusammenhängend.

Wir beweisen das Theorem zunächst für Stapelpolytope.

**2.12 Definition.**

- (1) Ein  $d$ -Polytop  $P$  heißt Stapelpolytop, wenn  $\mathcal{B}(P)$  isomorph zu  $\sigma_{F_r} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d)$  ist, wo die  $\sigma_{F_i}$  Facettenteilungen sind.
- (2) Seien  $P, P'$  simpliziale  $d$ -Polytope,  $p$  eine Ecke von  $P$  und  $\mathcal{B}(P')$  isomorph zu  $\text{ast}(p; \mathcal{B}(P)) \cup \sigma_{F_r} \dots \sigma_{F_1} \text{st}(p; \mathcal{B}(P))$ , wo die  $\sigma_{F_i}$  Facettenteilungen sind. Dann heißt  $P'$  eine  $p$ -Stapelung von  $P$  (mit  $r$  Ecken).

*Bemerkungen.* 1. Stapelpolytope spielen eine Rolle im Zusammenhang mit der Lower Bound Conjecture [3, 17].

2. Man beachte, daß in (2)  $F_i$  eine Facette aus  $\sigma_{F_{i-1}} \dots \sigma_{F_1} \text{st}(p; \mathcal{B}(P))$  ist und nicht eine Facette aus  $\text{st}(p; \sigma_{F_{i-1}} \dots \sigma_{F_1} \text{st}(p; \mathcal{B}(P)))$  oder gar aus  $\text{st}(p; \mathcal{B}(P))$  zu sein braucht. Hieraus ergibt sich folgendes. Ist  $P'$  eine  $p$ -Stapelung von  $P$  und  $P''$  eine  $p$ -Stapelung von  $P'$ , so ist  $P''$  eine  $p$ -Stapelung von  $P$ . Ist  $P'$  eine  $p$ -Stapelung von  $P$ ,  $p' \in \text{link}(p; \mathcal{B}(P'))$  und  $P''$  eine  $p'$ -Stapelung von  $P'$ , so ist  $P''$  ebenfalls eine  $p$ -Stapelung von  $P$ .

**2.13 Lemma.** Stapelpolytope gleicher Dimension und Eckenzahl sind s.g.b. äquivalent.

*Beweis.* Sei  $P$  ein simpliziales  $d$ -Polytop,  $F_1, F_2$  Facetten von  $P$  und  $S := F_1 \cap F_2$  eine  $(d-2)$ -Seite von  $P$ . Dann gilt

$$\chi_S \sigma_{F_1} \mathcal{B}(P) \approx \chi_S \sigma_{F_2} \mathcal{B}(P).$$

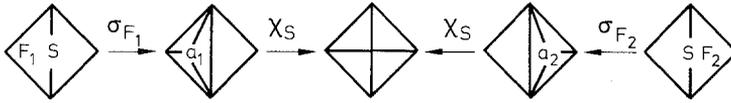


Fig. 2

Offensichtlich kann man  $\chi_S \sigma_{F_1} \mathcal{B}(P)$  polytopal realisieren, indem man die Ecke  $a_1$  von  $\sigma_{F_1} \mathcal{B}(P)$  bzw.  $a_2$  von  $\sigma_{F_2} \mathcal{B}(P)$  geeignet „hochzieht“.  $\sigma_{F_1} \mathcal{B}(P)$ ,  $\sigma_{F_2} \mathcal{B}(P)$  sind also s.g.b. äquivalent.

Sei nun  $\mathcal{B}(P) = \sigma_{F_r} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d)$  ein Stapelpolytop. Ohne Einschränkung kann man  $T^d = a_0 \cdot S \cdot b$  annehmen, wobei  $a_0 \cdot S$  eine Facette von  $\mathcal{B}(P)$  ist.

$\mathcal{B}(P)$  ist als geschlossene Pseudomannigfaltigkeit stark zusammenhängend d.h. es existiert eine Kette  $F_i := F'_s, \dots, F'_1, F'_0 := a_0 \cdot S$  von Facetten von  $P$ , wobei  $F'_i \cap F'_{i-1}$  stets eine  $(d-2)$ -Seite von  $P$  ist. Durch  $s$ -fache Anwendung des obigen Prozesses erhält man dann, daß  $\mathcal{B}(P)$  s.g.b. äquivalent zu

$$\sigma_{(a_0 \cdot S, a_1)} \sigma_{F_{r-1}} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d) = \sigma_{F_{r-1}} \sigma_{(a_0 \cdot S, a_1)} \sigma_{F_{r-2}} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d)$$

ist.

Analog ist letzteres Stapelpolytop dann s.g.b. äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\sigma_{(a_1 \cdot S, a_2)} \sigma_{(a_0 \cdot S, a_2)} \sigma_{F_{r-2}} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d) \\ &= \sigma_{F_{r-2}} \sigma_{(a_1 \cdot S, a_2)} \sigma_{(a_0 \cdot S, a_1)} \sigma_{F_{r-3}} \dots \sigma_{F_1} \mathcal{B}(T^d). \end{aligned}$$

Letztlich erhält man, daß  $\mathcal{B}(P)$  s.g.b. äquivalent zu  $\sigma_{(a_{r-1} \cdot S, a_r)} \dots \sigma_{(a_0 \cdot S, a_1)} \mathcal{B}(T^d)$  ist.

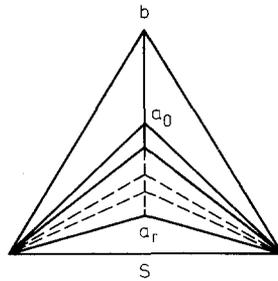


Fig. 3

Da dieses Stapelpolytop vom kombinatorischen Typ her eindeutig und unabhängig von  $P$  ist, folgt der Satz auf Grund der Transitivität der s.g.b. Äquivalenz.

Zur Formulierung des nächsten Hilfsatzes benötigen wir zuvor eine kurze Beschreibung des Verfahrens von Ewald in [7]. Sei dazu  $P$  ein simpliziales  $d$ -Polytop,  $F_0$  eine Facette von  $P$ ,  $0 \in \text{int} F_0$  und  $u$  ein Normalenvektor zu  $\text{aff} F_0$  derart, daß das innere Produkt  $\langle x, u \rangle \geq 0$  für alle  $x \in P$  ist.

Gegebenenfalls nach Anwendung einer zulässigen projektiven Transformation kann man annehmen, daß die Orthogonalprojektion in  $\text{aff} F_0$  alle Ecken aus

vert  $P \setminus \text{vert } F_0$  in  $\text{int } F_0$  abbildet. Ferner sei nun  $p \in \text{vert } P \setminus \text{vert } F_0$  beliebig. Gegebenenfalls nach Anwendung einer kleinen Verrückung von  $p$  kann man annehmen:

(2.14) Die affinen Hüllen der Facetten  $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{B}(P) \setminus (\text{st}(p; \mathcal{B}(P)) \cup \{F_0\})$  schneiden den Strahl  $p + \mathbb{R}^+ u$  in paarweise verschiedenen Punkten  $x_i$ , die affinen Hüllen niedrig dimensionaler Seiten schneiden den Strahl nicht.

Bezüglich der natürlichen Anordnung auf  $p + \mathbb{R}^+ u$  gelte  $p := x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ . Zieht man nun  $p$  in Richtung  $u$  nach  $\infty$ , so ändert sich der kombinatorische Typ von  $P(p + \lambda u) := \text{conv}(P \cup \{p + \lambda u\})$  genau bei Überschreiten der Punkte  $x_i$  d.h. wenn man eine neue Facette sieht. Für  $x_{i-1} < y_{i-1} < x_i < y_i < x_{i+1}$  gilt:

$$\mathcal{B}(P(y_i)) \approx \chi_{(y_{i-1}, F_i)} \mathcal{B}(P(y_{i-1})) =: \chi_{A_i} \mathcal{B}(P(y_{i-1})).$$

Nach Überschreiten von  $x_r$  hat man dann  $\mathcal{B}(P)$  durch  $r$  bistellare  $k$ -Operation,  $0 \leq k < d-1$ , in  $\mathcal{B}(T^d)$  überführt:

(2.15) 
$$\chi_{A_r} \dots \chi_{A_i} \dots \chi_{A_1} \mathcal{B}(P) \approx \mathcal{B}(T^d).$$

Die Idee ist nun die, das Verfahren so abzuändern, daß man immer wenn in (2.15) eigentlich eine inverse Facettenteilung auftaucht, also  $A_j = \{a_j\}$  eine Ecke ist, man diese Ecke nicht verschwinden läßt, sondern abwechselnd mit  $p$  und den anderen Ecken, die man zuvor nicht hat verschwinden lassen, in Richtung  $u$  hinauszieht, und auf diese Weise  $P$  durch bistellare  $k$ -Operationen,  $0 < k < d-1$ , in ein Stapelpolytop überführt. Um den komplizierten Vorgang in den Griff zu bekommen, führen wir einen Induktionsbeweis.

**2.16 Lemma.** *Unter den Operationen  $\chi_{A_i}, \dots, \chi_{A_1}$  in (2.15) seien genau  $m$  inverse Facettenteilungen. Dann existiert ein Polytop  $\tilde{P}_i$  mit:*

- (1)  $\tilde{P}_i$  ist eine  $y_i$ -Stapelung von  $P(y_i)$  mit  $m$  Ecken.
- (2)  $\tilde{P}_i$  ist s.g.b. äquivalent zu  $P$ .

*Beweis.* Für  $m=0$  ist offensichtlich  $\tilde{P}_i = P(y_i)$  geeignet.

Ansonsten sei  $j := \max \{l : \dim A_l = 0, 1 \leq l \leq i\}$ . Nach Induktionsannahme existiert dann ein Polytop  $\tilde{P}_{j-1}$  für das (1), (2) entsprechend gilt. Als  $\tilde{P}_j$  kann man dann  $\tilde{P}_j = \tilde{P}_{j-1}$  wählen (Bemerkung 2. zu Definition 2.12!). Im Fall  $i=j$  ist man dann ebenfalls fertig. Sei also  $i > j$ . Nach (1) gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tilde{P}_i) &= \text{ast}(y_j, \mathcal{B}(P(y_j))) \cup \sigma_m \dots \sigma_1 \text{st}(y_j, \mathcal{B}(P(y_j))) \\ &= \text{ast}(y_j, \mathcal{B}(P(y_j))) \cup \sigma'_s \dots \sigma'_1 y_j \cdot A_{j+1} \cdot \mathcal{B}(B) \\ &\quad \cup \sigma'_t \dots \sigma'_1 (\text{st}(y_j, \mathcal{B}(P(y_j))) \setminus y_j \cdot A_{j+1} \cdot \mathcal{B}(B)). \end{aligned}$$

Hierbei gilt  $s+t=m$  und  $F_{j+1} = A_{j+1} \cdot B$  ist die  $(j+1)$ -te Facette, die beim Herausziehen von  $p$  gesehen wird.

Den Facetten von  $P(y_j)$  aus  $\text{st}(y_i, \mathcal{B}(P(y_i))) \setminus y_j \cdot A_{j+1} \cdot \mathcal{B}(B)$  sind durch Projektion in Richtung  $u$  eindeutig Facetten von  $P(x_{j+1})$  zugeordnet. Bezüglich dieser Zuordnung kann man  $\sigma'_t \dots \sigma'_1 (P(x_{j+1}))$  betrachten. Es sei

$$P'(x_{j+1}) = \text{conv}(P(x_{j+1}) \cup \{b_t, \dots, b_1\})$$

eine polytopale Realisierung von  $\sigma''_t \dots \sigma''_1 P(x_{j+1})$ , die man erhält, indem man jeweils innere Punkte der zu unterteilenden Facetten in Richtung  $u$  herauszieht. Wählt man dann  $y_j, y_{j+1}$  nahe genug an  $x_{j+1}$ , so gilt für

$$P'(y_j) := \text{conv}(P(x_j) \cup \{b_t, \dots, b_1\})$$

und

$$P'(y_{j+1}) := \text{conv}(P(x_{j+1}) \cup \{b_t, \dots, b_1\}):$$

$$\mathcal{B}(P'(y_j)) \approx \sigma''_t \dots \sigma''_1 \mathcal{B}(P(y_j)),$$

$$\mathcal{B}(P'(y_{j+1})) \approx \sigma''_t \dots \sigma''_1 \mathcal{B}(P(y_{j+1}))$$

und

$$\mathcal{B}(P'(y_{j+1})) \approx \chi_{A_{j+1}} \mathcal{B}(P'(y_j)).$$

Sei nun  $\sigma'_1 = \sigma_R$ .  $R$  ist eine gemeinsame Facette von  $P(y_j), P'(y_j)$ . Ferner sei  $a \in \text{int} R$  beliebig. Dann schneidet  $a + \mathbb{R}^+ u$   $\text{bd} P'(x_{j+1})$  in einen inneren Punkt  $a + \mu_0 u$  der Facette

$$C := \text{conv}(A_{j+1} \cup B \cup \{x_{j+1}\}) = \text{conv}(F_{j+1} \cup \{x_{j+1}\})$$

von  $P'(x_{j+1})$ . Für einen gewissen Bereich  $\mu > \mu_0$  sieht man dann von  $a + \mu u$  aus nur die Facette  $C$  von  $P'(x_{j+1})$  und keine andere. Indem man gegebenenfalls  $y_j$  noch näher an  $x_{j+1}$  wählt, erreicht man aus Stetigkeitsgründen, daß es ein  $\mu_1 > \mu_0$  gibt, so daß man von  $a + \mu_1 u$  aus genau die Facetten aus  $y_j \cdot A_{j+1} \cdot \mathcal{B}(B)$  von  $P'(y_j)$  sieht. Wir realisieren nun

$$\tilde{P}_j = \text{conv}(P'(y_j) \cup \{a_s, \dots, a_1\}) \approx \sigma'_s \dots \sigma'_1 P'(y_j),$$

indem wir wieder innere Punkte der entsprechenden Facetten in Richtung  $u$  geeignet herausziehen. Dabei kann man  $a_1 = a + \mu u$  mit  $0 < \mu < \mu_0$  wählen und die  $a_2, \dots, a_s$  so wählen, daß sie bez. der Richtung  $u$  unterhalb von  $C$  liegen. Zieht man nun  $a_1$  nach  $a'_1 := a + \mu_1 u$  hoch, und anschließend  $y_j$  nach  $x_{j+1}$  (bei letzterem ändert sich der kombinatorische Typ nicht), so überführt man  $\mathcal{B}(\tilde{P}_j)$  in einen Ewaldschen Prozeß durch bistellare Operation in den Randkomplex von  $P' := \text{conv}(P(x_{j+1}) \cup \{a'_1\})$ , wobei

$$\mathcal{B}(P') = \mathcal{B}(P(x_{j+1})) \setminus \{C\} \cup a'_1 \cdot \mathcal{B}(C)$$

gilt.

Da bei diesem Prozeß genau die Ecken  $a_2, \dots, a_s$  verschwinden, ist die Anzahl der bistellaren 0-Operationen dabei gleich  $s - 1 = s + t - 1 = m - 1 < m$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann eine  $a'_1$ -Stapelung  $P''(x_{j+1})$  von  $P'$  mit  $s - 1$  Ecken, die s.g.b. äquivalent zu  $\tilde{P}_j$  also auch zu  $P$  ist. Wir realisieren nun

$$P''(x_{j+1}) = \text{conv}(P' \cup \{a'_s, \dots, a'_2\}) = \text{conv}(P(x_{j+1}) \cup \{a'_s, \dots, a'_1\})$$

durch Herausziehen von inneren Punkten der entsprechenden Facetten in Richtung  $u$ . ( $a'_1$  braucht dabei nicht mit dem obigen  $a'_1$  übereinstimmen!) Dies kann sicher so geschehen, daß  $a'_s, \dots, a'_1$  im Inneren von  $P'(y_{j+1})$  liegen und daß (2.14) entsprechend gilt. Würde man nun  $x_{j+1}$  bis  $y_{j+1}$  ziehen, so würden die Ecken  $a'_s, \dots, a'_1$  verschwinden und man erhielte  $P'(y_{j+1})$ . Wir ziehen nun  $x_{j+1}$  nur

soweit, daß alle Ecken  $a'_s, \dots, a'_1$  bis auf genau eine, sagen wir  $a'_1$ , verschwinden, und dann noch soweit, bis man alle Facetten aus dem Stern von  $a'_1$  bis auf genau eine sieht. Wir können nun annehmen, daß wir den entsprechenden näher an  $x_{j+1}$  liegenden Punkt auf  $x_{j+1} + \mathbb{R}^+ u$  schon zuvor als  $y_{j+1}$  gewählt haben. Bei diesem erneuten Ewaldschen Prozeß haben wir dann  $P''(x_{j+1})$  in

$$P''(y_{j+1}) := \text{conv}(P'(y_{j+1}) \cup \{a'_1\})$$

überführt, wobei

$$\mathcal{B}(P''(y_{j+1})) = \sigma_{(Q, a_1)} \mathcal{B}(P'(y_{j+1}))$$

gilt ( $Q$  Facette aus  $y_{j+1} \cdot \mathcal{B}(A_{j+1}) \cdot B \in \text{st}(y_{j+1}, P'(y_{j+1}))$ ).

Wieder kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält eine  $y_{j+1}$ -Stapelung  $\tilde{P}_{j+1}$  von  $P''(y_{j+1})$  mit  $s-1$  Ecken, die s.g.b. äquivalent zu  $P''(x_{j+1})$  also auch zu  $P$  ist. Da  $\tilde{P}_{j+1}$  auch eine  $y_{j+1}$ -Stapelung von  $P'(y_{j+1})$  mit  $s$  Ecken und von  $P(y_{j+1})$  mit  $s+t=m$  Ecken ist (Bemerkung (2) zu Def. 2.12), haben wir in  $\tilde{P}_{j+1}$  ein geeignetes Polytop gefunden. Analog wie  $\tilde{P}_{j+1}$  aus  $\tilde{P}_j$  konstruiert man nun  $\tilde{P}_{j+2}$  aus  $\tilde{P}_{j+1}$  usw. bis man  $\tilde{P}_i$  erhält.

*Beweis von Theorem 2.11.* Setzt man in Lemma 2.16  $i=r$ , so erhält man eine  $y_r$ -Stapelung von  $P(y_r) = y_r \cdot F_0$  mit  $\text{card vert } P - d$  Ecken, also ein Stapelpolytop mit gleicher Eckenzahl wie  $P$ , welches s.g.b. äquivalent zu  $P$  ist. Zusammen mit Lemma 2.13 folgt dann sofort das Theorem.

### 3. Minimale bistellare Äquivalenzketten

Bei der Konstruktion kombinatorischer Sphären und simplizialer Polytope durch bistellare Operationen interessieren Abschätzungen für die Anzahl der benötigten Operationen. Diese Frage steht auch im engen Zusammenhang mit anderen Extremalproblemen bei Polytopen und Sphären.

Für ein simpliziales  $d$ -Polytop bezeichne nun  $l(P)$  die kleinste ganze Zahl  $r$ , zu der es eine bistellare Äquivalenzkette  $\mathcal{B}(P) \approx \chi_r \dots \chi_1 \mathcal{B}(T^d)$  gibt. Mit  $f_i = f_i(P)$  sei die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Seiten von  $P$  bezeichnet und  $v_{\max}(P)$  stehe für die Maximalzahl von Facetten, die in einer Ecke von  $P$  zusammenstoßen.

Als einziges Ergebnis zum angesprochenen Problemkreis liegt von Ewald [7] vor:

**3.1 Theorem.** *Es gilt  $l(P) \leq f_{d-1}(P) - v_{\max}(P) - 1$ .*

*Bemerkung.* Die Abschätzung ist nicht scharf. So gilt für das 3-Polytop  $P$  aus Fig. 4  $l(P) = 6$ , während die obige Abschätzung  $l(P) \leq 7$  liefert.

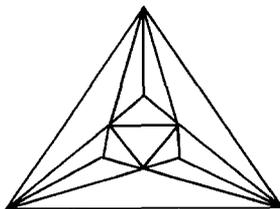


Fig. 4

Statt des  $f$ -Vektors  $f=(f_0, \dots, f_{d-1})$  eines Polytops  $P$  benutzen wir im folgenden den diesem umkehrbar eindeutig zugeordneten durch

$$(3.2) \quad h_i := \sum_{j=-1}^{i-1} (-1)^{i-j-1} \binom{d-j-1}{d-i} f_j$$

definierten  $h$ -Vektor  $h=(h_0, \dots, h_d)$  von  $P$ . Diese  $h$ -Vektoren sind identisch mit den algebraisch definierten  $h$ -Vektoren der Hilbertfunktion eines  $\mathcal{B}(P)$  in bestimmter Weise zugeordneten Cohen-Macaulay Ringes [10, 15] und haben eine wichtige Rolle bei der Lösung der Upper Bound Conjecture gespielt.

Unser Problem lautet nun:

**3.3 Problem.** *Man bestimme*

$$l_*(d, h) := \min \{l(P) : \dim P = d, h(P) = h\}$$

und

$$l^*(d, h) := \max \{l(P) : \dim P = d, h(P) = h\}.$$

Aus Theorem 3.1 erhält man:

**3.4 Korollar.** *Es gilt:*

$$l^*(d, h) \leq \left[ \frac{h_1}{h_1 + d} \sum_{i=0}^d h_i - 1 \right] \leq \sum_{i=0}^d h_i - d - 1$$

*Beweis.* Direkte Folgerung aus

$$f_{d-1} = \sum_{i=0}^d h_i \quad \text{und} \quad v_{\max} \geq \frac{d}{f_0} \cdot f_{d-1} = \frac{d}{h_1 + d} \cdot f_{d-1} \geq d.$$

*Bemerkung.* Es wäre überraschend, wenn diese Abschätzung scharf wäre. Aus der Bemerkung zu Theorem 3.1 erhält man jedoch kein Gegenbeispiel. Für den  $h$ -Vektor des Polytops  $P$  aus Fig. 4 erhält man nämlich durchaus  $l^*(3, (1, 6, 6, 1)) = 8$ , wie man leicht an dem Polytop mit gleichem  $h$ -Vektor in Fig. 5 überprüft.

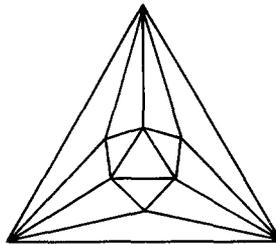


Fig. 5

Wir wollen nun untersuchen, wie sich der  $h$ -Vektor bei einer bistellaren  $k$ -Operation ändert. Aus (1.2) folgt, daß sich durch den Fortfall von  $A \cdot \mathcal{B}(B) f_i$  für  $i = k, \dots, d-1$  um  $\binom{d-k}{d-i}$  vermindert und sich andererseits durch die Hinzunahme von  $\mathcal{B}(A) \cdot B$  für  $i = d-k-1, \dots, d-1$  um  $\binom{k+1}{d-i}$  wächst. Zusammen mit (3.2) liefert dies die einfache Beziehung:

- (3.5) Ist  $2k \leq d-1$ , so fällt  $h_i$  für  $k < i < d-k$  um 1,  
 ist  $2k \geq d-1$ , so wächst  $h_i$  für  $d-1-k < i < k+1$  um 1.

Bezeichnet also  $\alpha_k$  die Anzahl der bistellaren  $k$ -Operationen in  $\mathcal{B}(P) \approx \chi_r \dots \chi_1 \mathcal{B}(T^d)$ , so erhält man

$$(3.6) \quad \begin{aligned} h_{i+1} - h_i &= \alpha_{d-1-i} - \alpha_i \quad \text{für } i=0, \dots, d-1 \\ h_i &= 1 + \sum_{k=d-i}^{d-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \quad \text{für } i=0, \dots, d. \end{aligned}$$

Bevor wir die erste Konsequenz hieraus ziehen, zunächst die folgende Definition.

3.7 *Definition.* Für natürliche Zahlen  $h, i$  sei

$$h = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j}$$

die eindeutige Darstellung von  $h$  mit der Maßgabe  $n_i > \dots > n_j \geq j \geq 1$  und es sei dann

$$h^{<i>} := \binom{n_i+1}{i+1} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}, \quad 0^{<i>} := 0.$$

Eine endliche oder unendliche Folge nicht negativer ganzer Zahlen  $(h_0, h_1, \dots)$  heißt 0-Sequenz, wenn gilt:

$$h_0 = 1, h_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>} \quad \text{für } i \geq 1.$$

Die von Stanley [17] für simpliziale Polytope bewiesene „g-Vermutung“ von McMullen [13] ist wegen (3.6) äquivalent mit der folgenden geometrischen Aussage:

3.8 **Theorem.** Für simpliziale Polytope ist

$$(1, \alpha_{d-1} - \alpha_0, \dots, \alpha_{d-[d/2]} - \alpha_{[d/2]-1})$$

stets eine 0-Sequenz.

Unabhängig davon, wie man  $\mathcal{B}(P)$  durch bistellare Operation aus  $\mathcal{B}(T^d)$  erhält, ist also  $\alpha_{d-1-k} - \alpha_k$  eine Invariante von  $\mathcal{B}(P)$  und die Anzahl der  $k$ -Operationen ist nie größer als die Anzahl der  $(d-1-k)$ -Operationen ( $k=0, \dots, [d/2]-1$ ). Zu unserem Problem (3.3) erhält man aus (3.6):

3.9 **Theorem.**  $l_*(d, h) \geq h_{[d/2]} - 1$ .

*Beweis.* Für jede bistellare Äquivalenzkette gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \\ & \geq \sum_{i=0}^{[d/2]-1} (\alpha_{d-1-i} - \alpha_i) \\ & = \sum_{i=0}^{[d/2]-1} (h_{i+1} - h_i) \\ & = h_{[d/2]} - h_0 \\ & = h_{[d/2]} - 1. \end{aligned}$$

Die Abschätzung in Theorem 3.9 ist offensichtlich genau dann scharf, wenn man zu jedem  $d, h$  ein simpliziales  $d$ -Polytop  $P$  mit  $h(P)=h$  durch bistellare Operation aus  $\mathcal{B}(T^d)$  konstruieren kann, wobei  $\alpha_k=0$  für  $k \leq [d/2]-1$  gilt. Für niedrige Dimensionen ist dies relativ einfach.

**3.10 Theorem.** Für  $d \leq 5$  gilt  $l_*(d, h) = h_{[d/2]} - 1$ .

*Beweis.* Für  $d=3$  erhält man mit den Stapelpolytopen sofort geeignete Polytope.

Sei also  $h=(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)=(1, h_1, h_2, h_1, 1)$   $h$ -Vektor eines simplizialen Polytops. Der Satz ist bewiesen, wenn es gelingt, aus  $\mathcal{B}(T^4)$  ein simpliziales 4-Polytop durch  $\alpha_3 := h_1 - h_0$  3-Operation und  $\alpha_2 := h_2 - h_1$  2-Operationen zu erzeugen. Nach Lemma 3.8 gilt:

$$\alpha_2 \leq \alpha_3^{\langle 1 \rangle} = \binom{\alpha_3 + 1}{2} = \sum_{i=1}^{\alpha_3} i.$$

Folglich existiert eine Darstellung

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^j i + k \quad \text{mit } 0 \leq k < j + 1 \leq \alpha_3.$$

Nun zur Beschreibung der Konstruktionsidee. Sei dazu  $P$  ein simpliziales 4-Polytop mit  $A=a_1 \cdot a_2$  als Kante. Dann ist  $\text{link}(A; \mathcal{B}(P))$  ein Kreis, sagen wir mit  $r$  Ecken  $b_1, \dots, b_r$ . Wir ziehen nun einen inneren Punkt  $a$  der Facette  $A \cdot b_1 \cdot b_2$  ( $b_1 \cdot b_2$  sei eine Kante aus  $\text{link}(A; \mathcal{B}(P))$ ) auf einem Strahl aus  $P$  hinaus. Wählt man  $a$  nahe genug an  $A$  und den Strahl ebenfalls geeignet, so erreicht man, daß man beim Herausziehen von  $a$  der Reihe nach die Facetten aus  $\text{st}(A; \mathcal{B}(P))$  sieht, bevor man irgend eine andere Facette von  $P$  sieht. Zieht man  $a$  bis hierhin, so ist der Randkomplex des erhaltenen Polytops isomorph zu

$$\sigma_{(A, a)} \mathcal{B}(P) = \chi_A \chi_{A \cdot b_{i_r}} \cdots \chi_{A \cdot b_{i_3}} \chi_{A \cdot b_1 \cdot b_2} \mathcal{B}(P).$$

Bricht man das Herausziehen von  $a$  ab, bevor man die letzte Facette aus  $\text{st}(A; \mathcal{B}(P))$  sieht, so geht das neue Polytop also aus der 3-Operation  $\chi_{A \cdot b_1 \cdot b_2}$  und den  $r-2$  2-Operationen  $\chi_{A \cdot b_{i_s}}$  aus  $\mathcal{B}(P)$  hervor. Wichtig ist noch, daß z.B. die Kante  $a_1 \cdot a$  des neuen Polytops nunmehr die  $r+1$  Ecken  $a_2 \cdot b_1, \dots, b_r$  im Verkettungskomplex hat, so daß man anschließend nach dem obigen Verfahren ein neues Polytop mit einer 3-Operation und  $(r+1)-2$  2-Operationen gewinnen kann.

Wendet man nun diesen Prozeß  $j$ -mal auf das 4-Simplex an, wobei man jeweils die zuvor entstandene Kante höherer Valenz benutzt, so erhält man ein Polytop, das aus  $j$  Facettenteilungen und  $\sum_{i=3}^{3+(j-1)} (i-2) = \sum_{i=1}^j i$  2-Operationen aus  $\mathcal{B}(T^4)$  hervorgeht. Gilt  $k > 0$ , so führt man den Prozeß nochmals durch, bricht aber das Herausziehen der neuen Ecke bereits ab, nachdem man  $k+1$  Facetten des Sterns der Kante mit  $3+j$  Ecken im link gesehen hat ( $k \leq j!$ ). Damit ist  $\alpha_2$  realisiert. Die Realisierung der evtl. noch notwendigen  $\alpha_3 - (j+1)$  Facettenteilungen ist trivial.

Die Realisierung eines simplizialen 5-Polytops mit  $h$ -Vektor  $(1, h_1, h_2, h_2, h_1, 1)$  durch genau  $h_1 - 1$  Facettenteilungen und  $h_2 - h_1$  2-Operationen am 5-Simplex geht völlig analog, nur daß man an Dreiecken und deren link statt wie bei  $d=4$  an Kanten und deren link operiert.

Es ist anzunehmen:

*3.11 Vermutung. Es gilt  $l_*(d, h) = h_{\lfloor d/2 \rfloor} - 1$  auch für  $d \geq 6$ .*

In [4] haben Billera und Lee gezeigt, daß die Bedingungen in der  $g$ -Vermutung McMullens [13] hinreichend sind, indem sie zu den entsprechenden  $h$ -Vektoren Polytope konstruiert haben. Möglicherweise findet sich dort ein Anhaltspunkt zum Beweis von Vermutung 3.11.

## Literatur

1. Alexander, J.W.: The combinatorial theory of complexes. *Ann. of Math.* **31**, 292–320 (1930)
2. Altshuler, A., Bokowski, J., Steinberg, L.: The classification of simplicial 3-spheres with nine vertices into polytopes and nonpolytopes. *Ersch. in Discrete Math.*
3. Barnette, D.: A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. *Pacific J. Math.* **46**, 349–354 (1973)
4. Billera, L.J., Lee, C.W.: Sufficiency of McMullen's conditions of simplicial polytopes. *Bull. Amer. Math. Soc.* **2**, 181–185 (1980)
5. Bruggesser, H., Mani, P.: Shellable decompositions of cells and spheres. *Math. Scand.* **29**, 197–205 (1972)
6. Danaraj, G., Klee, V.: Which spheres are shellable? *Ann. of Discrete Math.* **2**, 33–52 (1978)
7. Ewald, G.: Über die stellare Äquivalenz konvexer Polytope. *Resultate der Math.* **1**, 54–60 (1978)
8. Ewald, G., Shephard, G.C.: Stellar subdivisions of boundary complexes of convex polytopes. *Math. Ann.* **210**, 7–16 (1974)
9. Glaser, L.C.: *Geometrical Combinatorial Topology*. Bd. 1, New York 1970
10. Kind, B., Kleinschmidt, P.: Schälbare Cohen-Macaulay Komplexe und ihre Parametrisierung. *Math. Z.* **167**, 173–179 (1979)
11. Kleinschmidt, P.: Stellare Abänderungen und Schälbarkeit von Komplexen und Polytopen. *J. of Geom.* **11/2**, 161–176 (1978)
12. McMullen, P.: The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika* **17**, 179–184 (1970)
13. McMullen, P.: The numbers of faces of simplicial polytopes. *Israel J. Math.* **9**, 559–570 (1971)
14. Pachner, U.: Bistellare Äquivalenz kombinatorischer Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.* **30**, 89–98 (1978)
15. Stanley, R.P.: The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay Rings. *Studies in Appl. Math.* **54**, 135–142 (1975)
16. Stanley, R.P.: Cohen-Macaulay Rings and constructible polytopes. *Bull. Amer. Math. Soc.* **81**, 133–135 (1975)
17. Stanley, R.P.: The number of faces of a simplicial convex polytope. *Advances in Math.* **35**, 236–238 (1980)

Eingegangen am 3. Juli 1980