Math. Z. 153, 37–50 (1977)

Mathematische Zeitschrift

Die Invarianten der endlichen Untergruppen von $GL(2, \mathbb{C})$

Oswald Riemenschneider

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg,
Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13, Bundesrepublik Deutschland

Es sei $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe, die wir in kanonischer Weise auf $S = \mathbb{C}[u, v]$ operieren lassen. Ziel dieser Arbeit ist es, ein minimales Erzeugendensystem für die invariante Algebra S^G anzugeben. Da diese Algebra nach einem Satz von Chevalley [4] für Spiegelungsgruppen wieder isomorph zu S ist, können wir uns dabei auf sogenannte kleine, d.h. spiegelungsfreie Gruppen beschränken. Diese sind (bis auf Konjugation) wohlbekannt (vgl. z.B. [3], p. 94–112, [2], p. 346); wir bezeichnen sie als *zyklische Gruppen* $C_{n,q}$, *Diedergruppen* $D_{n,q}$, *Tetraedergruppen* T_m, *Oktaedergruppen* O_m und *Ikosaedergruppen* I_m (zur Definition vgl. § 1). Für die $C_{n,q}$ und $D_{n,q}$ liegen die gewünschten Ergebnisse schon vor ([8] und [1]); sie werden der Vollständigkeit halber noch einmal kurz dargestellt. Die restlichen Fälle können in einfacher Weise auf die schon von Klein [5] behandelten Untergruppen von $SL(2, \mathbb{C})$ (in unserer Bezeichnungsweise T_1, O_1 und I_1) zurückgeführt werden. Die notwendigen Rechnungen werden für die Tetraedergruppen im Detail mitgeteilt; bei den übrigen begnügen wir uns mit einer Aufzählung der Resultate.

Der ursprüngliche Zweck dieser Untersuchung war es, ähnlich wie in [8] aus der Kenntnis der Invarianten die Gleichungen der zugehörigen Quotientensingularität zu gewinnen. Wegen des neuen Resultats von Wahl über die allgemeine Struktur der Gleichungen einer beliebigen rationalen Singularität ([10], Theorem 2.1) ist dies nunmehr eine einfache Übungsaufgabe, der wir uns außer in den schon bekannten Fällen der zyklischen Quotienten und der Diedersingularitäten nur noch im Fall der Tetraedergruppen und der Determinantensingularitäten unter den Quotientensingularitäten unterzogen haben. Die letzteren sind genau diejenigen Quotienten der Einbettungsdimension $e \geq 3$, in deren minimaler Auflösung eine rationale Kurve mit Selbstschnittzahl $-(e-1)$ auftritt ([10], Corollary 3.7). Unter ihnen kommen also insbesondere, wie wohlbekannt ist, die Tripelpunkte vor. Ihre Gleichungen findet man auch in [10] und im Fall der Tripelpunkte schon bei Tjurina [9]. Es sollte dem interessierten Leser nicht schwerfallen, die übrigen Gleichungssysteme selbst aufzufinden.

§ 1. Klassifikation der endlichen Untergruppen

Wir setzen stets $\zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Die zyklische Gruppe $C_{n,q}$, $0<q<n$, $(n,q)=1$, wird dann erzeugt von

$$\begin{pmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^q \end{pmatrix}.$$

Sie ist offensichtlich von der Ordnung n.

Wir setzen ferner:

$$\phi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k \end{pmatrix}, \quad \psi_k = \begin{pmatrix} \zeta_k & 0 \\ 0 & \zeta_k^{-1} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_8 & \zeta_8^3 \\ \zeta_8 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 \end{pmatrix},$$

$$\iota = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \zeta_5^4 - \zeta_5 & \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ \zeta_5^2 - \zeta_5^3 & \zeta_5 - \zeta_5^4 \end{pmatrix}.$$

Sind n, q natürliche Zahlen mit $1<q<n$ und $(n,q)=1$, so wird die Gruppe $D_{n,q}$ erzeugt von

a) ψ_{2q}, τ, ϕ_{2m}, falls $m = n-q \equiv 1 \bmod 2$,

b) ψ_{2q}, $\tau \circ \phi_{4m}$, falls $m \equiv 0 \bmod 2$.

Es gilt $\operatorname{ord} D_{n,q} = 4mq$.

Die Gruppe T_m, $m \equiv 1, 3, 5 \bmod 6$, wird erzeugt von

a) ψ_4, τ, η, ϕ_{2m}, falls $m \equiv 1, 5 \bmod 6$,

b) ψ_4, τ, $\eta \circ \phi_{6m}$, falls $m \equiv 3 \bmod 6$.

Ihre Ordnung ist $24m$.

Die Gruppe O_m, $(m, 6)=1$, wird erzeugt von ψ_8, τ, η und ϕ_{2m}, die Gruppe I_m, $(m, 30)=1$, von σ, ω, ι und ϕ_{2m}. Es gilt $\operatorname{ord} O_m = 48m$, $\operatorname{ord} I_m = 120m$.

$C_{n,q}$ ist konjugiert zu $C_{n',q'}$ genau dann, wenn $n=n'$ und $q=q'$ oder $qq' \equiv 1 \bmod n$. Ansonsten sind die o.a. Gruppen paarweise nicht konjugiert. Jede spiegelungsfreie endliche Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$ ist konjugiert zu einer der Gruppen $C_{n,q}$, $D_{n,q}$, T_m, O_m oder I_m.

§ 2. Die Invarianten

A. Die zyklischen Gruppen $C_{n,q}$. Wir setzen $m = n-q$ und bilden die Hirzebruch-Jungsche Kettenbruchentwicklung

$$\frac{n}{m} = a_2 - 1 \rfloor a_3 - \cdots - 1 \rfloor a_{e-1}, \qquad a_\varepsilon \geqq 2, \qquad \varepsilon = 2, \ldots, e-1.$$

Weiter sei

$$c_1=n,\quad c_2=n-q,\quad c_{\varepsilon+1}=a_\varepsilon c_\varepsilon - c_{\varepsilon-1},\quad 2\leqq\varepsilon\leqq e-1,$$
$$d_1=0,\quad d_2=1,\quad d_{\varepsilon+1}=a_\varepsilon d_\varepsilon - d_{\varepsilon-1},\quad 2\leqq\varepsilon\leqq e-1.$$

Dann gilt [8]:

Satz 1. *Die Monome* $z_\varepsilon=u^{c_\varepsilon}v^{d_\varepsilon}$, $\varepsilon=1,\dots,e$, *bilden ein minimales Erzeugendensystem von* $S^{C_{n,q}}$.

B. Die Diedergruppen $D_{n,q}$. Wie oben entwickeln wir n/m in einen Kettenbruch, setzen diesmal aber

$$\begin{array}{llll}
c_2=1, & c_3=0, & c_4=1, & 4\leqq\varepsilon\leqq e-1,\\
d_2=0, & d_3=1, & d_4=a_3-1, & d_{\varepsilon+1}=a_\varepsilon d_\varepsilon-d_{\varepsilon-1},\ 4\leqq\varepsilon\leqq e-1,\\
t_2=a_2, & t_3=a_2-1, & t_4=a_3(a_2-1)-1, & t_{\varepsilon+1}=a_\varepsilon t_\varepsilon-t_{\varepsilon-1},\ 4\leqq\varepsilon\leqq e-1,\\
s_\varepsilon=c_\varepsilon+d_\varepsilon, & 2\leqq\varepsilon\leqq e-1, & & \\
r_\varepsilon=mt_\varepsilon-qs_\varepsilon, & 2\leqq\varepsilon\leqq e-1. & &
\end{array}$$

Ferner sei bei festem n, q

$$w_1=\alpha uv,\qquad w_2=u^{2q}+(-1)^{a_2}v^{2q},\qquad w_3=u^{2q}+(-1)^{a_2-1}v^{2q},$$

wobei $\alpha=\alpha_{n,q}$ so gewählt sei, daß die Relation

$$w_2^2=w_3^2+w_1^{2q}$$

besteht. Nach [1] gilt dann

Satz 2. *Die Polynome* $z_1=w_1^{2m}$, $z_\varepsilon=w_1^{r_\varepsilon}w_2^{c_\varepsilon}w_3^{d_\varepsilon}$, $\varepsilon=2,\dots,e$, *bilden ein minimales Erzeugendensystem von* $S^{D_{n,q}}$. *Ein weiteres Erzeugendensystem wird gegeben durch* z_1 *und*

$$z'_\varepsilon=(uv)^{r_\varepsilon}(u^{2qs_\varepsilon}+(-1)^{t_\varepsilon}v^{2qs_\varepsilon}),\qquad \varepsilon=2,\dots,e.$$

C. Die Tetraedergruppen T_m. Die Gruppe $D_{3,2}$ wird erzeugt von ψ_4 und τ, ihre invariante Algebra nach Satz 2 (nach Änderung der Bezeichnungen) von

$$x_1=\alpha_0^2(uv)^2,\qquad x_2=\alpha_0(uv)(u^4-v^4),\qquad x_3=u^4+v^4,$$

wobei $\alpha_0\in\mathbb{C}$ so gewählt werden kann, daß die Relation

$$x_2^2=x_1(x_3^2+x_1^2)$$

besteht. Die Invarianten von T_1 sind genau die Polynome in x_1, x_2 und x_3, die unter η invariant sind. Solche sind z.B.

$$w_1=x_3^2+\frac{12}{\alpha_0^4}x_1^2,\qquad w_2=x_3^3-\frac{36}{\alpha_0^4}x_1^2x_3,\qquad w_3=\beta_0x_2,\qquad \beta_0\neq0.$$

Klein hat in [5] gezeigt, daß diese Polynome S^{T_1} erzeugen. Man kann β_0 noch so wählen, daß die zwischen ihnen bestehende erzeugende Relation von der Form

$$w_2^2=w_1^3+w_3^4$$

ist. Um die Invarianten von T_m zu finden, $m \equiv 1, 5 \bmod 6$, beachte man, daß ein homogenes Polynom in u und v genau dann invariant unter ϕ_{2m} ist, wenn sein Grad durch $2m$ geteilt werden kann. Die invariante Algebra von T_m wird daher erzeugt von den Polynomen $w_1^\alpha w_2^\beta w_3^\gamma$ mit durch $2m$ teilbarem Totalgrad. Unter diesen braucht man dann nur noch ein minimales Erzeugendensystem auszuwählen.

Nach derselben Methode können wir auch die Oktaeder- und Ikosaedergruppen abhandeln. Nur im Fall T_m mit $m \equiv 3 \bmod 6$ bedarf es eines anderen Vorgehens.

a) $m \equiv 1 \bmod 6$. Nach dem oben Gesagten müssen wir die Gleichungen $4\alpha + 6\beta + 3\gamma = mt$, $t \geqq 1$, lösen. Wegen der Relation zwischen w_1, w_2 und w_3 können wir uns dabei auf die Fälle $\beta = 0$ und 1 beschränken. Wir setzen noch $m = 6(b-2)+1$, $b \geqq 3$, und erhalten für $t=1$ die $b-2$ Lösungen $(\alpha, \beta, \gamma) = (1+3\varepsilon, 0, 2b-5-4\varepsilon)$ und $(1+3\varepsilon, 1, 2b-7-4\varepsilon)$, $\varepsilon = 0, 1, \ldots$. Zwischen den entsprechenden Polynomen besteht keine lineare Relation. Die Lösungen im Fall $t=2$ lauten $(2+3\varepsilon, 0, 4b-10-4\varepsilon)$ und $(2+3\varepsilon, 1, 4b-12-4\varepsilon)$, $\varepsilon = 0, 1, \ldots$.

Nun gilt

$$w_1^2 w_3^{4b-10} = (w_1 w_3^{2b-5})^2$$

und

$$w_1^{2+3\varepsilon} w_3^{4b-10-4\varepsilon} + w_1^{2+3(\varepsilon+1)} w_3^{4b-10-4(\varepsilon+1)} = w_1^{2+3\varepsilon}(w_1^3 + w_3^4)\, w_3^{4b-10-4(\varepsilon+1)}$$
$$= (w_1^{1+3\varepsilon_1} w_2 w_3^{2b-7-4\varepsilon_1})(w_1^{1+3\varepsilon_2} w_2 w_3^{2b-7-4\varepsilon_2}),$$

wobei $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ und $2b-7-4\varepsilon_\nu \geqq 0$, $\nu = 1, 2$. Ebenso erhält man eine Darstellung

$$w_1^{2+3\varepsilon} w_2 w_3^{4b-12-4\varepsilon} = (w_1^{1+3\varepsilon_1} w_3^{2b-5-4\varepsilon_1})(w_1^{1+3\varepsilon_2} w_2 w_3^{2b-7-4\varepsilon_2}),$$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $2b-5-4\varepsilon_1 \geqq 0$, $2b-7-4\varepsilon_2 \geqq 0$, sofern nur $\varepsilon < b-3$. Dies zeigt, daß sich alle diese Polynome mit Ausnahme von $w_1^{3b-7} w_2$ als Polynome in den Invarianten vom Grad $2m$ schreiben lassen. In gleicher Weise findet man unter den Polynomen mit $t=3$ nur noch zwei weitere unabhängige Invariante, nämlich w_3^{6b-11} und $w_2 w_3^{6b-13}$. Insgesamt haben wir also $b+1$ invariante Polynome gefunden; da die Einbettungsdimension der entsprechenden Quotientensingularität nach Brieskorn ([2], Satz 2.11) gerade $b+1$ ist, bilden sie schon ein minimales Erzeugendensystem. Dies könnte man selbstverständlich auch direkt beweisen, indem man zeigt, daß sich jedes invariante Polynom vom Grad $2mt$, $t \geqq 4$, durch invariante Polynome niedrigeren Grades ausdrücken läßt.

Um später handlichere Gleichungen zu bekommen, ist es zweckmäßig, die Beschränkung auf $\beta = 0, 1$ aufzugeben. Wir zeigen

Satz 3. *Die Algebra S^{T_m}, $m = 6(b-2)+1$, besitzt das minimale Erzeugendensystem*

a) w_1, w_2, w_3 *im Falle* $b=2$,

b) $z_1 = w_3^{6b-11}$, $z_2 = w_3^{6b-13}$, $z_{3+\varepsilon} = w_1 w_2^\varepsilon w_3^{2(b-\varepsilon)-5}$, $\varepsilon = 0, \ldots, b-3$, $z_{b+1} = w_1^2 w_2^{2b-5}$ *im Falle* $b > 2$.

Beweis. Wir können uns auf $b > 2$ beschränken. Vier von den oben angegebenen Invarianten kommen unter den z_ε vor, nämlich für $\varepsilon = 1, \ldots, 4$. Durch leichte

Rechnung folgt

$$w_1^{1+3\varepsilon} w_3^{2b-5-4\varepsilon} = z_{3+2\varepsilon} + P_1(z_3, \ldots, z_{2+2\varepsilon}),$$
$$w_1^{1+3\varepsilon} w_2 w_3^{2b-7-4\varepsilon} = z_{4+2\varepsilon} + P_2(z_3, \ldots, z_{3+2\varepsilon}),$$
$$w_1^{3b-7} w_2 = z_{b+1} + P_3(z_3, \ldots, z_b), \quad \text{q.e.d.}$$

b) $m \equiv 5 \bmod 6$. Da wir hier wie im Fall a) arbeiten können, geben wir nur die Resultate an.

Satz 4. *Die Algebra* S^{T_m}, $m = 6(b-2)+5$, *besitzt das minimale Erzeugendensystem*

$$z_1 = w_3^{6b-7}, \quad z_2 = w_2 w_3^{6b-9}, \quad z_3 = w_1 w_3^{4b-6}, \quad z_4 = w_1 w_2 w_3^{4b-8},$$
$$z_{5+\varepsilon} = w_1^2 w_2^\varepsilon w_3^{2(b-\varepsilon)-5}, \quad \varepsilon = 0, \ldots, b-3,$$
$$z_{b+3} = w_1^{3b-8} w_2^3, \quad b > 2, \quad z_{b+3} = w_1^3 w_3, \quad b = 2.$$

c) $m \equiv 3 \bmod 6$. Es seien x_1, x_2 und x_3 wie zu Beginn dieses Abschnitts gewählt. Wir setzen dann für ein beliebiges Polynom $P = P(x_1, x_2, x_3)$:

$$\mu_j(P) = P + \zeta_3^j \eta(P) + \zeta_3^{2j} \eta^2(P), \quad j = 1, 2.$$

Wegen

$$\eta(x_1) = -\tfrac{1}{2}(x_1 + i x_3), \quad \eta(x_3) = -\tfrac{1}{2}(x_3 + 3i x_1),$$
$$\eta^2(x_1) = -\tfrac{1}{2}(x_1 - i x_3), \quad \eta^2(x_3) = -\tfrac{1}{2}(x_3 - 3i x_1)$$

(man beachte $\alpha_0^2 = 2i$) und $\zeta_3 - \zeta_3^2 = i\sqrt{3}$, $\zeta_3 + \zeta_3^2 = -1$ erhält man durch eine leichte Rechnung, die wir dem Leser überlassen, das folgende

Lemma. *Für* $\alpha + \gamma \equiv 0 \bmod 3$ *gibt es ein Polynom* $P_{\alpha,\gamma}(x_1, x_3)$ *mit*

$$\mu_j(x_1^\alpha x_3^\gamma) = \left(x_1 + \frac{(-1)^j}{\sqrt{3}} x_3\right) P_{\alpha,\gamma}(x_1, x_3), \quad j = 1, 2.$$

Wir setzen $w_{3+j} = x_1 + \frac{(-1)^j}{\sqrt{3}} x_3$, $j = 1, 2$. Offensichtlich gilt $\eta(w_{3+j}) = \zeta_3^j w_{3+j}$.

Die Invarianten von T_m sind diejenigen Polynome in x_1, x_2 und x_3, die unter $\eta \circ \phi_{6m}$ invariant sind. Wegen $\eta^3 \circ \tau^2 = \mathrm{id}$ müssen diese insbesondere unter $\phi_{6m}^3 = \phi_{2m}$ ungeändert bleiben. Wie oben genügt es also, homogene Polynome vom Grad $2mt$, $t \geqq 1$, zu betrachten. Die Invarianten werden dann erzeugt von den Elementen $\chi(x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma)$, wobei $\chi = \frac{1}{\operatorname{ord} T_m} \sum_{\phi \in T_m} \phi$ (vgl. [6]). Gilt $4\alpha + 6\beta + 4\gamma = 2mt$ und $t \equiv j \bmod 3$, $j = 1, 2$, so ist

$$\chi(x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma) = x_2^\beta \mu_j(x_1^\alpha x_3^\gamma),$$

und da wegen $m \equiv 0 \bmod 3$ auch $\alpha + \gamma \equiv 0 \bmod 3$ ist, läßt sich aus jeder Invarianten vom Grad $2mt$ mit $t \equiv j \bmod 3$, $j = 1, 2$, der Faktor w_{3+j} herausziehen. Der Rest ist invariant unter η. Die Invarianten vom Grad $2mt$ mit $t \equiv 0 \bmod 3$ sind offensichtlich die Invarianten unter T_1. Wir erhalten somit:

Für $m=6(b-2)+3$ wird S^{T_m} erzeugt von den Elementen

$$w_1^\alpha w_2^\beta w_3^\gamma w_4, \quad 4\alpha+6\beta+3\gamma+2=mt, \quad t\equiv 1 \mod 3,$$
$$w_1^\alpha w_2^\beta w_3^\gamma w_5, \quad 4\alpha+6\beta+3\gamma+2=mt, \quad t\equiv 2 \mod 3,$$
$$w_1^\alpha w_2^\beta w_3^\gamma, \quad 4\alpha+6\beta+3\gamma=mt, \quad t\equiv 0 \mod 3.$$

Beachtet man noch die Relationen

$$-3w_4 w_5=w_1, \quad 3\sqrt{3}\, w_{3+j}^3=(-1)^j w_2+w_3^2 \quad (\text{wegen } \beta_0^2=3\sqrt{3}),$$

so schließt man hieraus unmittelbar

Satz 5. *Die Algebra S^{T_m}, $m=6(b-2)+3$, besitzt das minimale Erzeugendensystem*

$$z_1=w_3^{6b-9}, \quad z_2=w_2 w_3^{6b-11}, \quad z_3=\sqrt{3}\, w_1 w_3^{4b-8} w_5,$$
$$z_{4+\varepsilon}=\sqrt{3}\, w_1 w_2^\varepsilon w_3^{2(b-\varepsilon)-5} w_4, \quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+2}=3w_1^2 w_2^{2b-5} w_4^2, \quad b>2, \quad z_{b+2}=\sqrt{3}\, w_1 w_3^2 w_4, \quad b=2.$$

D. Die Oktaedergruppen O_m. Wegen $\psi_8^2=\psi_4$ sind die Invarianten von O_1 auch invariant unter T_1, und wir brauchen zur Bestimmung der Invarianten von O_1 nur die Polynome in w_1, w_2 und w_3 auszuwählen, die unter ψ_8 ungeändert bleiben. Nun gilt $\psi_8(x_1)=x_1$, $\psi_8(x_j)=-x_j$, $j=2, 3$, und damit $\psi_8(\omega_1)=w_1$, $\psi_8(\omega_j)=-w_j$, $j=2,3$. $W_1=w_3^2$, $W_2=w_2 w_3$ und $W_3=w_1$ erzeugen die Algebra S^{O_1} (vgl. [5]); die zwischen diesen Elementen bestehende erzeugende Relation lautet

$$W_2^2=W_1(W_1^2+W_3^3).$$

Um die Invarianten von O_m zu bestimmen, brauchen wir wie unter C nur alle Exponenten (α,β,γ) mit $12\alpha+18\beta+8\gamma=2mt$, $t\geqq 1$, $\beta=0,1$, zu bestimmen. Wir listen die Ergebnisse im folgenden Satz auf, wobei wir statt der großen W wieder kleine benutzen.

Satz 6. *Die Algebra S^{O_m} wird minimal erzeugt*

a) *im Fall $m=12(b-2)+1$ von*

$$w_1, w_2, w_3,$$

falls $b=2$, bzw. von

$$z_1=w_3^{12b-23}, \quad z_2=w_1 w_3^{6b-13},$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{2\varepsilon} w_2 w_3^{3(b-\varepsilon)-8}, \quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{6b-16} w_2^3,$$

falls $b>2$;

b) *im Fall $m=12(b-2)+5$ von*

$$z_1=w_3^{12b-19}, \quad z_2=w_1 w_3^{6b-11},$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{2\varepsilon} w_2 w_3^{3(b-\varepsilon)-7}, \quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{6b-11} w_2,$$
$$z_{b+2}=w_1^{4b-7} w_3, \quad b>2, \quad z_{b+2}=w_2 w_3^4, \quad b=2;$$

c) *im Fall* $m=12(b-2)+7$ *von*

$$z_1=w_3^{12b-17},\qquad z_2=w_1\,w_3^{6b-10},$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{2\varepsilon+1}\,w_2\,w_3^{3(b-\varepsilon)-8},\qquad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{6b-10}\,w_2,\qquad z_{b+2}=w_2\,w_3^{9b-15},$$
$$z_{b+3}=w_1^3\,w_3^{6b-13},\qquad b>2,\qquad z_{b+3}=w_1^4\,w_3,\qquad b=2;$$

d) *im Fall* $m=12(b-2)+11$ *von*

$$z_1=w_3^{12b-13},\qquad z_2=w_1\,w_3^{6b-8},$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{2\varepsilon+1}\,w_2\,w_3^{3(b-\varepsilon)-7},\qquad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{6b-8}\,w_2,\qquad z_{b+2}=w_2\,w_3^{9b-12},\qquad z_{b+3}=w_1^3\,w_3^{6b-11},$$
$$z_{b+4}=w_1^{4b-5}\,w_3,\qquad b>2,\qquad z_{b+4}=w_1^2\,w_2\,w_3^3,\qquad b=2.$$

E. Die Ikosaedergruppen I_m. Bezüglich I_1 verweisen wir wieder auf [5]. Die Polynome

$$\alpha_0\,w_1=(u\,v)(u^{10}+11u^5v^5-v^{10}),\qquad \alpha_0\neq 0,$$
$$w_2=(u^{20}+v^{20})-228(u^{15}v^5-u^5v^{15})+494u^{10}v^{10},$$
$$w_3=(u^{30}+v^{30})+522(u^{25}v^5-u^5v^{25})-10005(u^{20}v^{10}+u^{10}v^{20})$$

erzeugen S^{I_1}. Bei geeigneter Wahl von $\alpha_0(1728\alpha_0^5=1)$ lautet die erzeugende Relation

$$w_3^2=w_1^5+w_2^3.$$

Zur Bestimmung der Invarianten von I_m genügt daher die Lösung der Gleichungen $12\alpha+20\beta+30\gamma=2mt$, $t\geqq 1$, $\gamma=0,1$. Es ergibt sich der notwendigerweise überaus lange

Satz 7. *Die Algebra* S^{I_m} *wird minimal erzeugt*

a) *im Fall* $m=30(b-2)+1$ *von*

$$w_1,w_2,w_3,$$

falls $b=2$, *bzw. von*

$$z_1=w_1^{15b-32}\,w_3,\qquad z_2=w_1^{10b-23}\,w_2^2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-14}\,w_2^{1+3\varepsilon}\,w_3,\qquad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_2^{15b-37}\,w_3^5,$$

falls $b>2$;

b) *im Fall* $m=30(b-2)+7$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-29}\,w_3,$$
$$z_2=w_1^{10b-21}\,w_2^2,\qquad b>2,\qquad z_2=w_1^7,\qquad b=2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-13}\,w_2^{1+3\varepsilon}\,w_3,\qquad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1\,w_2^{9b-18}\,w_3,\qquad b>2,\qquad z_{b+1}=w_1^3\,w_2,\qquad b=2,$$
$$z_{b+2}=w_2^{15b-28}\,w_3;$$

c) *im Fall* $m=30(b-2)+11$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-27}w_3,\quad z_2=w_1^{10b-18}w_2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-14}w_2^{2+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{10b-23}w_2^4,\quad b>2,\quad z_{b+1}=w_1w_2^6,\quad b=2,$$
$$z_{b+2}=w_2^{15b-26}w_3;$$

d) *im Fall* $m=30(b-2)+13$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-26}w_3,\quad z_2=w_1w_2^{6b-10},$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-12}w_2^{1+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^6w_2^{6b-13},\quad b>2,\quad z_{b+1}=w_1^7w_2,\quad b=2,$$
$$z_{b+2}=w_2^{15b-25}w_3;$$

e) *im Fall* $m=30(b-2)+17$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-24}w_3,\quad z_2=w_1^{10b-16}w_2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-13}w_2^{2+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{10b-21}w_2^4,\quad b>2,\quad z_{b+1}=w_1^3w_2^5,\quad b=2,$$
$$z_{b+2}=w_1w_2^{9b-15}w_3,\quad z_{b+3}=w_2^{15b-23}w_3;$$

f) *im Fall* $m=30(b-2)+19$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-23}w_3,\quad z_2=w_1^{10b-17}w_2^2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-11}w_2^{1+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^3w_2^{6b-10},\quad b>2,\quad z_{b+1}=w_1^{11}w_2,\quad b=2,$$
$$z_{b+2}=w_1^2w_2^{9b-15}w_3,\quad z_{b+3}=w_1w_2^{12b-17},\quad z_{b+4}=w_2^{15b-22}w_3;$$

g) *im Fall* $m=30(b-2)+23$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-21}w_3,\quad z_2=w_1^{10b-14}w_2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-12}w_2^{2+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{10b-19}w_2^4,$$
$$z_{b+2}=w_1w_2^{6b-8},\quad b>2,\quad z_{b+2}=w_1^4w_2^3w_3,\quad b=2,$$
$$z_{b+3}=w_2^{15b-20}w_3;$$

h) *im Fall* $m=30(b-2)+29$ *von*

$$z_1=w_1^{15b-18}w_3,\quad z_2=w_1^{10b-12}w_2,$$
$$z_{3+\varepsilon}=w_1^{5(b-\varepsilon)-11}w_2^{2+3\varepsilon}w_3,\quad \varepsilon=0,\dots,b-3,$$
$$z_{b+1}=w_1^{10b-17}w_2^4,$$
$$z_{b+2}=w_1^3w_2^{6b-8},\quad b>2,\quad z_{b+2}=w_1^7w_2^3w_3,\quad b=2,$$
$$z_{b+3}=w_1^2w_2^{9b-12}w_3,\quad z_{b+4}=w_1w_2^{12b-13},\quad z_{b+5}=w_2^{15b-17}w_3.$$

§ 3. Gleichungen der Quotientensingularitäten

In diesem Paragraphen sollen (in einigen Fällen) die Relationen zwischen den erzeugenden Invarianten angegeben werden. Dies ist gleichbedeutend damit, die Gleichungen der (algebraischen oder komplex-analytischen) Singularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ zu finden. Da jede beliebige Quotientensingularität der Dimension 2 analytisch isomorph zu einer Singularität $(\mathbb{C}^2/G, 0)$ mit einer der in § 1 angegebenen Gruppen G ist ([7, 2]), kann man auf diese Weise prinzipiell die Gleichungen aller Quotienten bestimmen. Das in der Einleitung zitierte Resultat von Wahl besagt, daß jede rationale Singularität der Einbettungsdimension e durch $\frac{1}{2}(e-1)(e-2)$ Potenzreihen der Multiplizität 2 mit linear unabhängigen Leittermen beschrieben wird. Unsere Aufgabe reduziert sich demnach darauf, jeweils $\frac{1}{2}(e-1)(e-2)$ unabhängige „quadratische" Relationen zwischen den e erzeugenden Invarianten anzuschreiben.

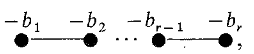
A. Zyklische Quotientensingularitäten. Die Gleichungen von $(\mathbb{C}^2/C_{n,q}, 0)$ wurden schon in [8] angegeben.

Satz 8. *Die zyklischen Quotienten werden beschrieben durch*

$$z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1} = z_\varepsilon^{a_\varepsilon}, \qquad \varepsilon = 2, \dots, e-1,$$
$$z_\delta z_\varepsilon = z_{\delta+1}^{a_{\delta+1}-1} z_{\delta+2}^{a_{\delta+2}-2} \cdots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, \qquad 2 \leqq \delta+1 < \varepsilon-1 \leqq e-1.$$

Hierbei ist zu beachten, daß im Zweifelsfall der Exponent $a_\varepsilon - 1$ dem Exponenten $a_\varepsilon - 2$ vorzuziehen ist.

Der duale Graph der minimalen Auflösung ist in diesem Fall

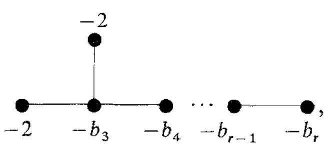


$\bullet \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,

wobei

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1|}{|b_2} - \cdots - \frac{1|}{|b_r}, \qquad b_\rho \geqq 2, \qquad \rho = 1, \dots, r.$$

B. Diedersingularitäten. Der duale Graph der minimalen Auflösung von $(\mathbb{C}^2/D_{n,q}, 0)$ sieht nach [2] folgendermaßen aus:



wobei

$$\frac{n}{q} = b_3 - \frac{1|}{|b_4} - \cdots - \frac{1|}{|b_r}, \qquad b_\rho \geqq 2, \qquad \rho = 1, \dots, r, \qquad r \geqq 4.$$

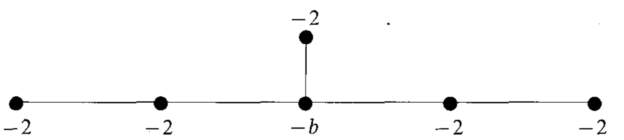
Die Gleichungen wurden in [1] gefunden.

Satz 9. $(\mathbb{C}^2/D_{n,q}, 0)$ *wird beschrieben durch*

$$z_1(z_1^{a_2-1}+z_3^2)=z_2^2, \qquad z_2 z_4 = z_3^{a_3-1}(z_1^{a_2-1}+z_3^2)$$
$$z_1 z_\varepsilon = z_2 z_3^{a_3-2} \dots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, \qquad 4 \leqq \varepsilon \leqq e$$
$$z_2 z_\varepsilon = z_3^{a_3-2} \dots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}(z_1^{a_2-1}+z_3^2), \qquad 5 \leqq \varepsilon \leqq e$$
$$z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1} = z_\varepsilon^{a_\varepsilon}, \qquad 4 \leqq \varepsilon \leqq e-1$$
$$z_\delta z_\varepsilon = z_{\delta+1}^{a_{\delta+1}-1} z_{\delta+2}^{a_{\delta+2}-2} \dots z_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} z_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, \qquad 4 \leqq \delta+1 < \varepsilon-1 \leqq e-1.$$

Hierbei ist dieselbe Konvention wie in Satz 8 zu beachten.

C. Tetraedersingularitäten. Für $m=6(b-2)+1$ hat die minimale Auflösung von $(\mathbb{C}^2/T_m, 0)$ den dualen Graphen



Satz 10. *Die Gleichungen dieser Singularität lauten*

a) *im Fall* $b=2$:

$$z_2^2 = z_1^3 + z_3^4$$

b) *im Fall* $b=3$:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3^2 \\ z_2 & z_1+z_3^3 & z_4 \end{pmatrix} < 2.$$

c) *im Fall* $b \geqq 4$:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{b-1} & z_b^2 \\ z_2 & z_1+z_3^3 & z_4 & \dots & z_b & z_{b+1} \end{pmatrix} < 2.$$

Beweis. Den Fall $b=3$ überlassen wir dem Leser. Im Fall $b \geqq 4$ erhält man ohne Mühe:

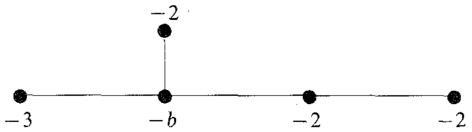
$$z_2^2 = w_2^2 w_3^{12b-26} = w_1^3 w_3^{12b-26} + w_3^{12b-22}$$
$$= w_3^{6b-11}(w_3^{6b-11} + (w_1 w_3^{2b-5})^3) = z_1(z_1+z_3^3),$$
$$z_2 z_4 = w_1 w_2^2 w_3^{8b-20} = w_1 w_3^{2b-5}(w_3^{6b-11} + (w_1 w_3^{2b-5})^3) = z_3(z_1+z_3^3).$$

Die Relationen $z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1} = z_\varepsilon^2$, $\varepsilon = 4, \dots, b-1$, sind klar. Schließlich gilt

$$z_{b-1} z_{b+1} = (w_1 w_2^{b-4} w_3^3)(w_1^2 w_2^{2b-5}) = (w_1 w_2^{b-3} w_3)^3 = z_b^3.$$

Die restlichen Relationen sind leichte Folgerungen aus den soeben bewiesenen. Die Unabhängigkeit der Relationen ist ebenso leicht einzusehen, q.e.d.

Zu $m=6(b-2)+3$ gehört der Graph



Satz 11. *Die Gleichungen dieser Singularität sind*

a) *im Fall* $b=2$:

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 z_3 & z_2+z_1 & z_4 \\ z_4 & -z_3 & z_2-z_1 \end{pmatrix}<2,$$

b) *im Fall* $b\geqq 3$:

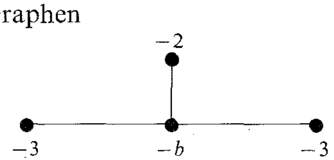
$$z_2^2=z_1(z_1-z_3 z_4), \qquad z_3^2=-z_4(z_1+z_2)$$
$$z_3 z_5=z_4^{a_4-1}(z_4^2+z_3), \qquad z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1}=z_\varepsilon^{a_\varepsilon}, \qquad \varepsilon=5,\dots,b+1,$$
$$a_4=\dots=a_b=2, \qquad a_{b+1}=3, \qquad \text{etc.}$$

Beweis. Es sei $b=2$. Dann gilt

$$z_2^2=w_2^2 w_3^2=w_3^2(w_1^3+w_3^4)=(w_3^3)^2+w_1^3 w_3^2=z_1^2-3(w_1 w_5)(w_1 w_3^2 w_4)=z_1^2-z_3 z_4,$$
$$z_4^2=3w_1^2 w_3^4 w_4^2=-9w_1 w_3^4 w_4^3 w_5=-z_1 z_3(3\sqrt{3}\, w_4^3 w_3)=z_1 z_3(z_2-z_1),$$
$$z_2 z_4=\sqrt{3}\, w_1 w_2 w_3^3 w_4=\sqrt{3}\, w_3^3 w_1 w_4(3\sqrt{3}\, w_5^3-w_3^2)$$
$$=-z_1(z_4+3w_1^2 w_5^2)=-z_1(z_4+z_3^2).$$

Die anderen Relationen beweist man ebenso, q.e.d.

Wir behandeln schließlich noch den Fall $m=6(b-2)+5$ mit dem zugehörigen Graphen



Satz 12. *Die Gleichungen dieser Singularität lauten:*

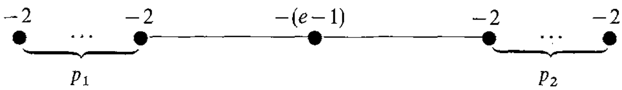
a) *im Fall* $b=2$:

$$z_2^2=z_1^2+z_3^3, \qquad z_2 z_4=z_3(z_1+z_5), \qquad z_5^2=z_3(z_4^2-z_3^2),$$
$$z_1 z_4=z_2 z_3, \qquad z_2 z_5=z_3^2 z_4,$$
$$z_1 z_5=z_3^3,$$

b) *im Fall* $b\geqq 3$:

$$z_2^2=z_1^2+z_3^3, \qquad z_2 z_4=z_1(z_3+z_5^2), \qquad z_4^2=z_3(z_3+z_5^2),$$
$$z_4 z_6=(z_3+z_5^2)^2, \qquad b=3, \qquad z_4 z_6=z_5(z_3+z_5^2), \qquad b>3,$$
$$z_{\varepsilon-1} z_{\varepsilon+1}=z_\varepsilon^{a_\varepsilon}, \qquad \varepsilon=6,\dots,b+2,$$
$$a_6=\dots=a_{b+1}=2, \qquad a_{b+2}=3, \qquad \text{etc.}$$

D. Determinantensingularitäten. Mit Hilfe von Corollary 3.7 in [10] und Brieskorns Liste in [2] kann man sofort die dualen Graphen und die zugehörigen Gruppen derjenigen Quotienten angeben, die „determinantal" sind. Wir beschränken uns selbstverständlich auf den Fall $e \geqq 4$. Man überzeugt sich leicht, daß die angegebenen Gleichungen bis auf analytische Isomorphie mit denen in [9] bzw. [10] übereinstimmen.

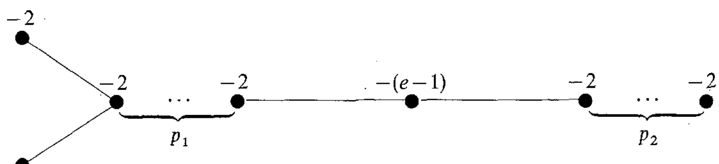
1. 

$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0.$

$$C_{n,q},\quad n=(p_1+1)(p_2+1)(e-1)-(2p_1+1)p_2-p_1,$$
$$q=p_1(p_2+1)(e-1)-(2p_1-1)p_2-(p_1-1).$$

Es gilt $a_2=p_1+2$, $a_{e-1}=p_2+2$, $a_\varepsilon=2$, $2<\varepsilon<e-1$. Die Gleichungen können daher geschrieben werden in der Form

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{e-2} & z_{e-1}^{p_2+1} \\ z_2^{p_1+1} & z_3 & \cdots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} < 2.$$

2. 

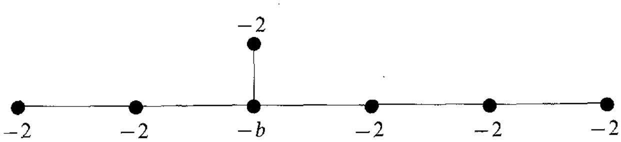
$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,$ nicht beide gleich 0.

$D_{n,q}$, n, q wie unter 1.

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{e-2} & z_{e-1}^{p_2+1} \\ z_2 & z_2^{p_1+1}+z_3^2 & z_4 & \cdots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} < 2.$$

3. Bei den Tetraedergruppen treten Determinantensingularitäten nur in den Fällen $m=6(b-2)+1$, $b \geqq 2$ beliebig, und $m=3$ auf. Die Sätze 10 und 11 geben die Gleichungen schon in Determinantenform an.

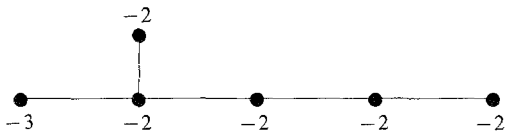
4. Bei den Oktaedergruppen kommen nur die Werte $m=12(b-2)+1$, $b \geqq 2$ beliebig, $m=5$ und $m=7$ in Betracht. Es ergibt sich in diesen Fällen:

a) 

$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3(z_3^2-z_2) \\ z_2^2 & z_3^2-z_2 & z_4 \end{pmatrix} < 2, \quad b=3,$$

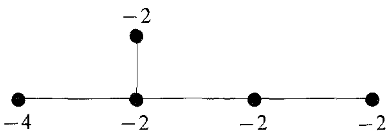
$$\operatorname{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{e-2} & z_{e-1}^3 \\ z_2^2 & z_3^2-z_2 & z_4 & \cdots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} < 2, \quad b \geqq 4;$$

b)



$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_4 \\ z_4 & z_3 & z_1 z_3(z_1+z_2^2) \end{pmatrix} < 2;$$

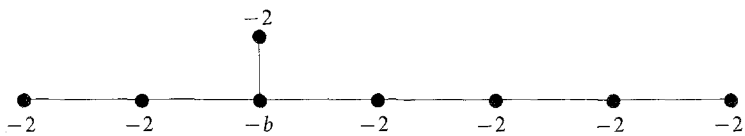
c)



$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_4 & z_5+z_2^2 & z_1+z_2^2 & z_2 z_3 \end{pmatrix} < 2.$$

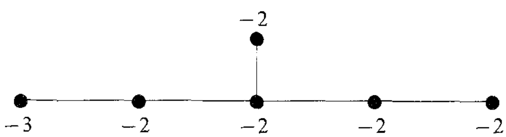
5. Bei den Ikosaedergruppen kommen nur die Werte $m=30(b-2)+1$, $b \geqq 2$ beliebig, und $m=7$, 11, 13, 19 in Betracht. Es ergibt sich

a)



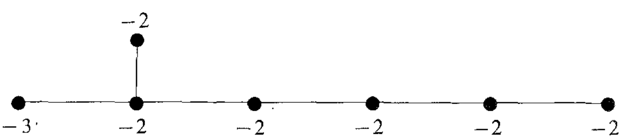
$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{e-2} & z_{e-1}^5 \\ z_2 z_3 & z_3^2-z_2 & z_4 & \dots & z_{e-1} & z_e \end{pmatrix} < 2;$$

b)



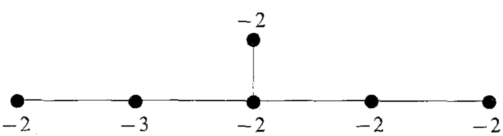
$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_3^2 & z_1^2-z_2 \end{pmatrix} < 2;$$

c)



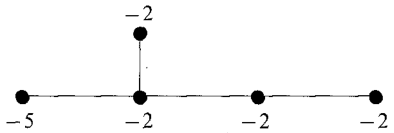
$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 z_4 & z_2^2+z_3 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} < 2;$$

d)



$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2^2 & z_3 \\ z_2^2+z_3 & z_4 & z_1 z_2 \end{pmatrix} < 2;$$

e)



$$\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_3+z_2^2 & z_4 & z_1 z_2 & z_5+z_2^2 & z_6 \end{pmatrix} < 2.$$

Literatur

1. Behnke, K., Riemenschneider, O.: Diedersingularitäten. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg (Erscheint demnächst)
2. Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. Inventiones math. **4**, 336–358 (1968)
3. DuVal, P.: Homographies, quaternions and rotations. Oxford: Oxford University Press 1964
4. Chevalley, C.: Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. Math. **77**, 778–782 (1955)
5. Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade. Leipzig: B.G. Teubner 1884
6. Noether, E.: Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. Math. Ann. **77**, 89–92 (1916)
7. Prill, D.: Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups. Duke Math. J. **34**, 375–386 (1967)
8. Riemenschneider, O.: Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen). Math. Ann. **209**, 211–248 (1974)
9. Tjurina, G.: Absolute isolatedness of rational singularities and triple rational points. Functional Analysis Appl. **2**, 324–332 (1968)
10. Wahl, J.: Equations defining rational singularities. Ann. sci. École norm. sup., IV. Sér. (Erscheint demnächst)

Eingegangen am 5. Mai 1976