Math. Z. 158, 61–70 (1978)

Mathematische Zeitschrift

Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes

Gerd Gotzmann

Mathematisches Institut der Universität Münster, Roxeler Str. 64, D-4400 Münster Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Sei A ein noetherscher Ring, $S=A[X_0,\dots,X_r]$, $\mathcal{M}$ die Menge der ersten m Monome von S vom Grad d in der lexikographischen Ordnung, J das von $\mathcal{M}$ erzeugte Ideal. Für das Hilbertpolynom Q von J gilt $Q(n)=\operatorname{rang}_A(J_n)$ für alle $n \geqq d$. Auf den folgenden Seiten wird bewiesen:

Satz. *Sei I ein graduiertes Ideal von S, erzeugt von der homogenen Komponente vom Grad d und $M=S/I$. Wenn M_n flach über A vom Rang $P(n)=\binom{n+r}{r}-Q(n)$ für $n=d$ und $n=d+1$ ist, dann für alle $n \geqq d$.*

Man kann also theoretisch leicht entscheiden, ob ein gegebenes Ideal ein gegebenes Polynom als Hilbertpolynom hat (vgl. hierzu Korollar 3.9). Insbesondere wird eine Frage von Berman (J. Algebra **45**) positiv beantwortet.

Leider ist es nicht möglich gewesen, für den Fall, daß A ein Körper ist, einen einfachen Beweis zu finden. Im Abschnitt 1 wird zunächst der Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, daß M in den Punkten von $\operatorname{Spec} A$ das Hilbertpolynom P hat. Im Abschnitt 2 wird mit Hilfe von Sätzen von Macaulay und Sperner der Fall A Körper, I monomiales Ideal behandelt. Trotz detaillierter Rechnungen ist es nicht möglich, diesen Spezialfall zu erledigen. Man muß deshalb einen Umweg machen: Die im Satz genannten Bedingungen kann man durch ein Schema W darstellen, das Hilb^P als Unterschema enthält. Man hat dann zu zeigen, daß Hilb^P sogar gleich W ist, denn das bedeutet, daß M flach ist mit Hilbertpolynom P, wenn nur die ersten beiden Komponenten die richtigen Bedingungen erfüllen. Nun gestattet eine Methode von Hartshorne, ein Ideal in ein monomiales Ideal zu deformieren. Man kann sie in unserer Situation dazu benutzen, jeden abgeschlossenen Punkt von W mit einem abgeschlossenen Punkt zu verbinden, von dem man nach den Ergebnissen des Abschnitts 2 annehmen kann, daß er in Hilb^P liegt. Da nach Abschnitt 1 Hilb^P ein offenes und abgeschlossenes Unterschema von W ist, folgt die Behauptung.

Herrn Professor Nastold, dessen Unterstützung es ermöglichte, diesen Artikel zu schreiben, möchte ich herzlich danken

0025-5874/78/0158/0061/$02.00

1. Hilfssätze über Ideale mit gegebenem Hilbertpolynom

(1.1) *Bezeichnungen.* Es gibt eine kleinste natürliche Zahl $m(Q)$ (Regularitätsschranke), so daß jedes Ideal $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^r}$ mit $\chi(\mathscr{I}(n)) = Q(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $m(Q)$ regulär ist, d.h. $H^i(\mathscr{I}(m(Q)-i)) = 0$ für $i > 0$, ([M], S. 99).

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt: k Körper, $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, $I \subset S$ graduiertes Ideal, erzeugt von

$$I_d, \quad d \geqq m(Q), \quad M = S/I, \quad \dim M_d = P(d), \quad P(T) = \binom{T+r}{r} - Q(T).$$

(1.2) **Satz.** *Wenn M das Hilbertpolynom P hat* (*d.h.* $\dim M_n = P(n)$ *für alle* $n \gg 0$), *dann ist für* $n \geqq d$

(i) $I_n = H^0(\mathbb{P}_k^r, \tilde{I}(n))$, (ii) $M_n \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}_k^r, \tilde{M}(n))$, (iii) $\dim M_n = P(n)$.

Beweis. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I_d & \longrightarrow & S_d & \longrightarrow & M_d & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.}} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan.}} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{I}(d)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{S}(d)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}(d)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Da $d \geqq m(Q)$, ist $H^1(\tilde{I}(d)) = 0$, daher die untere Zeile exakt. Also ist der letzte senkrechte Pfeil surjektiv. Wegen $H^i(\tilde{M}(d)) = 0$ für $i > 0$ ist $P(d) = \dim H^0(\tilde{M}(d))$, folglich der letzte senkrechte Pfeil bijektiv und damit auch der erste. Es ist weiter $H^0(\tilde{I}(n+1)) = S_1 H^0(\tilde{I}(n))$, $n \geqq d$ ([M], S. 99), folglich $H^0(\tilde{I}(n)) = I_n$. Wegen $H^1(\tilde{I}(n)) = 0$ folgt hieraus $M_n = H^0(\tilde{S}(n))/H^0(\tilde{I}(n)) = H^0(\tilde{M}(n))$.

(1.3) **Satz.** *Wenn k ein unendlicher Körper ist und M das Hilbertpolynom P hat, dann gibt es eine Linearform $t \in S_1$, so daß die Sequenzen*

$$0 \to M_n \xrightarrow{t} M_{n+1} \to M_{n+1}/tM_n \to 0 \tag{1}$$

exakt sind und $M'_n = M_n/tM_{n-1}$ die Dimension $P'(n) = P(n) - P(n-1)$ hat für alle $n \geqq d$.

Beweis. Es gibt bekanntlich ein $t \in S_1$, so daß $0 \to \tilde{M}(-1) \xrightarrow{t} \tilde{M} \to \tilde{M}' \to 0$ exakt ist. M' hat das Hilbertpolynom P', und es ist $m(Q') \leqq m(Q)$. Nach (1.2) sind in

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M_n & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow & M'_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\wr} & & \downarrow{\wr} & & \downarrow{\wr} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}(n)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}(n+1)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}'(n+1)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

die Zeilen exakt und $I_n = H^0(\tilde{I}(n))$, $n \geqq d$. Sei $L = \{x \in S_{d-1} \mid tx \in I_d\}$. Aus den Äquivalenzen

$$x \in L \Leftrightarrow tx \in I_d \Leftrightarrow X_i(tx) \in I_{d+1} \Leftrightarrow X_i x \in I_d \quad (0 \leqq i \leqq r) \Leftrightarrow x \in H^0(\tilde{I}(d-1))$$

(S_+ ist nicht zu S/I assoziiert), folgt $L=H^0(\tilde{I}(d-1))$. Da $H^1(\tilde{I}(d-1))=0$, ist $S_{d-1}/L\simeq H^0(\tilde{M}(d-1))$, und wegen $H^i(\tilde{M}(d-i))=0$, $i>0$, folgt $\dim S_{d-1}/L=P(d-1)$. Nach (1.2) reicht es zu zeigen, daß $\dim M'_d=P'(d)$ ist. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S_{d-1}/L & \longrightarrow & M_d & \longrightarrow & M'_d & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}(d-1)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}(d)) & \longrightarrow & H^0(\tilde{M}'(d)) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(1.4) Wenn I_d von $f_1,\ldots,f_m$ erzeugt wird, dann ist der Relationenmodul R von I bezüglich $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_m)$ definiert durch

$$R_n=\{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in S_n^m \mid \mathbf{f}\cdot\mathbf{x}=\textstyle\sum f_i x_i=0\};$$

$R=\bigoplus_{n\geqq 0} R_n$ ist ein graduierter S-Modul.

Satz. *Wenn M das Hilbertpolynom P hat, dann ist $R_{n+1}=S_n R_1$, $n\geqq 0$.*

Beweis. Sei $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß von k; wegen der Invarianz des Hilbertpolynoms bei Basiserweiterungen ist der Relationenmodul von $I\otimes_k\bar{k}$ gleich $R\otimes_k\bar{k}$, so daß man ohne Einschränkung annehmen kann, k sei unendlich. Man schließt dann durch Induktion nach r, wobei der Fall $r=0$ klar ist. Die Aussage sei für $r-1$ richtig. Mit den Bezeichnungen von (1.3) setzen wir $S'=S/tS(-1)$ und $I'=I+tS(-1)/tS(-1)$. Dann ist $M'=S'/I'$ ein graduierter S'-Modul, und die Restklassen der f_i erzeugen I'_d. Wegen $m(Q)\geqq m(Q')$ gilt nach Induktionsvoraussetzung für den Relationenmodul R' von I'

$$R'_{n+1}=S'_n R'_1. \tag{2}$$

Wie man leicht nachrechnet, ergibt sich aus der exakten Sequenz (1) von (1.3), daß für $n\geqq 1$ der Homomorphismus $(S_n^m/tS_{n-1}^m)/(R_n+tS_{n-1}^m/tS_{n-1}^m)\to I'_{d+n}$, der die Restklasse von $\mathbf{x}\in S_n^m$ auf die Restklasse von $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}\in I_{d+n}$ in I'_{d+n} abbildet, bijektiv ist. Man erhält $R'_n=R_n+tS_{n-1}^m/tS_{n-1}^m$ und durch Einsetzen in (2)

$$R_{n+1}\subset R_n S_1+tS_n^m. \tag{3}$$

Sei $\mathbf{x}\in R_{n+1}$; wegen (3) kann man schreiben $\mathbf{x}=\mathbf{y}+t\mathbf{z}$ mit $\mathbf{y}\in R_n S_1$, $\mathbf{z}\in S_n^m$. Dann ist $t\mathbf{z}\in R_{n+1}$, daher $\mathbf{z}\in R_n$, und es folgt $R_{n+1}\subset R_n S_1$.

(1.5) Mit den vorhergehenden Hilfssätzen kann man nun zeigen:

Satz. *A sei ein lokaler Ring mit $A/\mathfrak{m}=k$, $S=A[X_0,\ldots,X_r]$, $I\subset S$ ein graduiertes Ideal erzeugt von I_d, $\dim M_d\otimes k=P(d)$. Äquivalent sind*

(i) *M_n ist frei vom Rang $P(n)$ für alle $n\geqq d$,*

(ii) *M_n ist frei vom Rang $P(n)$ für alle $n\gg 0$,*

(iii) *$M\otimes k$ hat das Hilbertpolynom P, und M_{d+1} ist flach vom Rang $P(d+1)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt mit Hilfe von (EGA III, 7.9.9), kann aber auch direkt gezeigt werden. Man wählt dazu ein $t\in S_e$, $e>0$, so daß $0\to\tilde{M}\otimes k\xrightarrow{t}\tilde{M}(e)\otimes k$ exakt ist. Nach (1.2,ii) ist $M_n\otimes k\simeq H^0(\tilde{M}(n)\otimes k)$, daher

$0 \to M_n \otimes k \xrightarrow{t} M_{n+e} \otimes k$ exakt für $n \geqq d$. Wenn M_{n+e} frei ist, dann auch M_n. Sei nun M_{d+1} flach. Sei R der Relationenmodul von I, $\bar{R}$ der Relationenmodul von $\operatorname{Im}(I \otimes k \to S \otimes k)$. Da I_{d+1} flach ist, bleibt die exakte Sequenz $0 \to R_1 \to S_1^m \to I_{d+1} \to 0$ nach Tensorieren exakt, folglich ist $R_1 \otimes k \simeq \bar{R}_1$, und nach (1.4) wird der $S \otimes k$-Modul $\bar{R}$ von R_1 erzeugt. $M_{d+\nu}$ ist frei, falls $I_{d+\nu} \otimes k \to S_{d+\nu} \otimes k$ injektiv ist. Sei $x \otimes 1$ ein Element aus dem Kern. Man kann schreiben $x = \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \in S_\nu^m$. Da $\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = 0$, ist $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{R}_\nu = (S_{\nu-1} \otimes k) R_1$, folglich $\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{x}_i + \mathbf{y}$ mit $c_i \in S_{\nu-1}$, $\mathbf{x}_i \in R_1$, $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{m} S_\nu^m$. Es folgt $x = \mathbf{f} \cdot \mathbf{y} \in \mathfrak{m} I_{d+\nu}$.

2. Ergebnisse von Macaulay und Sperner, formale Eigenschaften von Hilbertpolynomen, monomiale Ideale

Im folgenden ist $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, $r \geqq 1$.

Erinnerung an Sätze von Macaulay und Sperner

(2.1) Sei $\mathscr{M} \subset S_d$ die Menge der a ersten Monome in der lexikographischen Ordnung, $S_1 \mathscr{M} = \{X_i x \mid x \in \mathscr{M}, 0 \leqq i \leqq r\}$. Die Kardinalzahl $|S_1 \mathscr{M}| = a^{(r)}$ hängt nicht mehr von d ab, d.h. man kann $\mathscr{M}$ durch $X_0^n \mathscr{M} \subset S_{d+n}$ ersetzen. Ein Satz von Macaulay sagt, daß für irgendeine Menge $\mathscr{N} \subset S_d$ von a Monomen stets $|S_1 \mathscr{M}| \leqq |S_1 \mathscr{N}|$ ist ([S], S. 151).

Hieran kann man einige Bemerkungen anschließen.

(2.2) Wenn $\mathscr{M}$ die Menge der a ersten Monome von S_d ist, dann ist $S_1 \mathscr{M}$ die Menge der $a^{(r)}$ ersten Monome von S_{d+1} ([S], S. 151).

(2.3) Wenn $a < b$ ist, dann ist $a^{(r)} < b^{(r)}$.

(2.4) Wenn $0 < a \leqq \binom{d+r}{r}$ eine ganze Zahl ist, dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $0 \leqq a_0 \leqq \cdots \leqq a_s \leqq d$, $0 \leqq s \leqq r-1$, mit

$$a = \binom{d - a_0 + r}{r} + \binom{d - a_1 + r - 1}{r-1} + \cdots + \binom{d - a_s + r - s}{r - s}$$

und es ist

$$a^{(r)} = \binom{d + 1 - a_0 + r}{r} + \cdots + \binom{d + 1 - a_s + r - s}{r - s}.$$

Sei J das von der Menge $\mathscr{M}$ in (2.1) erzeugte graduierte Ideal. Für das Polynom

$$Q_{r,d,a}(T) = \binom{T - a_0 + r}{r} + \cdots + \binom{T - a_s + r - s}{r - s}, \qquad (*)$$

$0 \leqq a_0 \leqq \cdots \leqq a_s \leqq d$, $0 \leqq s \leqq r-1$, ist $Q_{r,d,a}(n) = \dim J_n = |S_{n-d} \mathscr{M}|$ für $n \geqq d$; insbesondere hat J also das Hilbertpolynom $Q_{r,d,a}$ ([S], S. 161–163).

(2.5) Jedes $Q \in \mathbb{Q}[T]$, das Hilbertpolynom eines graduierten Ideals in S ist, läßt sich eindeutig in der Form $(*)$ von (2.4) darstellen ([S], S. 161–163).

Definition. $n(Q) = a_s$ für $Q \neq 0$. $n(Q) = 0$ für $Q = 0$ oder $r = 0$.

Es ist also immer $n(Q_{r,d,a}) \leqq d$.

(2.6) Wenn $n_0 \geqq n(Q)$ und I ein graduiertes Ideal ist mit $\dim I_{n_0} = Q(n_0)$, dann folgt $\dim I_n \geqq Q(n)$, $n \geqq n_0$. Wenn $\dim I_{n_0} > Q(n_0)$ ist, dann folgt $\dim I_n > Q(n)$, $n \geqq n_0$.

Beweis. Setzt man $a = Q(n_0)$, dann ist $a^{(r)} = Q(n_0 + 1)$, wie aus (2.4) folgt. Weiter ist $\dim S_1 I_{n_0} \geqq a^{(r)}$ ([S], p. 157–158). Durch Iteration folgt die erste Aussage, und die zweite folgt hieraus wegen (2.3).

Formale Eigenschaften von Hilbertpolynomen

(2.7) Wenn man setzt $Q'(n) = Q_{r,d,a}(n) - Q_{r,d,a}(n-1)$, $(n \geqq d+1)$, und $a' = a^{(r)} - a$, dann ist $Q'(n) = Q_{r-1,d+1,a'}(n)$, $(n \geqq d+1)$.

Beweis. Zunächst ist die Sequenz

$$0 \to S_n/J_n \xrightarrow{X_r} S_{n+1}/J_{n+1} \to S_{n+1}/J_{n+1} + X_r S_n \to 0$$

exakt. Außerdem hat man eine Zerlegung $S_1 \mathscr{M} = X_r \mathscr{M} \cup \mathscr{M}'$, in der $S_1 \mathscr{M}$ die Menge der $a^{(r)}$ ersten Monome vom Grad $d+1$ und $\mathscr{M}'$ die Menge der a' ersten Monome in $X_0, \ldots, X_{r-1}$ ist. Wenn man $J + X_r S(-1)/X_r S(-1)$ mit einem Ideal in $k[X_0, \ldots, X_{r-1}]$ identifiziert, sieht man, daß es von $\mathscr{M}'$ erzeugt wird.

(2.8) Mit den Bezeichnungen von (2.5) und (2.7) ist $n(Q) \geqq n(Q')$.

Beweis. Für $r = 1$ ist das klar, sei daher $r \geqq 2$. Wenn in Gleichung $(*)$ von (2.4) $s < r-1$ ist, erhält man $n(Q') = a_s = n(Q)$. Wenn $s = r-1$, dann gibt eine Rechnung mit Binomialkoeffizienten, daß $n(Q) = a_{r-1} \geqq a_{r-2} > a_{r-2} - 1 = n(Q')$.

(2.9) **Lemma.** *Für die Regularitätsschranke aus* (1.1) *und die in* (2.5) *definierte Zahl gilt* $m(Q) \leqq n(Q)$ *(insbesondere also* $m(Q_{r,d,a}) \leqq d$*).*

Beweis. Induktion nach r, wobei der Fall $r = 0$ klar ist. Sei $d = n(Q)$, $X = \mathbb{P}^r_k$, k algebraisch abgeschlossen, $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ Ideal mit $\chi(\mathscr{I}) = Q$, $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X/\mathscr{I}$. Wenn $d = 0$, ergibt sich $Q = 0$ oder $\binom{T+r}{r}$, d.h. $\mathscr{I} = 0$ oder $= \mathcal{O}_X$, und beide Garben sind 0-regulär. Daher kann man $d \geqq 1$ voraussetzen. Es gibt ein $t \in S_1$, so daß

$$0 \to \mathscr{F}(-1) \xrightarrow{t} \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \to 0, \qquad 0 \to \mathscr{I}(-1) \xrightarrow{t} \mathscr{I} \to \mathscr{I}' \to 0$$

mit

$$\mathscr{I}' = \mathscr{I} + t\mathcal{O}_X(-1)/t\mathcal{O}_X(-1), \qquad \mathscr{F}' = (\mathcal{O}_X/t\mathcal{O}_X(-1))/\mathscr{I}'$$

exakt sind. Es folgt $\chi(\mathscr{I}') = Q'$. Da $n(Q') \leqq n(Q)$ und nach Induktionsvoraussetzung $n(Q') \geqq m(Q')$, ist $\mathscr{I}'$ d-regulär. Aus der letzten exakten Sequenz folgt $H^i(\mathscr{I}(d-i)) = 0$, $(i \geqq 2)$ ([M], S. 102). Es bleibt zu zeigen, daß $H^1(\mathscr{I}(d-1)) = 0$.

Da die höheren Kohomologiegruppen 0 sind, ist

$$Q(d-1)=\dim H^0(\mathscr{I}(d-1))-\dim H^1(\mathscr{I}(d-1))$$

und daher $\dim H^0(\mathscr{I}(d-1))>Q(d-1)$, wenn man annimmt, daß $H^1(\mathscr{I}(d-1))\neq 0$.
Nach Gleichung (*) von (2.4) ist

$$Q(d-1)=\binom{d-1-a_0+r}{r}+\cdots+\binom{d-1-a_s+r-s}{r-s},$$

daher $Q(d-1)\geqq 0$. Da $b=\dim H^0(\mathscr{I}(d-1))\leqq\binom{d-1+r}{r}$, hat man

$$b=\binom{d-1-b_0+r}{r}+\cdots+\binom{d-1-b_t+r-t}{r-t}$$

mit

$$0\leqq b_0\leqq\cdots\leqq b_t\leqq d-1,\qquad r-t\geqq 1.$$

Es können zwei Fälle eintreten:

1. Es gibt ein $0\leqq q\leqq\min(s,t)$ mit $a_i=b_i$ für $i<q$ und $a_q>b_q$.
2. $a_i=b_i$ für $0\leqq i\leqq s$ und $t>s$.

Im ersten Fall folgt mit (2.2) und (2.4) für $v\geqq 0$

$$\begin{aligned} b^{\overbrace{(r)\ldots(r)}_{(v+1)\text{-mal}}}-Q(d+v) &\geqq \binom{d+v-b_q+r-q}{r-q}-\sum_{\mu=q}^{s}\binom{d+v-a_\mu+r-\mu}{r-\mu}\\ &>\binom{d+v-b_q+r-q}{r-q}-\sum_{\rho=0}^{r-q}\binom{d+v-a_q+\rho}{\rho}\\ &=\binom{d+v-b_q+r-q}{r-q}-\binom{d+v-a_q+1+r-q}{r-q}\geqq 0. \end{aligned}$$

Im 2. Fall erhält man

$$b^{(r)\ldots(r)}-Q(d+v)\geqq\binom{d+v-b_t+r-t}{r-t}\geqq 1.$$

Nach (2.6) folgt

$$\dim H^0(\mathscr{I}(d+v))\geqq\dim S_{v+1}H^0(\mathscr{I}(d-1))\geqq b^{(r)\ldots(r)}>Q(d+v)\qquad(v\geqq 0).$$

Das ist ein Widerspruch zu $\chi(\mathscr{I}(n))=\dim H^0(\mathscr{I}(n))$, $n\gg 0$.

(2.10) Wenn $d\geqq n(Q)$ und $L\subset S_{d-1}$ ein Vektorraum mit $\dim L>Q(d-1)$ ist, dann ist $\dim S_1 L>Q(d)$.

Beweis. Nach (2.6) ist $\dim S_1 L\geqq(\dim L)^{(r)}$, und im Beweis von (2.9) hatte sich $(\dim L)^{(r)}>Q(d)$ ergeben.

Monomiale Ideale

(2.11) **Hilfssatz.** *Sei* $d \geqq n(Q)$, $I_d \subset S_d$ *Vektorraum der Dimension* $Q(d)$, I *das von* I_d *erzeugte Ideal. Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:* $1^\circ \dim I_n = Q(n)$ *für* $n=d$, $d+1$, 2° *es gibt ein* $t \in S_1$, *so daß für* $I' = I + tS(-1)/tS(-1)$ *in* $S' = S/tS(-1)$ $\dim I'_n = Q'(n)$ *für alle* $n \geqq d$ *ist, dann ist* $\dim I_n = Q(n)$ *für alle* $n \geqq d$.

Beweis. Sei R bzw. R' der Relationenmodul von I bzw. I' (vgl. (1.4)).

Man hat die exakte Sequenz für $v \geqq 1$

$$0 \to S_v^m/R_v \xrightarrow{t} S_{v+1}^m/R_{v+1} \to S_{v+1}^m/R_{v+1} + tS_v^m \to 0. \tag{1}$$

Da $S_v^m/R_v \simeq I_{d+v}$, ist $\dim S_1^m/R_1 = Q(d+1)$. Wenn man wüßte, daß

$$\dim(S_{v+1}^m/R_{v+1} + tS_v^m) = Q'(d+v) \quad (v \geqq 1), \tag{2}$$

dann würde mit (1) sofort die Behauptung folgen. Aus der Voraussetzung 2° folgt $\dim S_v'^m/R'_v = Q'(d+v)$, $v \geqq 0$.

Es reicht daher zu zeigen, daß $S'^m_{v+1}/R'_{v+1} \simeq S_{v+1}^m/R_{v+1} + tS_v^m$, d.h.

$$R_{v+1} + tS_v^m/tS_v^m \simeq R'_{v+1}, \qquad (v \geqq 0). \tag{3}$$

Beweis von (3). Aus Dimensionsgründen ist die Sequenz

$$0 \to S_d/I_d \to S_{d+1}/I_{d+1} \to S'_{d+1}/I'_{d+1} \to 0$$

exakt. Wie man leicht nachrechnet, folgt hieraus $S_1^m/R_1 + tS_0^m \simeq I'_{d+1}$ und daher $R_1 + tS_0^m/tS_0^m = R'_1$. Da $d \geqq n(Q')$, folgt nach (1.4) $R'_{v+1} = S'_v R'_1 = S_v R_1 + tS_v^m/tS_v^m$. Hieraus folgt (3).

(2.12) **Hilfssatz.** *Sei* $\mathscr{A}$ *eine Menge von a Monomen aus* S_d, I *das von* $\mathscr{A}$ *erzeugte Ideal, und sei* $\dim I_n = Q_{r,d,a}(n)$ *für* $n=d$, $d+1$. *Unter der Voraussetzung, daß der anfangs genannte Satz für* $r-1$ *gilt, folgt* $\dim I_n = Q_{r,d,a}(n)$ *für alle* $n \geqq d$.

Beweis. Man kann ohne Einschränkung annehmen, k sei algebraisch abgeschlossen. Man schließt durch Induktion nach d, wobei der Fall $d=1$ klar ist, da dann I_d von einer Anzahl der X_i erzeugt wird. Man hat $\mathscr{A} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$, wobei $\mathscr{B}$ bzw. $\mathscr{C}$ die Menge der Monome von $\mathscr{A}$ ist, die X_0 als Faktor enthalten bzw. nicht als Faktor enthalten. Sei $|\mathscr{A}| = a$, $|\mathscr{B}| = |b|$, $|\mathscr{C}| = c$, und ohne Einschränkung ist $c \neq 0$. Für ein $t \in S_1$ haben S', I', Q' die gleiche Bedeutung wie in (2.11). Es ist $Q'(d+1) = a^{(r)} - a$ (2.7).

1. Fall. $c^{(r-1)} \geqq a^{(r)} - a$. Mit $t = X_0$ ist die Sequenz

$$M_d \xrightarrow{t} M_{d+1} \to M'_{d+1} \to 0 \tag{1}$$

exakt, daher $\dim I'_{d+1} \leqq Q'(d+1)$. Es folgt $\dim I'_{d+1} = Q'(d+1)$, und der erste Pfeil in (1) ist injektiv. Für $L = \{x \in S_{d-1} | tx \in I_d\}$ gilt daher $S_1 L \subset I_d$. Die Sequenz $0 \to S_{d-1}/L \xrightarrow{t} M_d \to M'_d \to 0$ ist exakt. Angenommen, es wäre $\dim M'_d > P'(d)$. Dann wäre $\dim L > Q(d-1)$ und wegen (2.10) dann $\dim I_d \geqq \dim S_1 L > Q(d)$, Widerspruch. Wegen $d \geqq n(Q')$ folgt aus (2.6) $\dim I'_d = Q'(d)$. Nach Voraussetzung ist dann $\dim I'_n = Q'(n)$ für alle $n \geqq d$, so daß mit (2.11) die Behauptung folgt.

2. *Fall.* $c^{(r-1)} < a^{(r)} - a$. Sperner zeigt in seinem Beweis des Satzes von Macaulay (erste Gleichung auf S. 153), daß dann $b^{(r)} + c^{(r-1)} \geqq a^{(r)}$ ist. Da $S_1 \mathscr{A} \supset S_1 \mathscr{B} \cup S_1' \mathscr{C}$, $|S_1 \mathscr{A}| = a^{(r)}$ (nach Voraussetzung) und $|S_1 \mathscr{B}| \geqq b^{(r)}$, $|S_1' \mathscr{C}| \geqq c^{(r-1)}$ (Satz von Macaulay), folgt dann

$$a^{(r)} = |S_1 \mathscr{A}| \geqq |S_1 \mathscr{B}| + |S_1' \mathscr{C}| \geqq b^{(r)} + c^{(r-1)} \geqq a^{(r)}.$$

Hieraus erhält man

$$S_1 \mathscr{A} = S_1 \mathscr{B} \cup S_1' \mathscr{C}, \qquad |S_1 \mathscr{B}| = b^{(r)}, \qquad |S_1' \mathscr{C}| = c^{(r-1)}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt zunächst $X_0 \mathscr{C} \subset S_1 \mathscr{B}$ und hieraus mit (2)

$$S_\nu \mathscr{A} = S_\nu \mathscr{B} \cup S_\nu' \mathscr{C}, \qquad (\nu \geqq 0). \tag{3}$$

Sei $Q_1 = Q_{r,d-1,b}$, $Q_2 = Q_{r-1,d,c}$, J das von $\mathscr{B}$ erzeugte Ideal, K das von $\mathscr{C}$ in $S' = S/X_0 S(-1)$ erzeugte Ideal. Nach Voraussetzung folgt aus (2)

$$\dim J_n = Q_1(n), \qquad \dim K_n = Q_2(n), \qquad n \geqq d. \tag{4}$$

Man hat eine exakte Sequenz von graduierten S-Moduln

$$0 \to J \to I \to L \to 0,$$

wobei wegen (3) $L_n \simeq K_n + X_0 S_{n-1}/X_0 S_{n-1}$. Folglich ist der Träger des $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^r}$-Moduls $\tilde{L}$ in $V_+(X_0) \simeq \mathbb{P}_k^{r-1}$ enthalten, und $H^i(\tilde{L}(n)) = H^i(\tilde{K}(n))$. Hieraus erhält man eine lange exakte Kohomologiesequenz, in der wegen $n(Q_1) \leqq d$, $n(Q_2) \leqq d$ die Garben $\tilde{J}$ und $\tilde{K}$ d-regulär sind (2.9), folglich auch $\tilde{I}$. Aus (3) und (4) folgt $\chi(\tilde{I}) = Q_1 + Q_2$, daher $\dim H^0(\tilde{I}(n)) = \chi(\tilde{I}(n)) = Q_1(n) + Q_2(n)$, $(n \geqq d)$. Hieraus folgt für $n = d$, $d+1$ aus (2) und (4) $I_n = H^0(\tilde{I}(n))$, $n = d$, $d+1$. Da $H^1(\tilde{I}(n)) = 0$, $n \geqq d$, ergibt sich hieraus $M_n = H^0(\tilde{M}(n))$, $n = d$, $d+1$. Daher gibt es ein $t \in S_1$, so daß $0 \to M_d \xrightarrow{t} M_{d+1}$ exakt ist. Man schließt dann wie im ersten Fall weiter.

3. Zusammenhang des Satzes mit dem Hilbertschema

(3.1) *Bezeichnungen.* Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, C_K die Kategorie der noetherschen K-Schemata, $A \in C_K$ soll heißen, daß A noethersche K-Algebra ist. S bezeichnet $K[X_0, \dots, X_r]$ oder $A[X_0, \dots, X_r]$. Sei $d \geqq n(Q)$, $p = Q(d)$, $q = Q(d+1)$, $V = \mathrm{Grass}^p(S_d)_K \times \mathrm{Grass}^q(S_{d+1})$. W sei folgendes Unterschema von V: Für $A \in C_K$ sei $W(A) = \{(F, G) \mid F \subset S_d,\ G \subset S_{d+1}$ lokale direkte Summanden vom Rang p bzw. q über A mit $S_1 F \subset G\}$.

Bemerkungen. (3.2) Man hat $W(A) = \{(F, G) \in V(A) \mid S_1 F = G\}$.

(3.3) W ist ein abgeschlossenes Unterschema von V, also projektiv.

Die Beweise sind einfach und werden weggelassen.

(3.4) Das Hilbertschema $H = \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}_K^r}^P$ ist ein offenes und abgeschlossenes Unterschema von W.

Beweis. Sei $\mathscr{S}=\mathcal{O}_W[X_0,\dots,X_r]$, $(\mathscr{F},\mathscr{G})$ das universelle Element von $W(W)$, $\mathscr{M} = \bigoplus_{v\geqq 0} \mathscr{S}_{v+d}/\mathscr{S}_v\mathscr{F}$. Aus der Konstruktion von H in ([M], Lecture 15) ergibt sich, daß H das „größte" Unterschema von W ist, so daß der $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_H}$-Modul $\tilde{\mathscr{M}}\bigotimes_W \mathcal{O}_H$ flach über H mit Hilbertpolynom P ist. Sei Z die Menge der Punkte $z\in W$, in denen $\mathscr{M}\bigotimes_W k(z)$ das Hilbertpolynom P hat. Nach (1.5, iii) ist das gleichbedeutend damit, daß $\mathscr{M}_n\otimes\mathcal{O}_z$ frei vom Rang $P(n)$ über $\mathcal{O}_z$ ist für alle $n\geqq d$. Man sieht leicht, daß Z dann eine offene Menge, also H ein offenes Unterschema von W ist.

Sei andererseits Z_n das größte Unterschema von W, so daß $\mathscr{M}_n\otimes\mathcal{O}_{Z_n}$ flach über $\mathcal{O}_{Z_n}$ vom Rang $P(n)$ ist. Wegen (2.6) ist $\dim\mathscr{M}_n\otimes k(x)\leqq P(n)$ für alle $x\in W$, $n\geqq d$, daher Z_n abgeschlossen ([G], 3.6). Man kann nun direkt zeigen, daß es ein n_0 gibt, so daß $Z_n=Z_{n_0}$ für alle $n\geqq n_0$. Nach (1.5, ii) ist dann $H=Z_{n_0}$, also abgeschlossen.

(3.5) Operation von G_m auf W

Sei $0\leqq i\leqq r$, für $A\in C_K$ und $\lambda\in A^*$ sei φ^i_λ der Automorphismus von $A[X_0,\dots,X_r]$ definiert durch $X_i\to\lambda X_i$, $X_j\to X_j$ für $i\neq j$. G^i_m soll die multiplikative Gruppe $G_m=\operatorname{Spec} K\left[T;\frac{1}{T}\right]$ sein, die auf W operiert durch $(\lambda,(F,G))\to(\varphi^i_\lambda(F),\varphi^i_\lambda(G))$.

(3.6) Sei $x\in W(K)$ ein abgeschlossener Punkt. Dann gibt es einen abgeschlossenen Punkt $y\in W(K)$, invariant unter G^i_m, und einen K-Morphismus $f\colon \mathbb{P}^1_K\to W$, so daß x und y aus dem Bild von f sind.

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der des Théorème de point fixe in ([D–G], S. 531).

(3.7) *Beweis des Satzes.* 1° Wir zeigen, daß W gleich dem Hilbertschema H von (3.4) ist. Sei $x\in W(K)$. Nach (3.6) kann man x durch eine zusammenhängende Kurve C_0 in W mit einem $x_0\in W(K)$ verbinden, das invariant unter G^0_m ist. Dann verbindet man x_0 durch eine zusammenhängende Kurve C_1 in W mit einem $x_1\in W(K)$, invariant unter G^1_m. Da aber die Operation von G^0_m und G^1_m vertauschbar sind und x_0 invariant unter G^0_m ist, ist auch x_1 invariant unter G^0_m. Nach r Schritten hat man x mit einem $x_r\in W(K)$ verbunden, das invariant unter G^i_m ist, $0\leqq i\leqq r$. Wenn $(F,G)\in W(K)$ dem Punkt x_r entspricht, dann sieht man leicht, daß der Unterraum $F\subset S_d$ von Monomen erzeugt wird.

Man schließt jetzt durch Induktion nach r. Für $r=0$ ist der Satz klar, da I_d entweder 0 oder S_d ist. Nach (2.12) hat das durch F erzeugte Ideal das Hilbertpolynom P, d.h. $x_r\in H$. Wir haben jedes $x\in W(K)$ mit einem Punkt aus $H(K)$ verbunden. Wegen (3.4) folgt $W=H$.

2° Der Beweis ist zunächst nur für $A\in C_K$ geführt worden. Sei nun ohne Einschränkung A ein beliebiger lokaler Ring mit Restklassenkörper k, $\bar{k}$ ein algebraischer Abschluß. Nach 1° hat $M\otimes\bar{k}$ das Hilbertpolynom P, daher auch $M\otimes k$, so daß die Behauptung nach (1.5) folgt.

(3.8) **Korollar.** *Wenn* M_d *und* M_{d+v} *flach vom Rang* $P(d)$ *bzw.* $P(d+v)$ *für irgendein* $v \geqq 1$ *ist, dann für alle* $v \geqq 1$.

Beweis. Man kann A lokal annehmen. Aus (2.6) folgt, daß $\dim M_{d+1} \otimes k = P(d+1)$ ist. Also hat $M \otimes k$ das Hilbertpolynom P. Da man im Beweis von (1.5) die Zahl $d+1$ durch $d+v$, $v \geqq 1$, ersetzen kann, folgt hieraus das Korollar.

(3.9) **Korollar.** *Sei* $I \subset S$ *ein graduiertes Ideal, erzeugt von* I_d, $d \geqq n(Q)$ *(vgl.* (2.5)), $M = S/I$ *und* $\dim M_d \otimes k(x) \leqq P(d)$ *für alle* $x \in \operatorname{Spec}(A)$. *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) M_n *ist flach über* A *vom Rang* $P(n)$ *für alle* $n \geqq d$.

(ii) M_n *ist flach über* A *vom Rang* $P(n)$ *für ein* $n > d$.

Beweis. Man kann A lokal annehmen. Aus (2.6) folgt $\dim M_d \otimes k = P(d)$, so daß nach (3.8) $M \otimes k$ das Hilbertpolynom P hat. Dann schließt man wie im Beweis von (3.8).

Literatur

1. Berman, D.: Simplicity of a vector space of forms: Finiteness of the number of complete Hilbertfunctions. J. Algebra **45**, 88 (1977)
2. [D – G], Demazure, M., Gabriel P.: Groupes Algébriques, Amsterdam: North-Holland (1970)
3. Grothendieck, A.: Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. III, Publ. math. Inst. haut. Étud. sci. **17**, 137 – 223 (1963)
4. [G], Grothendieck, A.: Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schemas de Hilbert. In: Séminaire Bourbaki, 13e anée 1960/61. Fasc. 3, Exposés 217à 222. Exposé 221. Paris: Secrétariat mathematique 1961
5. Hartshorne, R.: Connectedness of the Hilbert schema, Inst. haut. Étud. sci. Publ. math. **29**, 261 – 309 (1966)
6. [M], Mumford, D.: Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton: Princeton University Press 1966
7. [S], Sperner, E.: Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay und seine Anwendungen auf die Theorie der Polynomideale, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, **7**, 149 – 163 (1930)

Eingegangen am 14. Juni 1977