Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert

Von ALEXANDER OSTROWSKI, Basel

Ist die Funktion $h(x)$ im Intervall $< a, b >$ stetig, so kann ihre Abweichung von ihrem Integralmittelwert $\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx$ dennoch beliebig nah an die Differenz zwischen ihrem Maximum und Minimum heranreichen.

Dies wird nun anders, wenn man die beschränkte Differentiierbarkeit von $h(x)$ voraussetzt. Ist etwa in unserm Intervall $|h'(x)| \leqq m$, so kann die Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum von $h(x)$ den Wert $(b-a)\,m$ nicht übersteigen, kann aber diesen Wert sehr wohl erreichen.

Die Absolutabweichung von $h(x)$ von ihrem Integralmittelwert überschreitet aber in diesem Falle $\frac{1}{2}(b-a)\,m$ nicht, ja, im Mittelpunkt des Intervalls gilt sogar für die Absolutabweichung die Schranke $\frac{1}{4}(b-a)\,m$.

Genauer gilt folgendes:

Es sei $h(x)$ im Intervall $J: a < x < b$ stetig und differentiierbar, und es sei in J durchweg

$$|h'(x)| \leqq m, \quad m > 0\,. \tag{1}$$

Dann gilt für jedes x aus J:

$$\left| h(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx \right| \leqq \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right)(b-a)\,m\,. \tag{2}$$

Offenbar nimmt hier der erste Faktor rechts in der Mitte von J den Wert $\frac{1}{4}$ an und steigt sodann monoton gegen den Wert $\frac{1}{2}$, den er in den beiden Endpunkten von J annimmt.

Beim Beweis der obigen Behauptung darf offenbar angenommen werden, daß der Integralmittelwert von $h(x)$ verschwindet, da man sonst nur $h(x)$ um diesen Mittelwert zu verkleinern braucht. Ferner darf $m = 1$ angenommen werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(x)}{m}$ ersetzen kann, und endlich darf das Intervall J als das Intervall $(0, 1)$ vorausgesetzt werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(a + x(b-a))}{b-a}$ ersetzen kann.

Wir dürfen daher unsere Annahmen über $h(x)$ durch

$$\int_0^1 h(x)dx = 0\,, \quad |h'(x)| \leqq 1\,, \quad (0 < x < 1) \tag{3}$$

ersetzen, und die zu beweisende Behauptung reduziert sich auf

$$|\,h(x)\,| \leqq \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 . \tag{4}$$

Um nun eine Schranke für $|h(x)|$ in einem Punkte x_0 von J herzuleiten, darf man offenbar unbeschadet der Allgemeinheit $h(x_0) \geqq 0$ voraussetzen, da man sonst $-h(x)$ anstatt $h(x)$ betrachten kann. Dann gilt aber wegen (3)

$$h(x) \geqq h(x_0) - |x - x_0|\,.$$

Integriert man dies zwischen 0 und 1, so ergibt sich wegen (3)

$$0 = \int_0^1 h(x)\,dx \geqq h(x_0) - \int_0^1 |\,x - x_0\,|\,dx\,,$$

$$h(x_0) \leqq \int_0^1 |\,x - x_0\,|\,dx = \tfrac{1}{4} + (x_0 - \tfrac{1}{2})^2\,,$$

womit (4) bewiesen ist.

Zugleich sieht man, daß das Gleichheitszeichen in (4) nur gilt, wenn $\pm h(y) = \frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})^2 - |y - x|$ ist.

Analoge Betrachtungen führen natürlich auch bei endlichen Summen zu solchen Ungleichungen. Gilt z. B. für reelle a_ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0\,, \quad |a_{\nu+1} - a_\nu| \leqq d\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{5}$$

so gilt für jedes feste $k = 1, 2, \ldots, n$, wenn $a_k > 0$ ist,

$$a_\nu \geqq a_k - d|\nu - k|\,, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

und daher, wenn man über ν summiert,

$$n\,a_k \leqq d \sum_{\nu=1}^{n} |\,\nu - k\,| = \left[\frac{(n-k)^2 + k^2}{2} + \left(\frac{n}{2} - k\right)\right] d$$

oder

$$\left|\frac{a_k}{nd}\right| \leqq \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) . \tag{6}$$

Ist aber a_k negativ, so kann man die gleichen Betrachtungen auf die Zahlenfolge $-a_\nu$ anwenden, so daß in jedem Falle die Ungleichung (6) für jedes $k = 1, \ldots, n$ aus den Annahmen (5) folgt.

(Eingegangen den 18. Januar 1938.)