Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples (Seconde partie)

Par M. Plancherel et G. Pólya, Zurich

Résumé de la seconde partie

20. La première partie de ce mémoire a paru dans le même périodique[21]). Seul le commencement de la seconde partie se rattache si étroitement à la première qu'il en présuppose la connaissance. Toutefois, nous avons trouvé avantageux de continuer la numérotation de la première partie pour les formules, les paragraphes et les annotations.

Les premiers n^{os} (n^{os} 21—26) donnent quelques corollaires plus ou moins immédiats des théorèmes I et II (n^{os} 1—2) de la première partie et préparent, soit par la méthode, soit par les résultats, notre objet principal.

Le but principal de cette seconde partie est de démontrer deux théorèmes qui sont étroitement liés l'un à l'autre bien que leurs énoncés soient assez différents. Ce sont les théorèmes III et IV dont on trouvera l'énoncé complet aux n^{os} 47 et 49. Les deux se rapportent aux fonctions entières de type exponentiel de n variables; il sera plus commode de n'expliquer ici que le cas $n = 1$.

Le cas $n = 1$ du théorème III contient en particulier le fait suivant:

Soit p un nombre positif et $F(z)$ une fonction entière de type exponentiel, assujettie à la condition que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log \left(|F(-ir)| + |F(ir)| \right) < \pi \ . \tag{42}$$

Alors, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx \tag{43}$$

étendue à toutes les valeurs réelles de x et la série

$$\cdots + |F(-m)|^p + \cdots + |F(-1)|^p + |F(0)|^p + |F(1)|^p + \cdots + |F(m)|^p + \cdots \tag{44}$$

sont équiconvergentes, c'est-à-dire que la convergence de l'une entraîne celle de l'autre.

---

[21]) Commentarii math. helv., vol. 9 (1937), p. 224—248. Le théorème II de la première partie (n° 2) a certaines relations avec un travail de *W. T. Martin* paru entre temps, Special regions of regularity of functions of several complex variables [Annals of Math., vol. 38 (1937), p. 602—625].

Pour $p = 1$, cet énoncé est essentiellement équivalent à un lemme important de Wiener sur les séries de Fourier[22]). Pour $p = 2$ l'intégrale et la série ont la même valeur (voir n° 24). L'énoncé a une certaine analogie avec le résultat suivant de Mlle Cartwright[23]):

Si $F(z)$ est une fonction entière de type exponentiel qui satisfait à la condition (42) *et reste bornée pour toutes les valeurs entières* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ *de z, elle reste aussi bornée pour toutes les valeurs réelles de z.*

En effet, ce résultat peut être considéré comme le cas limite $p \to \infty$ de notre énoncé un peu précisé (voir n° 40).

Nous démontrerons d'ailleurs plus que nous n'avons énoncé ici. La convergence de l'intégrale (43) entraîne celle de la série (44), que la condition (42) soit remplie ou non; elle entraîne même la convergence d'une série plus générale, formée avec une suite assez arbitraire de points à la place de la suite des entiers $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ (n° 31). La condition (42) ne peut pas être complètement négligée quand il s'agit de conclure de la convergence de la série celle de l'intégrale, mais elle peut être remplacée par une autre moins restrictive pourvu que p soit supérieur à 1 (voir l'énoncé du n° 33). Précisément ce dernier point demande des moyens de démonstration plus spéciaux que le reste et a une importance particulière pour le théorème IV.

Le cas $n = 1$ du théorème IV peut être énoncé ainsi:

IV'. *Pour qu'une fonction entière $F(z)$ soit de type exponentiel et possède les deux propriétés suivantes:*

$$\text{(I)} \qquad \varlimsup_{r \to \infty} r^{-1} \log (|F(-ir)| + |F(ir)|) \leqq \pi$$

$$\text{(II)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx \ \textit{existe pour un certain } p > 1,$$

il faut et il suffit qu'elle puisse être représentée par la formule

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [(1-z)\,\Psi(\pi) + z\,\Psi(y)]\, e^{izy} dy, \tag{45}$$

---

[22]) *N. Wiener*, The Fourier Integral and certains of its applications (Cambridge 1933), lemme 6, p. 80.

[23]) *M. L. Cartwright*, On certain integral functions of order one [Quarterly Journal of Math., Oxford ser., vol. 7 (1936) p. 46—55)]. Une seconde démonstration du théorème a été donnée par *A. Pfluger*, On analytic functions bounded at the lattice points [Proceedings London Math. Soc. (2), vol. 42 (1936), p. 305—315]. Il convient encore de citer ici une des solutions d'un problème posé par un de nous: *L. Tschakaloff*, Zweite Lösung der Aufgabe 105 [Jahresbericht der deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 43 (1933), p. *11—13*]. L'énoncé donné dépasse un peu celui de Mlle Cartwright, voir l'annotation[34]).

où $\Psi(y)$ désigne une fonction continue de période 2π dont la série de Fourier

$$\sum_n c_n e^{-iny} \sim \Psi(y) \tag{46}$$

possède la propriété particulière que

$$\sum_n |n c_n|^p \tag{47}$$

converge.

Ce théorème est moins élégant, mais plus général, que le théorème de Paley et de Wiener dont nous nous sommes occupés dans la première partie. En effet, la condition que la série (47) converge pour $p = 2$ est équivalente, d'après des théorèmes fondamentaux connus, à la condition que $\Psi(y)$ soit l'intégrale d'une fonction $\Psi'(y)$ de carré intégrable dans $(-\pi, \pi)$. Nous pouvons alors, en intégrant par parties, transformer la formule (45) dans la suivante

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [\Psi(\pi) + i\Psi'(y)]\, e^{izy} dy,$$

formule qui, avec l'intégrabilité de $|\Psi'(y)|^2$, caractérise le cas où $F(z)$ est de carré intégrable.

Nous démontrerons d'abord les théorèmes III et IV pour $n = 1$. Le passage de l'intégrale (43) à la série (44) occupera les n^os 27—32, le passage inverse de la série à l'intégrale les n^os 33—40. Après cela, nous démontrerons le cas $n = 1$ du théorème IV et nous construirons une fonction entière de type exponentiel et de puissance p-ième intégrable $(p > 2)$ qui n'a pas de transformée de Fourier; puis, nous établirons des relations dont le caractère nous parait nouveau entre les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier d'une fonction définie et intégrable dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ (n^os 41—44).

Nous passerons ensuite, par induction complète, au cas général $n > 1$ des théorèmes III et IV (n^os 45—50) et nous terminerons le mémoire en montrant que la relation que nous avons établie dans les théorèmes I et II entre la fonction $h(\lambda)$, qui caractérise la croissance d'une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel et de carré intégrable, et la fonction d'appui $\chi(\lambda)$ d'un certain domaine convexe n-dimensionnel $\mathfrak{K}$ subsiste dans le cas où l'hypothèse que F est de carré intégrable est remplacée par celle, plus générale, que F est, pour un certain $p > 0$, de puissance p-ième intégrable.

Corollaires

21. Nous ajoutons quelques corollaires de nos théorèmes I et II à ceux déjà donnés dans la première partie. En voici un dont l'énoncé est particulièrement simple.

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *une fonction entière. S'il existe quatre constantes positives* a, A, c, C *telles que pour toutes les valeurs réelles* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$| F(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) | < A\, e^{-a(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)} \tag{48}$$

et pour toutes les valeurs complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$| F(z_1 , z_2 , \ldots , z_n) | < C\, e^{c(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|)} , \tag{49}$$

alors $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *est identiquement nulle.*

Autrement dit, la décroissance exponentielle dans le réel d'une fonction entière non identiquement nulle doit être compensée par une croissance plus forte qu'exponentielle dans le complexe.

Le théorème énoncé découle immédiatement du théorème I. En effet, si la fonction F satisfait à la condition (48), la fonction Φ, définie par (9), est analytique pour toutes les valeurs réelles de $y_1, y_2, \ldots, y_n$; elle est même analytique dans le domaine complexe où la partie imaginaire de chaque y_ν est inférieure à a. Si la fonction F satisfait à (48), elle est certainement de carré intégrable; F étant, d'après (49), aussi de type exponentiel, la fonction Φ est nulle en dehors d'un domaine borné, en vertu du théorème I. Etant analytique, Φ s'annule identiquement. Par conséquent, la formule (2) fait voir que F est aussi nulle.

22. Le théorème du n° précédent est bien connu si $n = 1$ et il peut alors être démontré par la théorie des fonctions analytiques, sans l'aide de l'intégrale de Fourier[23 bis]). Il est donc désirable d'en donner, lorsque $n>1$, une démonstration indépendante du théorème I, ceci d'autant plus que son énoncé ne contient explicitement aucune propriété d'intégrabilité. M. Behnke, à qui nous avions communiqué le théorème, a trouvé une démonstration très simple qui ramène le cas général au cas $n = 1$ par induction complète. Nous la reproduisons ici avec sa permission. Il sera d'ailleurs suffisant de décrire en détail le passage de $n = 1$ à $n = 2$.

[23 bis]) Voir par exemple loc. cit.[16]), Bd. I, Abschnitt III, Nr. 327, p. 148, 333. D'ailleurs on peut démontrer davantage, avec ou sans considération de l'intégrale de Fourier; voir *A. E. Ingham*, A note on Fourier transforms [Journal London Math. Soc., vol. 9 (1934), p. 29—32]; voir aussi *N. Levinson*, On a theorem of Ingham, même périodique, vol. 11 (1936), p. 6—7.

Soit x_2 un nombre réel, arbitraire, fixe. Considérons $F(z, x_2)$ comme fonction d'une variable, de la variable complexe z. D'après les hypothèses (48) et (49) (cas $n = 2$) nous avons

$$|F(x, x_2)| < A e^{-a|x|}, \quad |F(z, x_2)| < C e^{c|x_2|} \cdot e^{c|z|} ,$$

pour toute valeur réelle x et toute valeur complexe z. Donc, puisque nous admettons le cas $n = 1$ du théorème comme démontré, $F(z, x_2)$ s'annule identiquement, c'est-à-dire que $F(z_1, x_2)$ s'annule pour chaque valeur complexe z_1 et chaque valeur réelle x_2. On en conclut que la fonction $F(z_1, z)$, considérée comme fonction d'une variable, de la variable z, s'annule identiquement, quelle que soit la valeur complexe z_1, car c'est une fonction entière de z qui est nulle pour toutes les valeurs réelles de cette variable. En résumé, $F(z_1, z_2)$ est nulle, quels que soient les deux nombres complexes z_1 et z_2. C. q. f. d.

Observons que ce procédé de démonstration ressemble au procédé des n^{os} 9 et 10 de la première partie en ceci que dans la démonstration du cas $n > 1$ le cas $n = 1$ est utilisé «en bloc», de manière que nous arrivons bien à une démonstration du cas général à l'aide du cas particulier $n = 1$, mais que nous n'arrivons pas à une extension au cas général de la *méthode de démonstration* qui nous a servi dans le cas particulier. Ce procédé paraît bien adapté à notre sujet; nous en ferons usage plusieurs fois aux n^{os} 45—48.

23. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, les n coordonnées d'une direction (λ), sont des nombres entiers, $n - 1$ parmi elles sont égales à zéro et une est égale à 1 ou à -1; une telle direction sera appelée *direction cardinale.* Il y a donc dans l'espace à n dimensions $2\,n$ directions cardinales. (Ainsi, pour $n = 2$, le sens que nous donnons ici à l'adjectif «cardinal» ne s'éloigne pas trop de l'usage courant.)

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel. La fonction $h(\lambda)$, définie par (5), qui mesure la croissance de F, prend $2\,n$ valeurs pour les $2\,n$ directions cardinales. Soit c la plus grande de ces $2n$ valeurs; nous appellerons c la *croissance cardinale* de F. Si $n = 1$, la croissance cardinale c est simplement le plus grand des deux nombres h et h' considérés au n^{o} 5, et elle peut être aussi définie par la formule plus condensée

$$c = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log \left(|F(-ir)| + |F(ir)| \right) . \tag{50}$$

Définissons une notion voisine. Etant donné une fonction entière

$F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel, non identiquement nulle et un nombre réel a arbitraire, deux cas peuvent se présenter: le produit

$$|F(z_1, z_2, \ldots, z_n)|\, e^{-a(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|)}$$

reste ou ne reste pas borné quand chacune des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ prend, indépendamment des autres, toutes les valeurs complexes. Nous appellerons le nombre réel g, qui sépare les deux classes de valeurs a correspondant aux deux cas, la *croissance globale* de la fonction F. Naturellement, $g \geqq 0$. On voit facilement, en comparant les définitions que nous venons d'expliquer à la définition (5), que pour chacune des $2\,n$ directions cardinales, $h(\lambda) \leqq g$; donc, en résumé, *la croissance cardinale ne peut pas être supérieure à la croissance globale.* Les deux croissances peuvent être effectivement différentes pour des fonctions entières de type exponentiel qui ne sont liées par aucune condition supplémentaire. Par contre, *si une fonction entière, non nulle, de type exponentiel, $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est, pour un certain $p > 0$, de puissance p-ième intégrable, c'est-à-dire si*

$$\int\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

converge, sa croissance cardinale a la même valeur que sa croissance globale.

Cette proposition qui, dans le cas de p positif quelconque, sera démontrée au n° 51, peut dans le cas $p = 2$ se déduire comme suit: F peut être représentée, d'après le théorème I, par l'intégrale (2), et d'après le théorème II, la croissance cardinale de F est simplement la plus grande valeur que le module d'une quelconque des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ peut atteindre dans le domaine borné et fermé $\mathfrak{K}$. Ceci dit, le calcul que nous avons fait au début du n° 3 (la première formule de la page 227) démontre la proposition.

24. La notion de la croissance cardinale joue un rôle essentiel dans le théorème qui suit.

Si les fonctions entières $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sont de type exponentiel et de carré intégrable et si la croissance cardinale de chacune d'elles est inférieure ou égale à l, on a

$$\int\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F(x_1, x_2, \ldots, x_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \left(\frac{\pi}{l}\right)^n \sum\sum\cdots\sum_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\pi m_1}{l}, \frac{\pi m_2}{l}, \ldots, \frac{\pi m_n}{l}\right) G\left(\frac{\pi m_1}{l}, \frac{\pi m_2}{l}, \ldots, \frac{\pi m_n}{l}\right). \tag{51}$$

Si, pour les valeurs réelles des n variables $G = \overline{F}$ (le trait horizontal désignant comme d'habitude la valeur conjuguée complexe), on obtient comme cas particulier de (51):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |F(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n = \left(\frac{\pi}{l}\right)^n \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum \left|F\left(\frac{\pi m_1}{l}, \ldots, \frac{\pi m_n}{l}\right)\right|^2. \tag{52}$$

Dans le second membre la sommation est étendue à toutes les combinaisons des nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, donc à tous les sommets d'un réseau «cubique» à n dimensions, l'arête d'un cube étant $\frac{\pi}{l}$. Si l croît, le réseau se resserre. Si l est inférieur à la croissance cardinale c de F, l'égalité (52) peut être inexacte, mais elle est certainement juste si $l \geqq c$, et elle devient en quelque sorte évidente pour $l \to \infty$.

Pour démontrer (51), il suffit de démontrer le cas particulier (52). En effet, on passe de (52) à (51) par un raisonnement familier qui peut être concentré dans la formule

$$|a + \bar{b}|^2 - |a - \bar{b}|^2 + i|a + i\bar{b}|^2 - i|a - i\bar{b}|^2 = 4\,ab\,.$$

Pour démontrer (52), il faut remarquer que, d'après le théorème II de la première partie, la transformée de Fourier Φ de F, satisfaisant à (2), s'annule presque partout en dehors du domaine

$$-c \leqq y_1 \leqq c, \quad -c \leqq y_2 \leqq c, \ldots, \quad -c \leqq y_n \leqq c. \tag{53}$$

Développons Φ en série de Fourier multiple dans le domaine

$$-l \leqq y_1 \leqq l, \quad -l \leqq y_2 \leqq l, \ldots, \quad -l \leqq y_n \leqq l, \tag{54}$$

qui, par hypothèse, contient (53); nous obtenons par les formules classiques, en utilisant (2) et $c \leqq l$,

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n) \sim \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum \frac{1}{(2l)^n} F\left(\frac{\pi \nu_1}{l}, \ldots, \frac{\pi \nu_n}{l}\right) e^{-\frac{i\pi}{l}(\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n)}. \tag{55}$$

Ecrivons la «formule de Parseval» deux fois, d'abord pour la série de Fourier (55) puis pour l'intégrale de Fourier (9):

$$\int\int_{-l}^{+l}\cdots\int |\Phi|^2 dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = \frac{1}{(2l)^n} \sum\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum \left| F\left(\frac{\pi\nu_1}{l}, \frac{\pi\nu_2}{l}, \ldots, \frac{\pi\nu_n}{l}\right)\right|^2,$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |\Phi|^2 dy_1 dy_2 \ldots dy_n = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Les premiers membres sont égaux, puisque $c \leqq l$. On en déduit (52). En particulier, nous avons démontré (cas $l = \pi$) que, sous la condition (42), l'intégrale (43) et la série (44) ont la même valeur lorsque $p = 2$, ce que nous avons déjà énoncé au n° 20.

25. Le théorème qui suit n'est pas un simple corollaire de la proposition du n° précédent, mais il résulte de la combinaison de cette proposition avec certains théorèmes que nous démontrerons plus loin.

Soient l, p, p' des nombres positifs, les deux derniers étant liés par la condition

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Soient $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des fonctions entières de type exponentiel, la première de puissance p-ième intégrable, la seconde de puissance p'-ième intégrable. Soit c la croissance cardinale de F, c' celle de G et soit enfin

$$c \leqq l, \qquad c' \leqq l\,.$$

La formule (51) *est encore valable sous ces hypothèses.*

Les hypothèses relatives à c et à c' restant les mêmes, la formule (51) *est encore exacte lorsque $p = 1$ et $p' = \infty$, c'est-à-dire lorsque F est intégrable et G bornée dans l'espace réel à n dimensions.*

Remarquons d'abord que les deux membres de la formule (51) ont des valeurs finies (intégrale et série sont absolument convergentes) sous les hypothèses ci-dessus. Pour le premier membre c'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder; pour le second membre cela résulte de la première partie du théorème III (n° 47) et de l'inégalité analogue de Hölder pour les séries.

La démonstration étant la même quel que soit l'entier n nous ne la donnerons que dans le cas $n = 1$.

Supposons d'abord $1 < p \leqq 2$ et $c' < l$. Soit $\delta > 0$ et $c' + \delta < l$. D'après un théorème que nous démontrerons au n° 30 (pour $n > 1$ voir n° 46), $|F|^2$ est intégrable et $G(z)$ est une fonction bornée pour les valeurs réelles de z; donc $G(z)\dfrac{\sin \delta z}{\delta z}$ est de carré intégrable et sa croissance cardinale est inférieure ou égale à $c' + \delta$. Nous obtenons donc, en appliquant la formule (51) aux fonctions (de carré intégrable), $F(z)$ et $G(z)\dfrac{\sin \delta z}{\delta z}$ (à la place de $F(z)$ et de $G(z)$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, G(x)\, \frac{\sin \delta x}{\delta x}\, dx = \frac{\pi}{l} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\pi m}{l}\right) G\left(\frac{\pi m}{l}\right) \frac{\sin \dfrac{\delta \pi m}{l}}{\dfrac{\delta \pi m}{l}}\,.$$

Faisons tendre δ vers zéro. On voit aisément que le premier membre a la limite $\int\limits_{-\infty}^{\infty} FG dx$ et le second membre la limite $\frac{\pi}{l}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{m\pi}{l}\right)G\left(\frac{m\pi}{l}\right)$. La proposition est donc démontrée.

Si $1 < p \leqq 2$ et $c' = l$, on applique le résultat qui vient d'être démontré à la fonction $F(z)$ et à la fonction $G(z(1-\delta))$, $0 < \delta < 1$, qui, elle, a une croissance cardinale égale à $c'(1-\delta)$, donc inférieure à l. Il vient, par suite,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,G(x(1-\delta))\,dx = \frac{\pi}{l}\sum_m F\left(\frac{\pi m}{l}\right)G\left(\frac{\pi m\,(1-\delta)}{l}\right).$$

Le passage à la limite $\delta \to 0$ conduit encore à la formule (51). Il faut s'appuyer, pour le voir, sur la remarque que $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |G(\alpha m)|^{p'}$ converge *uniformément* en α dans l'intervalle $\alpha_0 \leqq \alpha < \infty$ si α_0 est un nombre positif; voir la fin du n° 31.

Le cas $p = 1$, $p' = \infty$ se traiterait d'une manière analogue avec des modifications insignifiantes dans les raisonnements.

26. a) En prenant $l = \pi$ dans la formule (52), nous obtenons immédiatement le cas $p = 2$ du théorème suivant:

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable ($p > 0$). Si sa croissance cardinale est inférieure ou égale à π et si

$$F(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0$$

pour toutes les combinaisons des nombres entiers $m_1, m_2, \ldots, m_n$, $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est identiquement nulle.

C'est un théorème très précis. Il comporte quatre hypothèses relatives au type, à l'intégrabilité, à la croissance cardinale et aux valeurs entières des variables. Si une seule est en défaut, même très peu, la conclusion tombe. Ainsi la fonction entière

$$\sin \pi z_1 \frac{\sin \pi z_2}{z_2} \cdots \frac{\sin \pi z_n}{z_n}$$

n'est pas identiquement nulle, bien qu'elle remplisse toutes les hypothèses sauf celle de l'intégrabilité. La fonction

$$\frac{\sin \pi z_1}{z_1}\,\frac{\sin \pi z_2}{z_2} \cdots \frac{\sin \pi z_n}{z_n}$$

montre que l'hypothèse relative au réseau des points à coordonnées entières ne peut pas être remplacée par l'hypothèse correspondante relative à une partie au réseau.

Le cas $n = 1$ découle d'une proposition connue[24]). Le cas $n \geqq 1$, $p > 0$ est un corollaire de la partie 1 du théorème du n° 46 et de la formule (132). Si $c < \pi$, la condition d'intégrabilité tombe ; voir (128).

b) Si l'on prend dans la formule (51)

$$G = \frac{\sin l z_1}{z_1} \frac{\sin l z_2}{z_2} \cdots \frac{\sin l z_n}{z_n}$$

et si l'on observe que la croissance cardinale de cette fonction est l, on obtient (en faisant appel, si $p \neq 2$, aux n^{os} 25 et 46) le théorème suivant.

Si l est supérieur ou égal à la croissance cardinale c de la fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable $(p > 0)$, on a

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\sin l x_1}{x_1} \frac{\sin l x_2}{x_2} \cdots \frac{\sin l x_n}{x_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \pi^n F(0,0,\ldots,0). \tag{56}$$

Cette formule ressemble en ceci à la formule (52) qu'elle peut être inexacte pour $l < c$, mais devient exacte pour $l \geqq c$ et en quelque sorte triviale pour $l \to \infty$, puisque l'on sait que, pour une classe assez étendue de fonctions F, le premier membre tend vers le second pour $l \to \infty$. La formule rend évidentes les valeurs de quelques intégrales définies connues, par exemple[25])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_\mu(x) \sin l x}{x^{\mu+1}} dx = \frac{\pi}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} \left(\mu > -\tfrac{1}{2},\ l \geqq 1\right), \tag{57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_m x \sin l x}{x^{m+1}} dx = \pi a_1 a_2 \ldots a_m \ . \tag{58}$$

$$(a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_m > 0,\ l \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$

---

[24]) Le théorème en question a été énoncé par un de nous à une séance de la Société math. suisse (voir L'Enseignement math., vol. 22 (1922), p. 299, n° 4) et retrouvé plus tard par *G. Valiron*, Sur la formule d'interpolation de Lagrange [Bulletin des sciences math. (2), vol. 49 (1925), p. 181—192 et p. 203—224]; voir son «théorème fondamental», p. 204.

[25]) Comparer *Watson*, loc. cit. [11]), p. 401, formule (2) et p. 403, formule (2). Voir pour (58) *G. Pólya*, Berechnung eines bestimmten Integrals (Math. Annalen, Bd. 74 (1913), p. 204—212). La signification géométrique du premier membre de (58), donnée loc. cit., montre qu'il est inférieur au second membre si $l < a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Le passage de l'intégrale à la série dans le cas $n = 1$

27. Le passage de la convergence de l'intégrale (43) à celle de la série (44) dont nous avons parlé au n° 20 dépend du théorème suivant :

Si p est un nombre positif, y un nombre réel et $F(z)$ une fonction entière de type exponentiel et de croissance cardinale c, on a l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx \leqq e^{pc|y|} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx . \tag{59}$$

Les deux intégrales sont étendues à toutes les valeurs réelles de x. En démontrant ce théorème nous allons supposer que l'intégrale dans le second membre de l'inégalité (59) converge; dans le cas contraire, l'inégalité n'affirme rien et nous n'avons rien à démontrer.

Avant d'aborder le cas général, observons que le cas $p = 2$, donc le cas où F est de carré intégrable, n'est qu'un corollaire facile des théorèmes I et II, ou, n étant égal à 1, du théorème de Paley et de Wiener (le raisonnement est le même pour $n = 1$ et pour $n > 1$). En vertu de ce théorème (n'oublions pas la définition de la croissance cardinale donnée au n° 23) on peut mettre $F(z)$ sous la forme

$$F(z) = \int_{-c}^{c} \Phi(t)\, e^{izt} dt .$$

Nous en tirons pour y réel et fixe

$$F(x+iy) = \int_{-c}^{c} \Phi(t) e^{-yt} e^{ixt} dt.$$

On a donc par la formule de Parseval

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx &= 2\pi \int_{-c}^{c} |\Phi(t)|^2 dt,\\
\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx &= 2\pi \int_{-c}^{c} |\Phi(t)|^2 e^{-2yt} dt\\
&\leqq e^{2|y|c} \cdot 2\pi \int_{-c}^{c} |\Phi(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

et la comparaison des deux dernières formules démontre (59) dans le cas $p = 2$.

28. Pour démontrer l'énoncé du n° précédent dans le cas général où p est un nombre positif quelconque, nous sommes obligés d'être plus longs

et de nous servir de plusieurs lemmes[26]). Les trois lemmes du présent n° ont certaines notations et hypothèses en commun; commençons par les énumérer:

x et y désigneront des nombres réels et $z = x + iy$. $G(z)$ désignera une fonction analytique, régulière dans le demi-plan supérieur fermé $y \geqq 0$, et qui ne se réduit pas à une constante. La fonction $\Psi(z)$ sera définie par

$$\Psi(z) = \int_{-a}^{a} |G(z+s)|^p ds \ ;$$

le chemin d'intégration est rectiligne, a et p sont des nombres positifs fixes. Observons que $\Psi(z)$ est définie et continue pour $y \geqq 0$.

Lemme 1. *Désignons par $\mathfrak{D}$ un domaine borné et fermé contenu dans le demi-plan $y \geqq 0$. Le maximum de $\Psi(z)$ dans $\mathfrak{D}$ n'est atteint qu'à la frontière de $\mathfrak{D}$.*

Nous utiliserons l'inégalité

$$|G(\zeta)|^p \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(\zeta + re^{i\varphi})|^p d\varphi \tag{60}$$

due à Hardy; la fonction $G(z)$ y est supposée régulière dans le cercle $|z - \zeta| \leqq r$; on sait que le cas d'égalité ne s'y présente que lorsque $G(z)$ est une constante[27]). Donc, $G(z)$ étant supposée non constante, si $r \leqq y$,

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \int_{-a}^{a} |G(z+s)|^p ds \\ < & \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(z+s+re^{i\varphi})|^p d\varphi \right) ds \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(z + re^{i\varphi}) d\varphi \ . \end{aligned} \tag{61}$$

---

[26]) Nous citons ici, à titre de renseignement, quelques travaux que nous n'avons pas à utiliser mais qui contiennent des théorèmes et des raisonnements voisins: *G. H. Hardy, A. E. Ingham and G. Pólya,* Theorems concerning mean values of analytic functions [Proceedings Royal Soc. A, vol. 113 (1927), p. 542—569]; *E. Hille and J.D. Tamarkin,* On the absolute integrability of Fourier transforms [Fundamenta math. vol. 25 (1935), p. 329—352]; *V. Ganapathy Iyer,* On the Lebesgue class of integral functions along straight lines issued from the origin [Quarterly Journal of Math. (Oxford series), vol. 7 (1936), p. 294—299]; *A. Offord,* The Fourier transforms III [Trans. Amer. Math. Soc., vol. 38 (1935), p. 250—266]; *Loo-Keng Hua and Shien-Sin-Shù,* On Fourier transforms in L^p in the complex domain [Journal of Math. and Phys., vol. 15 (1936), p. 321—347].

[27]) *G. H. Hardy,* The mean value of the modulus of an analytic function [Proceedings London Math. Soc., ser. 2, vol. 14 (1915), p. 269—277]. Voir aussi loc. cit.[16]), Abschnitt III, Nr. 308, 310, p. 144, 329—330.

Nous avons échangé l'ordre des intégrations pour passer de la deuxième à la troisième ligne. En vertu de (61), la valeur de Ψ au centre d'un cercle est plus petite qu'une certaine valeur sur la périphérie du cercle; de là découle aisément le lemme 1.

Lemme 2. *Désignons par M la borne supérieure de $\Psi(x)$ lorsque x parcourt toutes les valeurs réelles et par N celle de $\Psi(iy)$ lorsque y parcourt toutes les valeurs positives. Supposons que M et N soient finis et que $G(z)$ soit de type exponentiel dans le demi-plan $y \geqq 0$. Alors, dans ce même demi-plan, $\Psi(z)$ n'est nulle part supérieure au plus grand des deux nombres M et N.*

L'hypothèse que $G(z)$ est de type exponentiel dans le demi-plan $y \geqq 0$ implique l'existence de deux nombres positifs B et b tels que

$$|G(z)| < Be^{b|z|}, \quad \text{pour} \quad y \geqq 0. \tag{62}$$

Soit ε un nombre positif et

$$G_\varepsilon(z) = G(z)\, e^{-\varepsilon\left[(z+a)e^{-i\frac{\pi}{4}}\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{63}$$

$$\Psi_\varepsilon(z) = \int_{-a}^{a} |G_\varepsilon(z+s)|^p ds . \tag{64}$$

L'exposant de e figurant dans (63) a deux déterminations possibles dans le demi-plan $y > 0$; nous choisissons celle dont la partie réelle est négative dans le quart de plan où

$$x > -a, \quad y \geqq 0 . \tag{65}$$

On a dans (65), comme un calcul élémentaire partant de (62) et (63) le montre,

$$|G_\varepsilon(z)| < Be^{b|z|-\varepsilon\gamma|z+a|^{3/2}} \quad \left(\gamma = \cos\frac{3\pi}{8}\right) \tag{66}$$

$$|G_\varepsilon(z)| < |G(z)|$$

et par conséquent,

$$\Psi_\varepsilon(z) < \Psi(z), \quad \text{pour} \quad x \geqq 0,\ y \geqq 0,$$

donc, en particulier,

$$\Psi_\varepsilon(x) < M \ \text{pour}\ x \geqq 0,\ \ \Psi_\varepsilon(iy) < N \ \text{pour}\ y \geqq 0. \tag{67}$$

Soit z_0 un point fixe situé dans le quart de plan où $x > 0$, $y > 0$. Appliquons le lemme 1 à $\Psi_\varepsilon(z)$ à la place de $\Psi(z)$, en prenant pour $\mathfrak{D}$ le quart de cercle où $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $|z| \leqq R$. Nous supposons que R est pris assez grand pour que $\mathfrak{D}$ contienne z_0 et que le maximum de $\Psi_\varepsilon(z)$ dans $\mathfrak{D}$ ne soit pas atteint sur la partie curviligne de la frontière [nous pouvons le supposer en vertu de (66)]. Alors le maximum de $\Psi_\varepsilon(z)$ dans $\mathfrak{D}$ est atteint, en vertu du lemme 1, sur un des deux axes. Donc, à cause de (67) nous avons certainement

$$\Psi_\varepsilon(z_0) < \mathrm{Max}\,(M, N).$$

Ce raisonnement vaut pour chaque $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers zéro, nous voyons que le lemme 2 est démontré pour le quart de plan où $x \geqq 0$, $y \geqq 0$. La démonstration pour l'autre moitié du demi-plan $y \geqq 0$ est la même.

Lemme 3. *Ajoutons aux hypothèses du lemme 2 l'hypothèse que*

$$\lim_{y \to \infty} G(x + i\,y) = 0 \tag{68}$$

uniformément en x dans $-a \leqq x \leqq a$. Alors $N \leqq M$; donc, pour $y \geqq 0$,

$$\int_{-a}^{a} |G(z+s)|^p ds = \Psi(z) \leqq M. \tag{69}$$

Puisque $G(z)$ n'est pas identiquement nulle, $\Psi(z) > 0$. Mais $\Psi(i\,y) \to 0$ pour $y \to \infty$, en vertu de (68) et ainsi $\Psi(i\,y)$, fonction continue de y, doit atteindre sa borne supérieure N pour une valeur finie y_0 de y. Soit donc $\Psi(i\,y_0) = N$. Si $y_0 = 0$, alors

$$N = \Psi(i\,y_0) = \Psi(0) \leqq M.$$

Si $y_0 > 0$, alors, en vertu du lemme 1, $\Psi(z)$ ne peut atteindre sa borne supérieure dans le demi-plan $y > 0$ au point $i\,y_0$ intérieur à ce demi-plan. On a donc, d'après le lemme 2,

$$N = \Psi(i\,y_0) < \mathrm{Max}\,(M, N)$$

ce qui revient à dire que $N < M$.

29. Il suffira de démontrer le théorème énoncé au n° 27 en supposant que y est positif et que la fonction $F(z)$ n'est pas identiquement nulle.

Reprenons les notations h et h' du n° 5. La croissance cardinale c de $F(z)$ est égale au plus grand des deux nombres h et h'; donc,

$$h' \leqq c\,. \tag{70}$$

Soit δ un nombre positif donné. Nous appliquons les lemmes 2 et 3 à la fonction

$$G(z) = F(z)\, e^{i(c+\delta)z} . \tag{71}$$

$G(z)$ remplit, en effet, toutes les conditions exigées au début du n° 28 et dans les lemmes 2 et 3. $G(z)$ est régulière dans tout le plan et ne se réduit pas à une constante $\neq 0$ [sans cela l'intégrale (43) ne serait pas convergente]; elle est de type exponentiel dans tout le plan et le nombre M, défini au lemme 2, est fini:

$$M < \int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx . \tag{72}$$

En vertu de (71), (70), de la définition de h' [n° 5, (II)] et d'un théorème général sur l'indicateur des fonctions de type exponentiel[28]), la condition (68) du lemme 3 est remplie uniformément dans $-a \leqq x \leqq a$, quel que soit a et ainsi le nombre N défini au lemme 2 est fini.

Etant donné $y > 0$, appliquons la conclusion (69) du lemme 3 à $z = iy$; nous obtenons en tenant compte de (71), de (72) et de la réalité de c que

$$e^{-p(c+\delta)y} \int_{-a}^{a} |F(s+iy)|^p ds = \int_{-a}^{a} |G(iy+s)|^p ds$$
$$< \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx .$$

En faisant tendre d'abord a vers l'infini puis δ vers zéro, nous obtenons la proposition énoncée au n° 27.

30. Voici une première application du théorème du n° 27.

Si la fonction entière $F(z)$ de type exponentiel est de p-ième puissance intégrable (*c'est-à-dire si l'intégrale* (43) *converge pour un certain* $p > 0$), *$F(x)$ tend vers zéro avec x^{-1} pour x réel*; *$F(z)$ est donc aussi de q-ième puissance intégrable lorsque $q > p$.*

Les cas $p = 1$ et $p = 2$ de ce théorème ont été discutés dans la première partie (n^os 15—17). Le cas général fait usage du fait suivant.

Lemme 4. *Si $p > 0$, $\delta > 0$ et si la fonction analytique $F(z)$ est régulière dans le carré*

---

[28]) Voir loc. cit.[2]), p. 585, Satz IV; il faut encore tenir compte de la continuité de $h(\varphi)$, voir Satz II à la même page.

$$\xi - \delta \leqq x \leqq \xi + \delta, \qquad \eta - \delta \leqq y \leqq \eta + \delta$$

(nous posons $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$), *on a*

$$|F(\zeta)|^p \leqq \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(\zeta + s + it)|^p ds dt \,. \tag{73}$$

Cette inégalité est d'un type familier. On tire de l'inégalité (60) de Hardy que

$$|F(\zeta)|^p \int_0^\delta r dr \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\delta |F(\zeta + re^{i\varphi})|^p r dr d\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint_{s^2+t^2 \leqq \delta^2} |F(\zeta + s + it)|^p ds dt \,.$$

Nous obtenons (73) en remplaçant le domaine d'intégration circulaire de la dernière intégrale par un carré circonscrit (ce qui ne peut qu'augmenter la valeur de l'intégrale).

Le lemme 4 démontré, reprenons l'inégalité (59). Il en suit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} |F(x + iy)|^p dx dy \leqq 2 \frac{e^{pc\delta} - 1}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx \,. \tag{74}$$

Donc, l'intégrale double du premier membre est convergente et par conséquent, ξ étant réel,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(\xi + x + iy)|^p dx dy$$

tend vers zéro pour $\xi \to -\infty$ et pour $\xi \to +\infty$ L'inégalité (73) montre que $F(\xi)$ tend vers zéro en même temps. C. q. f. d.

Puisque $q > p > 0$, on a, lorsque le nombre réel ξ a un module suffisamment grand,

$$|F(\xi)|^q < |F(\xi)|^p$$

d'où l'on voit que la dernière affirmation énoncée est également vraie.

Le théorème démontré a plusieurs applications; il peut, par exemple, être combiné avec le résultat du n° 19 de la première partie. Un point de départ pour d'autres applications est la remarque suivante bien simple: *Si la fonction entière $F(z)$, de type exponentiel, est de p-ième puissance intégrable pour un certain $p > 0$, il existe un entier positif m tel que la fonction entière de type exponentiel $F(z)^m$ est de carré intégrable.* Il suffit, en effet, de prendre l'entier positif m tel que $q = 2m$ soit supérieur à p. Cette remarque permet souvent de ramener un théorème formulé pour un p positif quelconque à une valeur spéciale de p, par exemple, à $p = 1$ ou $p = 2$[29]).

[29]) Ainsi on ramène au cas $p = 2$ déjà discuté (voir n° 15 A et la fin du n° 17) la proposition suivante: *Si $F(z)$ est une fonction entière dont la croissance ne dépasse pas le type minimum de l'ordre 1 et si l'intégrale (43) existe pour un certain $p > 0$, $F(z)$ est identiquement nulle.* Cette proposition est due, pour $p \geqq 1$, à *V. Ganapathy Iyer*, voir loc. cit.[26]), Coroll. 2.

31. Nous pouvons tirer davantage du raisonnement du n° précédent.

Soit $F(z)$ une fonction entière, de type exponentiel, dont la p-ième puissance est intégrable (c'est-à-dire que (43) *existe pour un certain $p > 0$). Soit $x', x'', \ldots, x^{(\mu)}, \ldots$ une suite infinie de nombres réels tels que*

$$|x^{(\mu)} - x^{(\nu)}| \geqq d \tag{75}$$

lorsque $\mu \neq \nu$, d étant un nombre positif donné. Alors la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} | F(x^{(\mu)}) |^p$$

converge.

En effet, appliquons le lemme 4 à $\zeta = x^{(\mu)}$; nous obtenons pour $\delta = \frac{d}{2}$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} | F(x^{(\mu)}) |^p \leqq (\pi \delta^2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} | F(x+iy) |^p \, dx dy \ ,$$

puisque tous les carrés de côté $2\,\delta$ auxquels l'application de (73) nous conduit sont, en vertu de (75), extérieurs les uns aux autres et sont contenus dans la bande infinie qui constitue le domaine d'intégration dans le second membre.

La combinaison de cette inégalité avec (74) donne

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} | F(x^{(\mu)}) |^p \leqq \frac{8}{\pi d^2} \frac{e^{\frac{pcd}{2}} - 1}{pc} \int_{-\infty}^{\infty} | F(x) |^p dx \ . \tag{76}$$

Si la suite $x', x'', \ldots$ considérée est constituée par l'ensemble des nombres entiers $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ numérotés dans un certain ordre, on peut prendre $d = 1$ et il résulte de notre raisonnement qu'*une inégalité*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} | F(m) |^p \leqq A \int_{-\infty}^{\infty} | F(x) |^p dx \tag{77}$$

est valable pour toute fonction entière de type exponentiel, la constante A qui y figure ne dépendant que du nombre positif p et de la croissance cardinale c de F (mais ne dépendant pas d'autres propriétés de F). L'inégalité (76) donne comme une valeur admissible de la constante A la valeur

$$A = \frac{8}{\pi} \frac{e^{\frac{pc}{2}} - 1}{pc} \ .$$

Si nous supprimons dans le premier membre de l'inégalité (76) les termes correspondant à $|x^{(\mu)}|< M$ et dans le second membre la partie de l'intégrale correspondant au segment $\left(-M+\frac{d}{2}, M-\frac{d}{2}\right)$, l'inégalité ainsi modifiée subsiste. C'est ce qui légitime la remarque sur la convergence uniforme de $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |G(\alpha m)|^{p'}$ faite à la fin du n° 25.

32. Une petite modification du raisonnement employé aux deux n^{os} précédents nous conduit au théorème suivant.

Si la fonction entière $F(z)$ possède les propriétés d'être de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable (p donné, $p>0$), sa dérivée $F'(z)$ possède les mêmes propriétés.

Nous faisons appel au lemme suivant.

Lemme 5. *Avec les notations et les hypothèses du lemme* 4 *nous avons l'inégalité*

$$|F'(\zeta)|^p \leqq P \int\limits_{-\delta}^{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} |F(\zeta+s+it)|^p ds\,dt \tag{78}$$

où $P = 2^p(p+2)\pi^{-1}\delta^{-p-2}$ *ne dépend que de* p *et de* δ.

Pour démontrer le lemme, appliquons l'inégalité (60) de Hardy à la fonction

$$G(z) = \frac{F(\zeta+z)-F(\zeta)}{z}$$

dans un cercle de centre $z=0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} |F'(\zeta)|^p &\leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{F(\zeta+re^{i\varphi})-F(\zeta)}{re^{i\varphi}}\right|^p d\varphi \\ &\leqq \frac{2^p}{2\pi r^p}\int\limits_0^{2\pi} (|F(\zeta+re^{i\varphi})|^p + |F(\zeta)|^p)\,d\varphi \\ &\leqq \frac{2^p}{\pi r^p}\int\limits_0^{2\pi} |F(\zeta+re^{i\varphi})|^p d\varphi\ , \end{aligned}$$

la dernière ligne étant obtenue par une seconde application de (60). En multipliant par $r^{p+1}dr$, intégrant entre 0 et δ et passant, comme auparavant au n° 30, du cercle au carré circonscrit, on obtient (78). De (78) découle

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F'(\xi)|^p d\xi \leqq P \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(\xi + s + it)|^p ds dt \right) d\xi$$
$$= 2\,\delta P \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} |F(x+it)|^p dx dt\,.$$

Mais l'intégrale double dans le second membre est convergente d'après (74); en l'éliminant nous obtenons l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F'(x)|^p dx < A \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx$$

avec une constante A qui, après avoir fixé δ, ne dépend que de p et de c. Cette inégalité contient même un peu plus que ce que nous nous étions proposé de démontrer. Ajoutons deux remarques.

a) De l'inégalité que nous venons d'obtenir on peut déduire, en faisant tendre p vers l'infini, le théorème suivant: *Si $F(z)$ est une fonction entière de type exponentiel, de croissance cardinale c, qui satisfait pour toute valeur réelle x à l'inégalité*

$$|F(x)| \leqq M$$

sa dérivée satisfait à l'inégalité

$$|F'(x)| \leqq A\,c\,M$$

où A est une constante absolue. (La méthode est indiquée pour un cas analogue au n° 40). En resserrant un peu nos estimations (la constante du lemme 5 peut être abaissée par l'application de l'inégalité de Hölder si $p > 1$) nous pouvons obtenir la valeur $A = e$. On sait — c'est un résultat de S. Bernstein[30]) — que la valeur $A = 1$ est aussi admissible et que cette valeur est la meilleure, c'est-à-dire la plus petite valeur admissible.

b) Pour décrire la relation entre la croissance d'une fonction entière quelconque $F(z)$ de type exponentiel et celle de sa dérivée $F'(z)$, nous devons définir ce que nous entendons par «valeur exceptionnelle» de $F(z)$. Considérons la fonction $F(z) - w$ qui dépend du paramètre w et son diagramme indicateur qui, a priori, en dépend également. On peut faire voir[31]),

---

[30]) *S. Bernstein,* Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (Paris 1926), p. 77. Voir aussi loc. cit.[16]), Bd. II, Abschnitt IV, Nr. 201, p. 35 et p. 218—219.

[31]) Tout ce qui est affirmé peut être déduit très facilement du théorème III, p. 585, loc. cit.[2]) et on obtient, en plus, qu'une valeur exceptionnelle ne peut se présenter que de la manière suivante: $w_0 = 0$ est une valeur exceptionnelle si l'origine est extérieure au diagramme indicateur de $F(z)$ et $w_0 \neq 0$ est une valeur exceptionnelle si l'origine est un point extrême du diagramme indicateur de $F(z)$ et un pôle simple de résidu w_0 pour la transformée de Borel de $F(z)$.

qu'il n'y a que deux cas possibles: Ou bien le diagramme indicateur de $F(z) - w$ est toujours le même quelle que soit la valeur w, ou bien il existe une valeur w_0 telle que le diagramme de $F(z) - w_0$ est plus petit que celui de $F(z) - w$ pour $w \neq w_0$, tandis que toutes les fonctions $F(z) - w$, $(w \neq w_0)$, ont le même diagramme indicateur. Une telle valeur w_0 est appelée *valeur exceptionnelle* de $F(z)$. On peut démontrer que $F'(z)$ *a le même diagramme indicateur que* $F(z)$, *si* $F(z)$ *ne possède pas de valeur exceptionnelle et que* $F'(z)$ *a le même diagramme indicateur que* $F(z) - w_0$, *si* w_0 *est la valeur exceptionnelle de* $F(z)$. Puis on peut démontrer que *si* $F(z)$ *est de* p*-ième puissance intégrable pour un certain* p, $p > 0$, $F(z)$ *ne peut pas avoir de valeur exceptionnelle différente de zéro*; donc $F(z)$ *a le même diagramme indicateur que* $F'(z)$. Sur cette dernière proposition voir n° 53.

Le passage de la série à l'intégrale dans le cas $n = 1$

33. Il s'agit de montrer que la convergence de la série (44) entraîne la convergence de l'intégrale (43) si la croissance de la fonction entière $F(z)$ est assujettie à certaines hypothèses qui dépendent d'ailleurs de p, étant plus restrictives lorsque $0 < p \leqq 1$ que lorsque $p > 1$. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Soit $F(z)$ *une fonction entière de type exponentiel.*

1. *Si* $p > 0$ *et si*

$$c = \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log \left(|F(-ir)| + |F(ir)| \right) < \pi, \tag{79}$$

il existe une constante B, *qui ne dépend que de* p *et de* c, *telle que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx < B \sum_m |F(m)|^p . \tag{80}$$

Lorsque $p > 1$, *on peut prendre* $B = C^p$, *où* C *est une constante ne dépendant que de* c.

2. *Si* $p > 1$ *et si*
$$\lim_{z \to \infty} F(z) e^{-\pi |z|} = 0, \tag{81}$$

l'inégalité (80) *reste valable avec une constante* B *qui ne dépend que de* p.

Expliquons d'abord quelques abréviations que nous avons utilisées (et que nous utiliserons dans ce qui suit). La sommation $\sum\limits_m$ est étendue à toutes les valeurs entières de m; la série dans le second membre de (80) désigne donc (44). Nous utiliserons plus tard le signe $\sum\limits_m{}'$ où la somme est étendue à toutes les valeurs entières de m, excepté $m = 0$. La limite (81) est uniforme par rapport à arc z; c'est à dire que, étant donné ε positif arbitraire, on a en chaque point z extérieur à un certain cercle de centre zéro

$$|F(z)| < \varepsilon\, e^{\pi |z|}.$$

On observera que l'inégalité (80) affirmée par le théorème énoncé est d'une autre nature que l'inégalité (77) démontrée au n° 31, en tant que (80) suppose et que (77) ne suppose pas des conditions additionnelles [(79), respectivement (81)] concernant la croissance de la fonction entière $F(z)$ de type exponentiel. Ce sont ces conditions que nous allons examiner tout d'abord.

34. Les restrictions imposées à la croissance de $F(z)$ sont essentielles et très précises. Si l'on remplaçait la condition (79) par $c \leqq \pi$, le théorème serait faux comme le montrerait l'exemple simple $F(z) = \sin \pi z$. Le même exemple montre qu'il ne suffit pas de supposer à la place de (81) que l'expression sous le signe lim soit bornée. L'exemple $F(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z}$ fait voir que la condition (81) est insuffisante lorsque $0 < p \leqq 1$.

Les conditions (79) et (81), prises en elles-mêmes, sont indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire que chacune peut être remplie sans que l'autre le soit. Par contre, *jointe à l'hypothèse additionnelle que la série* (44) *converge, la condition* (79) *implique la condition* (81).

On sait[32]) que sous la condition (79) on peut affirmer l'égalité

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |F(r)| = \overline{\lim_{m \to +\infty}}\, m^{-1} \log |F(m)| \tag{82}$$

où r parcourt toutes les valeurs positives et m seulement les valeurs entières 1, 2, 3, ... Mais le second membre de (82) est $\leqq 0$, si la série (44) converge; on obtient donc, en raisonnant sur $F(-z)$ comme sur $F(z)$,

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |F(r)| \leqq 0, \qquad \overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \log |F(-r)| \leqq 0. \tag{83}$$

Mais (79) et (83) assurent que le diagramme indicateur de F «s'aplatit», c'est-à-dire se réduit à un segment de l'axe imaginaire contenu entre les points $-ic$ et ic. Donc, on a[33]), si $\varepsilon > 0$, pour chaque $z = re^{i\varphi}$ en dehors d'un certain cercle,

---

[32]) Voir loc. cit. [2]), p. 606, formule (70).

[33]) Voir loc. cit. [2]), p. 585, Satz II.

$$| F(re^{i\varphi}) | < e^{(c|\sin\varphi|+\varepsilon)r}, \tag{84}$$

inégalité qui entraîne certainement (81) puisque, d'après (79), $c < \pi$ [34]).

35. Le théorème du n° 33 est un théorème d'interpolation; d'une propriété de la fonction $F(z)$ où n'interviennent que les valeurs entières de z il conclut une autre où toutes les valeurs réelles de z interviennent. Nous nous servirons d'une formule d'interpolation dont un cas particulier (le cas $q = 0$) est connu depuis longtemps et dont la convergence a été discutée par Valiron, à qui on doit le résultat suivant[35]):

Lemme 6. *Soit q un nombre entier non négatif et $F(z)$ une fonction entière. Supposons que*

$$\lim_{z \to \infty} F(z) e^{-\pi|z|} |z|^{-q} = 0 \tag{85}$$

et que

$$\sum_m{}' \left| \frac{F(m)}{m^{q+1}} \right| \tag{86}$$

converge. Alors on a

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[\frac{P_q(z)}{z} + \sum_m{}' \frac{(-1)^m F(m)}{z - m} \left(\frac{z}{m}\right)^q \right], \tag{87}$$

où $P_q(z)$ désigne le polynome de degré non supérieur à q, somme des $q+1$ premiers termes de la série de Maclaurin

$$F(z) \frac{\pi z}{\sin \pi z} = F(0) + F'(0) z + \left(\frac{F''(0)}{2!} + \frac{\pi^2 F(0)}{3!}\right) z^2 + \cdots . \tag{88}$$

Nous nous sommes servis de la notation usuelle $\sum_m{}'$ qui a été expliquée au n° 33. La limite (85) est prise dans le même sens que (81). Notons les cas particuliers les plus simples $q = 0$ et $q = 1$ de la formule (87)

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_m \frac{(-1)^m F(m)}{z - m}, \tag{89}$$

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[F'(0) + \frac{F(0)}{z} + \sum_m{}' \frac{(-1)^m z F(m)}{m(z - m)} \right]. \tag{90}$$

---

[34]) Ce raisonnement justifie l'énoncé que nous avons donné au début (n° 20) au théorème de Mlle Cartwright; nous y avons fait intervenir la condition (42) à la place de la condition plus restrictive (2.1) du travail de Mlle Cartwright, loc. cit. [23]).

[35]) Voir *G. Valiron*, loc. cit. [24]).

36. Dans tout ce qui suit, m désignera toujours un nombre entier et f_m le maximum de $|F(x)|$ dans l'intervalle

$$m - \tfrac{1}{2} \leqq x \leqq m + \tfrac{1}{2} . \tag{91}$$

D'après ces définitions

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} | F(x) |^p \, dx \leqq f_m^p . \tag{92}$$

Nous utiliserons la formule d'interpolation (87) pour évaluer f_m en faisant dépendre d'une manière appropriée la valeur de q de la valeur de p.

Considérons d'abord le cas le plus facile $p = 1$. Dans ce cas nous avons à utiliser l'hypothèse (79) qui entraîne (84) (comme nous l'avons démontré), donc (85) pour $q \geqq 0$ puisque $c < \pi$. La convergence de (44) pour $p = 1$ entraîne celle de (86) pour $q \geqq 0$. La formule (87) est donc applicable à $F(z)$ pour $q \geqq 0$. Soit

$$\delta = \frac{\pi - c}{2} .$$

La fonction

$$F(m + z) \sin \delta z \tag{93}$$

est entière, de type exponentiel, satisfait à l'hypothèse (79) (avec $\frac{1}{2}(c + \pi)$ à la place de c)[36]) et prend pour $z = n$ une valeur non supérieure en module à $F(m + n)$. Donc la formule d'interpolation (87) est applicable à (93) dans la même mesure qu'à $F(z)$. Prenant $q = 1$ et utilisant (90) nous obtenons

$$F(m + z) = \frac{\sin \pi z}{\pi \sin \delta z} \left[\delta F(m) + \sum_n{}' \frac{(-1)^n z F(m + n) \sin \delta n}{n(z - n)} \right] . \tag{94}$$

La fonction $F(m + z)$ est régulière dans le carré Q de sommets

$$\frac{1 + i}{2} , \quad \frac{-1 + i}{2} , \quad \frac{-1 - i}{2} , \quad \frac{1 - i}{2} . \tag{95}$$

f_m étant une valeur prise par $|F(m + z)|$ dans le carré Q n'est pas supérieure au maximum de $|F(m + z)|$ sur la frontière de Q où

$$\left| \frac{\sin \pi z}{\pi \sin \delta z} \right| \leqq K ;$$

[36]) $F(z)$ et $F(m + z)$ ont le même diagramme indicateur; voir loc. cit. [2]), p. 591.

le nombre positif K ne dépend que de δ, donc de c. Nous obtenons en évaluant le second membre de (94) sur la frontière de Q

$$f_m \leqq K\delta \mid F(m) \mid + \sum_n{}' \frac{K}{|n| \, (|n| - \frac{1}{2})} \mid F(m+n) \mid . \tag{96}$$

Jusqu'ici nous avons suivi, presque mot par mot, un raisonnement de Pfluger[37]). Ecrivons maintenant

$$K\delta = b_0 \ , \qquad \frac{K}{|n| \, (|n| - \frac{1}{2})} = b_n \qquad \text{si} \ \ n \neq 0 \ ;$$

observons que $b_n > 0$ et que

$$\sum_n b_n = B \tag{97}$$

est une valeur finie. Avec ces notations (96) s'écrit

$$f_m \leqq \sum_n b_n \, | F(m+n) | = \sum_\nu b_{\nu-m} \, | F(\nu) | \, .$$

Par suite, en utilisant (97),

$$\sum_m f_m \leqq \sum_\nu \mid F(\nu) \mid \sum_m b_{\nu-m} = B \sum_\nu \mid F(\nu) \mid ;$$

donc, en utilisant (92) avec $p = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid F(x) \mid dx \leqq B \sum_\nu \mid F(\nu) \mid \ .$$

C. q. f. d.

37. Pour traiter le cas $0 < p < 1$ nous avons de nouveau à utiliser l'hypothèse (79) et la convergence de (44) pour un certain $p < 1$. Il s'en suit comme au n° 36 que la formule d'interpolation (87) est applicable pour $q \geqq 0$.

Choisissons un entier positif q tel que

$$\frac{1}{q+1} < p \tag{98}$$

puis un nombre positif δ tel que

$$c + (q+1)\,\delta < \pi. \tag{99}$$

La formule d'interpolation (87) est applicable, avec la valeur q choisie, à la fonction

$$F(m+z) \ (\sin \delta z)^{q+1}, \tag{100}$$

[37]) Voir *A. Pfluger*, loc. cit. [23]), p. 312—313.

où m désigne comme auparavant un entier arbitraire. En effet, à cause de l'inégalité (99), la fonction (100) satisfait essentiellement aux mêmes hypothèses que $F(z)$. En observant que les $q+1$ premiers coefficients de la série (88) sont des expressions linéaires et homogènes en $F(0), F'(0), \ldots, F^{(q)}(0)$ et que les $q+1$ premiers coefficients de la série de Maclaurin de (100) s'annulent, on obtient en appliquant (87) à la fonction (100) à la place de $F(z)$

$$F(m+z) = \frac{\sin \pi z}{\pi (\sin \delta z)^{q+1}} \sum_n{}' \frac{z^q (-1)^n F(m+n) (\sin \delta n)^{q+1}}{n^q (z-n)} . \tag{101}$$

En évaluant le second membre sur la frontière du carré Q ayant les sommets (95), on obtient

$$f_m \leqq K \sum_n{}' \frac{|F(m+n)|}{|n|^q (|n| - \frac{1}{2})} , \tag{102}$$

où K ne dépend que de q et de δ et par conséquent de p et de c, puisque q et δ ont été choisis selon (98) et (99). Posons maintenant

$$b_0 = 0 \ , \ b_n = \frac{K}{|n|^q (|n| - \frac{1}{2})} \ \text{si} \ n \neq 0 \ ;$$

observons que $b_n \geqq 0$ et que, en vertu de (98),

$$\sum_n b_n^p = B \tag{103}$$

est une valeur finie. (102) devient avec ces notations

$$f_m \leqq \sum_n b_n |F(m+n)| = \sum_\nu b_{\nu-m} |F(\nu)| .$$

Comme $0 < p < 1$, nous en concluons en utilisant l'inégalité de Jensen[38]) que

$$f_m^p \leqq \sum_\nu b_{\nu-m}^p |F(\nu)|^p ;$$

donc,

$$\sum_m f_m^p \leqq \sum_\nu |F(\nu)|^p \sum_m b_{\nu-m}^p = B \sum_\nu |F(\nu)|^p . \tag{104}$$

De (104) et de (92) résulte l'inégalité (80).

---

[38]) Voir par exemple *G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya,* Inequalities (Cambridge 1935), p. 28, théorème 19.

38. Nous arrivons au cas $p > 1$. Nous devons démontrer l'inégalité (80) sous deux hypothèses différentes. Nous considérerons d'abord l'hypothèse plus restrictive (79) à laquelle nous devons faire correspondre la forme plus précise $B = C^p$. Nous nous appuyerons sur le fait suivant:

Lemme 7. *Si*

$$p > 1,$$
$$\sum_n |x_n|^p \text{ converge,}$$
$$b_\mu > 0,\ B = \sum_\mu b_\mu \text{ converge,}$$
$$|v_m| \leqq \sum_n b_{m-n}|x_n|,$$

on a l'inégalité

$$\sum_m |v_m|^p \leqq B^p \sum_n |x_n|^p . \tag{105}$$

Ce lemme n'est qu'une combinaison facile de résultats connus[39]), mais sa démonstration étant courte, nous la donnerons ici, en admettant, ce qui ne restreint pas la généralité, que $x_n \geqq 0$.

Désignons par p' le nombre positif déterminé par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

et par $\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$ une suite de nombres réels non négatifs assujettis à la seule condition que

$$\sum_m y_m^{p'}$$

converge. On a alors, d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\sum_m |v_m| y_m &\leqq \sum_m \sum_n b_{m-n} x_n y_m = \sum_m \sum_n b_{m-n}^{\frac{1}{p}} x_n \cdot b_{m-n}^{\frac{1}{p'}} y_m \\ &\leqq \Big(\sum_n x_n^p \sum_m b_{m-n}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_m y_m^{p'} \sum_n b_{m-n}\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &= B\Big(\sum_n x_n^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_m y_m^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} .\end{aligned} \tag{106}$$

Choisissons y_m de la manière suivante:

$$y_m = 0 \quad \text{pour} \quad m < -M \quad \text{et pour} \quad m > M,$$
$$y_m = |v_m|^{p-1}, \text{ donc } y_m^{p'} = |v_m|^p \text{ pour } -M \leqq m \leqq M .$$

[39]) Il résulte de la combinaison des théorèmes 275, p. 198 et 286, p. 205 loc. cit. [38]).

Il vient de (106)

$$\sum_{-M}^{M} |v_m|^p \leqq B(\sum_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{-M}^{M} |v_m|^p)^{1-\frac{1}{p}} .$$

Il suffit de diviser cette inégalité par le dernier facteur du second membre et de faire tendre M vers l'infini pour obtenir l'inégalité désirée (105).

Le lemme 7 démontré, reprenons les raisonnements du n° 36 et suivons les presque sans changement (la convergence de (86) est à démontrer par l'inégalité de Hölder) jusqu'à la définition des nombres b_n et du nombre B, donc jusqu'à la formule (97) inclusivement. Posons encore

$$f_m = v_m, \quad F(m) = x_m .$$

Avec ces notations, l'inégalité (96) devient la dernière hypothèse du lemme 7 et la conclusion (105) de ce lemme donne

$$\sum_m |f_m|^p < B^p \sum_n |F(n)|^p$$

Mais c'est bien le résultat désiré, comme on le voit en se servant de (92) et en se rappelant que B qui est, d'après (97), la somme des nombres b_n ne dépend que de c.

39. Il reste encore à étudier le même cas $p > 1$ qu'au n° précédent, mais sous l'hypothèse (81) au lieu de (79). Ce changement d'hypothèse nous oblige à nous servir non seulement du lemme 7 mais aussi du résultat suivant beaucoup plus caché dû à M. Riesz et à Titchmarsh[40]).

Lemme 8. *Si*

$$p > 1,$$

$$\sum_n |x_n|^p \ \textit{converge},$$

$$u_m = \sum_n \frac{x_n}{m - n + \frac{1}{2}} ,$$

il existe une constante positive P ne dépendant que de p, telle que

$$\sum_m |u_m|^p < P \sum_n |x_n|^p . \tag{107}$$

[40]) *E. C. Titchmarsh*, Reciprocal formulae involving series and integrals [Math. Zeitschrift, Bd. 25 (1926), p. 321—347]; An inequality in the theory of series [Journal London Math. Soc., vol. 3 (1928), p. 81—83]. *M. Riesz*, Sur les fonctions conjuguées [Math. Zeitschrift, Bd. 27 (1927), p. 218—244]; Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires [Acta Math., vol. 49 (1927), p. 465—497].

L'hypothèse (81) n'est autre chose que le cas $q = 0$ de (85) et nous nous servirons du cas $q = 0$ de la formule d'interpolation (87), donc de la formule (89)[41].

Le maximum de $|F(x)|$ dans l'intervalle (91) est atteint pour une certaine valeur $x = m + \xi$, où

$$-\tfrac{1}{2} \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}\,.$$

Nous avons donc, d'après (89),

$$f_m = |F(m+\xi)| = \left| \frac{\sin \pi (m+\xi)}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n F(n)}{m+\xi-n} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^m \sin \pi \xi}{\pi} \sum_n \frac{(-1)^n F(n)}{m-n+\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^m \sin \pi \xi}{\pi} \sum_n \frac{(\frac{1}{2}-\xi)\,(-1)^n F(n)}{(m-n+\frac{1}{2})\,(m-n+\xi)} \right|$$

ou encore

$$f_m \leqq |u_m| + |v_m|\,, \tag{108}$$

en posant

$$u_m = \sum_n \frac{(-1)^n F(n)}{m-n+\frac{1}{2}}\,, \tag{109}$$

$$v_m = \frac{(1-2\xi)\sin \pi \xi}{2\pi} \sum_n \frac{(-1)^n F(n)}{(m-n+\frac{1}{2})\,(m-n+\xi)}\,. \tag{110}$$

Il s'en suit

$$|v_m| \leqq 2 \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| |F(m)| + \sum_{n \neq m} \frac{|F(n)|}{(|m-n|-\frac{1}{2})^2}$$

ou

$$|v_m| \leqq \sum_n b_{m-n} |F(n)| \tag{111}$$

en notant

$$b_0 = 2\,, \quad b_\mu = \frac{1}{(|\mu|^2 - \frac{1}{2})^2} \text{ pour } \mu = \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

En notant encore

$$(-1)^n F(n) = x_n \tag{112}$$

nous voyons que toutes les hypothèses des lemmes 7 et 8 sont remplies. Nous concluons donc de (108), (105), (107), (112) que

$$\sum_m f_m^p \leqq \sum_m 2^p (|u_m|^p + |v_m|^p) \leqq 2^p (P + B^p) \sum_n |F(n)|^p\,,$$

d'où, en vertu de (92), l'inégalité désirée (80).

---

[41]) La condition (79) permet, la condition (81) ne permet pas d'introduire un facteur à la manière des formules (93) et (100). Ne pouvant pas introduire un tel facteur, nous ne pouvons éliminer l'influence des dérivées de $F(z)$ qu'en choisissant le cas $q = 0$.

40. Montrons encore que le théorème de Mlle Cartwright énoncé au n° 20 est un cas limite du théorème énoncé au n° 33 dont nous venons d'achever la démonstration.

Soit $F(z)$ une fonction entière de type exponentiel et de croissance cardinale c dont le module pour les valeurs entières de z ne dépasse pas M. Choisissons δ de manière que

$$c < c + \delta < \pi$$

et soit C' la constante qui correspond à $c + \delta$ comme C à c, au sens du théorème du n° 33 (voir dans sa première partie la remarque concernant le cas $p > 1$). Appliquons ce théorème à

$$F(z) \frac{\sin \delta (z - x_0)}{\delta (z - x_0)} \,, \ c + \delta \,, \ C'$$

à la place de

$$F(z) \,, \quad c \,, \quad C$$

x_0 étant un nombre réel arbitraire mais fixe. L'inégalité (80) devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(x) \frac{\sin \delta (x - x_0)}{\delta (x - x_0)} \right|^p dx < C'^p \sum_m \left| F(m) \frac{\sin \delta (m - x_0)}{\delta (m - x_0)} \right|^p \ .$$

On en tire, en considérant l'intégrale entre $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$ et en utilisant l'hypothèse $|F(m)| \leqq M$

$$2\varepsilon (\, | \, F(x_0) \, | - \varepsilon')^p (1 - \varepsilon')^p < C'^p M^p \sum_m \left(\frac{\sin \delta (m - x_0)}{\delta (m - x_0)} \right)^2 \ ;$$

$p > 2$, ε positif, ε' positif et infiniment petit avec ε. Extrayant la p-ième racine et faisant tendre d'abord p vers l'infini puis ε vers zéro, on obtient

$$| \, F(x_0) \, | \leqq C' M \, .$$

C'est le résultat de Mlle Cartwright et nous voyons qu'il est en effet un cas limite de notre théorème. (La démonstration que nous venons d'en donner ne donne effectivement rien de nouveau pour le théorème *considéré en soi-même* si on l'analyse attentivement; elle n'est qu'un détour en comparaison de la démonstration de Pfluger dont elle utilise les raisonnements au n° 38, en les empruntant au n° 36).

Théorèmes sur les coefficients de la série de Fourier

41. Maintenant que nous savons comment passer de l'intégrale (43) à la série (44) et de la série à l'intégrale, il nous est facile de démontrer, en réunissant les deux lignes de raisonnements, le théorème suivant.

Pour qu'une fonction entière $F(z)$ soit de type exponentiel et possède les deux propriétés suivantes :

(I) *La croissance cardinale de $F(z)$ ne surpasse pas π,*

(II) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx$ *existe, pour un certain $p > 1$,*

il faut et il suffit qu'il existe une suite infinie de nombres

$$\ldots, a_{-m}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$$

ayant la propriété que

$$\sum_m |a_m|^p \tag{113}$$

converge et que $F(z)$ puisse être représentée par la formule

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_m \frac{a_m}{z - m} \; . \tag{114}$$

a) Il faut passer de la fonction $F(z)$ à la suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$. Admettons donc que $F(z)$ est entière, de type exponentiel et qu'elle possède les propriétés (I) et (II).

Nous ferons usage de l'artifice simple expliqué à la fin du n° 30. Soit donc m un entier et $2\,m > p$. La fonction $F(z)^m$ est, en vertu de (II), de carré intégrable et, en vertu de (I), de croissance cardinale $\leqq m\pi$. Nous avons donc, d'après le théorème de Paley et de Wiener dont nous nous sommes occupés dans la première partie

$$F(z)^m = \int\limits_{-m\pi}^{m\pi} \Phi_m(y)\, e^{izy}\, dy \; ,$$

$\Phi_m(y)$ étant de carré intégrable. L'inégalité de Schwarz donne

$$\begin{aligned} |F(re^{i\varphi})|^{2m} &\leqq \int\limits_{-m\pi}^{m\pi} |\Phi_m(y)|^2 dy \int\limits_{-m\pi}^{m\pi} e^{-2yr\sin\varphi} dy \\ &= C^{2m}\, \frac{e^{2m\pi r \sin\varphi} - e^{-2m\pi r\sin\varphi}}{2r\sin\varphi} \, , \end{aligned}$$

C étant une constante positive indépendante de $z = re^{i\varphi}$. Nous en tirons

$$| F(re^{i\varphi}) | e^{-\pi r} \leqq C e^{-\pi r(1-\sin\varphi)} \left[\frac{1 - e^{-4m\pi r \sin\varphi}}{2r\sin\varphi} \right]^{\frac{1}{2m}} . \qquad (115)$$

Le premier facteur du second membre de (115) tend uniformément vers zéro et le second facteur est borné dans $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$; le second facteur tend uniformément vers zéro et le premier est borné dans $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Les trois autres quadrants se ramènent au quadrant $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ par symétrie. Nous obtenons ainsi

$$\lim_{r \to \infty} F(re^{i\varphi}) e^{-\pi r} = 0$$

uniformément en φ, c'est-à-dire que $F(z)$ satisfait à la condition (81).

Puis, nous concluons, même sans faire intervenir (I), que la série

$$\sum_m | F(m) |^p$$

converge (voir n° 31). L'inégalité de Hölder montre ensuite la convergence de la série $\sum_m' \left| \frac{F(m)}{m} \right|$. En résumé, nous avons vérifié les hypothèses du lemme 6 pour $q = 0$. Donc, $F(z)$ peut être représentée par la formule (89). Si nous posons

$$a_m = (-1)^m F(m)$$

dans la formule (89) nous obtenons la relation (114) qui était à démontrer et nous voyons que la série (113) converge.

b) Il faut passer de la suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ à la fonction $F(z)$. Admettons donc que (113) converge. On en tire, en s'appuyant sur l'inégalité de Hölder, que la fonction $F(z)$ définie par (114) est entière, de type exponentiel et qu'elle satisfait, vu l'inégalité découlant de (114)

$$| F(\pm ir) | < e^{\pi r} \sum_m \frac{| a_m |}{\sqrt{m^2 + r^2}} ,$$

à la condition (I) de l'énoncé. Le point principal, à savoir que la fonction $F(z)$ définie par (114) satisfait à la condition (II), a déjà été démontré avec des notations un peu différentes au n° 39.

42. Le théorème démontré au n° précédent va nous permettre de *construire pour tout $p > 2$ des fonctions entières $F(z)$ de type exponentiel et de puissance p-ième intégrable qui ne possèdent pas de transformée de Fourier*[42]). Précisons d'abord ce que nous entendons ici par transformée de Fourier. Nous disons qu'une fonction mesurable $F(x)$ possède une transformée de Fourier lorsque

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)\int_0^y e^{-i\xi x}d\xi\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\frac{e^{-ixy}-1}{-ix}\,dx \qquad (116)$$

est une fonction absolument continue de y dans $-\infty < y < \infty$ et nous appelons transformée de Fourier de $F(x)$ une fonction équivalente à la dérivée de cette fonction absolument continue[43]).

Faisons d'abord une remarque. Si les constantes a_m sont telles que $\sum_m |a^m|^p$ converge, $p > 1$, le théorème du n° 41 dit que la série

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\sum_m \frac{a_m}{z-m}$$

est une fonction entière de type exponentiel de puissance p-ième intégrable et on a une inégalité (voir le théorème du n° 33 et la démonstration du n° 39)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^p dx < B\sum |a_m|^p .$$

Par suite, si on pose

$$F_k(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}\sum_{m=-k}^{k}\frac{a_m}{z-m}$$

on a encore

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)-F_k(x)|^p dx < B\sum_{|m|>k}|a_m|^p .$$

---

[42]) *A. Zygmund* a donné un exemple d'une fonction $F(x)$ (non analytique), de puissance p-ième intégrable ($p > 2$) pour laquelle la fonction (116) ne possède pas de dérivée presque partout (voir: Trigonometrical series, Warszawa-Lwow, 1935, p. 319, n° 3). *E. C. Titchmarsh* avait donné auparavant (voir loc. cit. [15]), p. 286) l'exemple d'une fonction entière de type exponentiel et de puissance p-ième intégrable ($p > 2$) pour laquelle (116) possède partout, sauf au point $y = 0$, une dérivée $\Phi(y)$ continue et qui cependant n'est pas absolument continue parce que $\int_{-1}^{1}|\Phi(y)|dy$ n'existe pas. Dans le cas, qui seul nous intéresse ici, où $F(z)$ est une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable, la fonction (116) possède toujours une dérivée nulle en dehors de l'intervalle $(-h', h)$ — voir théorème IIb du n° 52. Notre exemple montre donc qu'il existe des fonctions entières de type exponentiel pour lesquelles (116) n'a pas de dérivée presque partout dans $(-h', h)$.

[43]) Voir au sujet de cette définition de la transformée de Fourier la discussion donnée par Hille et Tamarkin dans la note: *E. Hille, A. C. Offord and J. D. Tamarkin,* Some observations on the theory of Fourier transforms [Bulletin of the Amer. Math. Soc. (1935), p. 427—436].

La suite des fonctions $F_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ converge donc en moyenne d'ordre p vers $F(x)$.

Soit maintenant $p > 2$. Prenons une suite de constantes A_m, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ telle que

$$\sum |A_m|^p \quad \text{converge et} \quad \sum_m |A_m|^2 \text{ diverge}$$

et posons

$$a_m = 0, \text{ si } m \neq \pm 2, \pm 2^2, \pm 2^3, \ldots, \pm 2^r, \ldots$$

$$a_{-2^r} = a_{2^r} = A_r, \; r = 1, 2, 3, \ldots$$

La fonction

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left(\frac{1}{z - 2^r} + \frac{1}{z + 2^r} \right)$$

est une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable. Or,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\, dx = \int_{-}^{\infty} F_k(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F_k(x)] \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\, dx.$$

La dernière intégrale tend vers zéro avec k^{-1} comme le montre l'emploi de l'inégalité de Hölder et la remarque faite au début de ce n°. Par conséquent, en remplaçant $F_k(x)$ par sa définition dans la première intégrale du second membre et en passant à la limite $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\, dx &= \sum_{r=1}^{\infty} A_r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\pi}{\pi} \left(\frac{1}{x - 2^r} + \frac{1}{x + 2^r} \right) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix}\, dx \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} A_r \int_0^y d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \pi (x - 2^r)}{\pi (x - 2^r)} + \frac{\sin \pi (x + 2^r)}{\pi (x + 2^r)} \right] e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \int_0^y d\xi \cos 2^r \xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-i\frac{\xi u}{\pi}} du.
\end{aligned}$$

Cette expression est donc égale à

$$2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{\sin 2^r y}{2^r}, \text{ lorsque } -\pi \leqq y \leqq \pi,$$

$$2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{\sin 2^r \pi}{2^r} = 0, \text{ lorsque } |y| \geqq \pi.$$

Elle possède une dérivée nulle lorsque $|y| > \pi$. Par contre, la série $\sum_{r=1}^{\infty} A_r \frac{\sin 2^r y}{2^r}$ ne peut avoir, dans l'intervalle $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$, de dérivée que sur un ensemble de mesure nulle. C'est une conséquence des deux propositions suivantes de la théorie des séries de Fourier[44]):

a) Soit $f(x)$ une fonction intégrable dans $(-\pi, \pi)$ et

$$\sum_n c_n e^{-inx} \sim f(x)$$

sa série de Fourier. En tout point où $f'(x)$ existe, la série dérivée terme à terme

$$\sum_n - i n c_n e^{-inx}$$

est sommable par les moyennes de Cesàro d'ordre supérieur à un et sa somme par ces moyennes est égale à $f'(x)$.

b) Pour que la série lacunaire

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin_k x) \ , \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq \lambda > 1 \ ,$$

converge par une moyenne de Cesàro sur un ensemble de mesure positive, il est nécessaire que $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$ converge.

Il est ainsi démontré que $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{-ix} dx$ n'est pas une fonction absolument continue, puisqu'elle n'a pas de dérivée, presque partout dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. $F(x)$ n'a donc pas de transformée de Fourier.

43. Il est facile de passer du théorème démontré au n° 41 au théorème IV′ énoncé au n° 20. En exprimant le terme général du second membre de (114), lorsque $m \neq 0$, à l'aide de

$$\frac{\sin \pi z}{z - m} = \frac{z}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{(-1)^m}{m} e^{-imt} - \frac{1}{m} \right] e^{izt} dt \ , \qquad (117)$$

et en permutant la sommation et l'intégration (la série converge uniformément en vertu de (113)), nous obtenons

---

[44]) Voir, par exemple, *A. Zygmund*, loc. cit. [42]), p. 55 et p. 119—122.

$$F(z) = a_0 \frac{\sin \pi z}{z} + \frac{z}{2}\left[\sum_m{}' \frac{(-1)^m a_m}{m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} e^{izt}\, dt - \sum_m{}' \frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} dt\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + z\left[-\sum_m{}' \frac{a_m}{2m} + \sum_m{}' \frac{(-1)^m a_m}{2m} e^{-imt}\right] \right\} e^{izt} dt \,,$$

c'est-à-dire

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [\Psi(\pi) + z(\Psi(t) - \Psi(\pi))] e^{izt} dt, \tag{118}$$

en posant

$$\Psi(t) = \frac{a_0}{2} - \sum_m{}' \frac{a_m}{2m} + \sum_m{}' \frac{(-1)^m}{2m} a_m e^{-imt} \,. \tag{119}$$

Remarquons que

$$\Psi(\pi) = \Psi(-\pi) = \frac{a_0}{2} \,.$$

Pour assurer la concordance des notations (46) et (119) de la série de Fourier de $\Psi(t)$, il faut avoir

$$c_0 = \frac{a_0}{2} - \sum_m{}' \frac{a_m}{2m} \,, \qquad c_m = \frac{(-1)^m a_m}{2m} \quad \text{si } m \neq 0 \,. \tag{120}$$

La convergence de la série (47) revient donc à celle de (113). La transformation facile qui, moyennant la définition (119), mène de (114) à (118) étant réversible, nous avons ramené le théorème IV′ énoncé au n° 20, cas particulier $n = 1$ du théorème IV dont il sera question au n° 49, à la proposition démontrée au n° 41.

44. Nous n'avons utilisé qu'une partie des relations que nous avons trouvées entre la série (44) et l'intégrale (43) pour démontrer le théorème IV′. Ces relations peuvent encore être utilisées pour relier certaines propriétés de la série de Fourier[45])

$$\sum_m c_m e^{-imx} \sim f(x) \tag{121}$$

d'une fonction intégrable $f(x)$, définie dans $-\pi \leqq x \leqq \pi$, à la transformée de Fourier

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{izt} dt \tag{122}$$

de la même fonction.

[45]) Les c_n de ce n° n'ont rien à faire avec les c_n du n° précédent.

On observe d'abord que

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{imt} dt = \frac{F(m)}{2\pi} \quad . \tag{123}$$

Puis on constate facilement que $F(z)$, définie par (122), est une fonction entière de type exponentiel satisfaisant à (81). Enfin, en appliquant les résultats formulés aux n^{os} 31 et 33 à la fonction (122) et aux constantes (123), on obtient des *inégalités entre les coefficients de Fourier* c_m *et la transformée de Fourier* $F(z)$ *de la même fonction* $f(x)$:

Si $p > 0$, *on a*

$$\sum_m |c_m|^p < A \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx \tag{124}$$

et si $p > 1$, *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx < B \sum_m |c_m|^p \tag{125}$$

A et B étant des constantes qui ne dépendent que de p. L'inégalité (125) *cesse d'être généralement valable pour* $0 < p \leqq 1$. *Par contre, elle subsiste encore pour ces valeurs de p pour les fonctions particulières* $f(x)$ *qui sont nulles dans les deux intervalles*

$$-\pi \leqq x \leqq -\pi + \eta\,, \quad \pi - \eta \leqq x \leqq \pi\,, \quad \left(0 < \eta < \frac{\pi}{2}\right);$$

la constante B dépend alors non seulement de p mais encore de η.

L'exemple simple $f(x) = 1, F(z) = \dfrac{2 \sin \pi z}{z}$ fait voir que l'inégalité (125) n'est pas, en général, vraie lorsque $0 < p \leqq 1$.

Le cas particulier $p = 1$ de ce théorème a été donné essentiellement par Wiener[46]). Dans le cas particulier $p = 2$ l'inégalité peut être remplacée par une égalité, comme nous l'avons vu au n° 24.

Extension des résultats aux fonctions de plusieurs variables

45. Comme nous l'avons observé au n° 22, l'extension au cas des fonctions de n variables des résultats obtenus pour les fonctions d'une variable ne se fera pas en étendant au cas $n > 1$ les méthodes de démonstration employées dans le cas $n = 1$, mais en utilisant «en bloc» les résultats obtenus dans ce cas particulier et en les généralisant par induction complète de n à $n + 1$.

---

[46]) Voir loc. cit. [22]).

Un examen attentif des procédés employés aux n^{os} 27—32 pour conclure de l'intégrale à la série montre que les résultats reposent essentiellement d'une part sur l'inégalité (59) et d'autre part sur les lemmes 4 (n^{o} 30) et 5 (n^{o} 32). Or, l'inégalité de Hardy qui est à la base de ces lemmes s'étend immédiatement au cas $n > 1$ par application répétée du cas $n = 1$. Les énoncés et les démonstrations des lemmes 4 et 5 se transposent, par suite, sans difficulté au cas $n > 1$ et nous ne nous y arrêterons pas. Il suffit donc, pour obtenir les généralisations des théorèmes des n^{os} 27—32, de démontrer la proposition suivante dont (59) est le cas particulier.

Si p est un nombre positif et $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel, on a pour toutes les valeurs réelles de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ l'inégalité

$$\begin{aligned}\int\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\int |F(x_1+iy_1, x_2+iy_2, \ldots, x_n+iy_n)|^p dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\ \leqq e^{pc(|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|)} \int\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n\end{aligned} \tag{126}$$

où c désigne la croissance cardinale de F.

Il ne nous paraît pas facile d'étendre au cas $n > 1$ les lemmes 1—3 du n^{o} 28 et la méthode employée pour démontrer (59). La démonstration peut se faire, par contre, par induction complète si on y remplace les mots «croissance cardinale» par les mots «croissance globale». Nous ne démontrerons l'énoncé ci-dessus qu'avec ce changement. Mais comme ce changement n'apporte aucune modification dans la démonstration des théorèmes du n^{o} 46 et par conséquent aucune modification non plus dans la démonstration que nous donnons au n^{o} 51 de l'égalité des croissances cardinale et globale (car cette dernière démonstration repose uniquement sur les théorèmes du n^{o} 46 et sur les théorèmes I et II de la première partie), il sera légitime d'introduire *après coup* la croissance cardinale dans l'énoncé ci-dessus. C'est ce que nous avons fait *par anticipation.*

La démonstration de (126) où c désigne donc provisoirement la croissance globale de F peut se faire, comme nous l'avons dit, par induction complète. Le principe du raisonnement sera suffisamment mis en lumière si nous nous bornons, pour plus de simplicité, à le donner pour $n = 2$.

Nous considérons donc une fonction entière de deux variables $F(z_1, z_2)$ de type exponentiel et nous nous bornons naturellement au cas où l'intégrale double

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2$$

converge. Le théorème de Fubini nous dit alors que l'ensemble E_2 des valeurs réelles x_2 pour lesquelles l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1$ converge a pour complémentaire un ensemble linéaire de mesure nulle et que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2 \, (\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1) \, .$$

Prenons pour x_2 une valeur arbitraire fixe appartenant à E_2. La fonction $F(z, x_2)$ est alors une fonction entière de type exponentiel; sa croissance globale est évidemment inférieure ou égale à la croissance globale c de $F(z_1, z_2)$. $F(z, x_2)$ est, de plus, à cause du choix de x_2, de puissance p-ième intégrable. Cette fonction satisfait donc à toutes les conditions requises pour la validité de (59). Donc, quelle que soit la valeur réelle y_1,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2)|^p dx_1 \leqq e^{pc|y_1|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1$$

en tout point x_2 de E_2, c'est-à-dire presque partout. Les deux membres de l'inégalité étant des fonctions positives mesurables de x_2, le second membre étant, de plus, une fonction intégrable de x_2, il en est de même du premier et par intégration

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2)|^p dx_1 \leqq e^{pc|y_1|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1 \, .$$

Une nouvelle application du théorème de Fubini permet de permuter l'ordre des intégrations dans le premier membre, de remplacer l'intégrale itérée du second membre par une intégrale double, d'où

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2)|^p dx_2 \leqq e^{pc|y_1|} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \, ,$$

puis de conclure que l'ensemble des valeurs réelles x_1 pour lesquelles pour y_1 arbitraire, mais fixe,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2)|^p dx_2$$

converge, a un complémentaire de mesure nulle. Désignons par $E_1(y_1)$ cet ensemble qui, en général, peut dépendre de la valeur choisie pour y_1. Si x_1 est une valeur arbitraire appartenant à $E_1(y_1)$, mais fixe, la fonction $F(x_1 + i\,y_1, z)$ de la variable z est de nouveau une fonction entière de z, de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable. Sa croissance globale ne dépassant pas c, une nouvelle application de (59) conduit à l'inégalité

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2 + i\,y_2)|^p dx_2 \leqq e^{pc|y_2|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x_1 + i\,y_1, x_2)|^p dx_2 \, ,$$

valable pour toute valeur réelle y_2 et toute valeur x_1 appartenant à l'ensemble $E_1(y_1)$. Le second membre de l'inégalité est, lorsque y_1 et y_2 sont des valeurs arbitraires fixes, une fonction positive de x_1, intégrable dans $(-\infty, \infty)$. Par suite, en répétant un raisonnement déjà fait, on conclut, puisque le complémentaire de $E_1(y_1)$ est de mesure nulle, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1+iy_1, x_2+iy_2)|^p dx_2 \leqq e^{pc|y_2|} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1+iy_1, x_2)|^p dx_2$$

$F(x_1+iy_1, x_2+iy_2)$ est par suite de puissance p-ième intégrable et

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |F(x_1+iy_1, x_2+iy_2)|^p dx_1 dx_2 \leqq e^{p\,c(|y_1|+|y_2|)} \int_{-\infty}^{\infty}\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2)^p\, dx_1 dx_2 .$$

46. L'inégalité (126) maintenant démontrée, l'extension au cas $n > 1$ des résultats des n^{os} 27—32 ne présente aucune difficulté et, abandonnant ce soin au lecteur, nous nous bornerons à formuler les théorèmes généraux que l'on obtient.

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable (c'est-à-dire que pour un certain $p > 0$ l'intégrale

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

converge). Alors,

1. *$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tend vers zéro avec $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}$ pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels. F est donc aussi de puissance q-ième intégrable si $q > p$.*

2. *d désignant un nombre positif arbitraire et $(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)})$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, une suite illimitée de points de l'espace réel à n dimensions, telle que*

$$(x_1^{(\mu)} - x_1^{(\nu)})^2 + (x_2^{(\mu)} - x_2^{(\nu)})^2 + \cdots + (x_n^{(\mu)} - x_n^{(\nu)})^2 \geqq d^2$$

pour $\mu \neq \nu$, la série

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |F(x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots, x_n^{(\mu)})|^p$$

converge.

3. *Les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial z_\nu}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont aussi des fonctions entières de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable*[47]).

---

[47]) Nous verrons au n° 53 que sous les hypothèses faites sur $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ les dérivées partielles de F ont la même fonction $h(\lambda)$ que F et, par conséquent, la même croissance cardinale que F.

47. $m_1, m_2, \ldots, m_n$ désigneront toujours, dans la suite, des nombres entiers et

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n}$$

une abréviation pour

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} .$$

Lorsque nous dirons d'une constante $A, B, \ldots$ qui figure dans une inégalité relative à une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel, de croissance cardinale c et de p-ième puissance intégrable, qu'elle ne dépend que de p et de c (ou de c), cela voudra dire que dans l'inégalité en question la même valeur $A, B, \ldots$ conviendra pour toutes les fonctions F qui ont la même valeur de p et de c (ou pour toutes les fonctions qui ont la même valeur de c).

Les résultats généraux analogues à ceux des n^{os} 27—39 se résument dans le théorème:

Théorème III: *Soit p un nombre positif et $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel. Soit c la croissance cardinale de F.*

1. *Il existe une constante A, qui ne dépend que de p et de c, telle que*

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} |F(m_1, m_2, \ldots, m_n)|^p < A^n \int\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n . \tag{127}$$

2. *Si $c < \pi$, il existe une constante B, qui ne dépend que de p et de c, telle que*

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n < B^n \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} |F(m_1, m_2, \ldots, m_n)|^p . \tag{128}$$

Lorsque $p > 1$, on peut prendre $B = C^p$ où C est une constante ne dépendant que de c.

3. *Si $p > 1$ et si $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ satisfait aux n conditions*

$$\lim_{|z| \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, z, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) e^{-\pi|z|} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{129}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ sont des valeurs réelles arbitraires, l'inégalité (128) *reste valable avec une constante B qui ne dépend que de p*[48]).

---

[48]) De la convergence de l'intégrale n-uple

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int | F(x_1, x_2, \ldots, x_n) |^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{a}$$

le théorème de Fubini permet seulement de conclure que l'intégrale k-uple ($1 \leq k < n$)

Précisons encore le sens de (129). Cette condition veut dire qu'étant donné des valeurs réelles arbitraires $x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$, il correspond à tout nombre positif ε arbitrairement petit un nombre positif $M = M(\varepsilon; x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ tel que

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, z, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)| e^{-\pi|z|} < \varepsilon$$

pour toute valeur de la variable complexe z de module $|z| > M$.

La première partie du théorème III est une conséquence de la généralisation donnée au n° précédent des résultats des n°s 27—32, plus particulièrement de l'inégalité (77) qui en est le cas $n = 1$. Sa démonstration peut se faire directement par induction complète à partir de (77). C'est d'ailleurs une spécialisation du point 2 du théorème du n° 46 et si nous l'avons formulée dans le théorème III, c'est pour mieux mettre en relief l'inégalité inverse (128).

Ici encore, la démonstration de la seconde et de la troisième partie du théorème III procèdera par induction complète et nous nous bornerons à établir le passage de $n = 1$ à $n = 2$. Nous admettons donc que les propositions III 2 et III 3 sont vraies dans le cas $n = 1$ et nous considérons une fonction entière de type exponentiel $F(z_1, z_2)$, de croissance cardinale $c < \pi$ dans le cas III 2 ou vérifiant (129) dans le cas III 3. On aura donc, par hypothèse, dans le cas III 2

$$\operatorname*{Max}_{(\alpha)} \varlimsup_{r\to\infty} r^{-1} \log |F(\alpha_1 \pm ir, \alpha_2)| < \pi, \operatorname*{Max}_{(\alpha)} \varlimsup_{r\to\infty} r^{-1} \log |F(\alpha_1, \alpha_2 \pm ir)| < \pi .$$

et dans le cas III 3

$$\lim_{|z|\to\infty} F(x_1, z)\, e^{-\pi|z|} = 0 , \quad \lim_{|z|\to\infty} F(z, x_2)\, e^{-\pi|z|} = 0 .$$

$$\int \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 \ldots dx_k \qquad \text{(b)}$$

converge *presque partout* dans l'espace $(n - k)$-dimensionnel réel des points $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$. Il convient donc de noter la conséquence suivante du théorème III : *L'intégrale* (b) *converge partout, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs réelles ou complexes de* $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

Le cas des x_K complexes se ramène au cas des x_K réels en vertu de l'inégalité (126). Ce dernier cas se ramène immédiatement en considérant la fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$F\left(\frac{\pi z_1}{2c}, \frac{\pi z_2}{2c}, \ldots, \frac{\pi z_k}{2c}, \frac{\pi(z_{k+1} + x_{k+1})}{2c}, \ldots, \frac{\pi(z_n + x_n)}{2c}\right)$$

où $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ sont des valeurs arbitraires fixes, au cas plus particulier où $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ et où la croissance cardinale de F est inférieure à π. Mais, dans ce cas particulier, la convergence de (a) entraîne la convergence de la série n-uple $\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} |F(m_1, m_2, \ldots, m_n)|^p$, en vertu de la première partie du théorème III et par conséquent celle de la série k-uple $\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_k} |F(m_1, m_2, \ldots, m_k, 0, 0, \ldots, 0)|^p$. Et d'autre part, en vertu de la deuxième partie du théorème III appliquée à la fonction de k variables $F(z_1, z_2, \ldots, z_k, 0, 0, \ldots, 0)$, on conclut l'existence de l'intégrale (b).

Nous admettons encore que pour un certain $p > 0$ ou, selon le cas, pour un certain $p > 1$, la série

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p \text{ converge.}$$

m_1 désignant un entier arbitraire fixe, $F(m_1, z)$ est une fonction entière de type exponentiel de la variable z. Sa croissance cardinale est au plus égale à c, donc inférieure à π dans le cas III 2. Dans le cas III 3 on a $\lim\limits_{|z| \to \infty} F(m_1, z)\, e^{-\pi |z|} = 0$. La convergence de la série double ci-dessus entraîne celle de la série $\sum\limits_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p$. Toutes les conditions requises pour appliquer à la fonction $F(m_1, z)$ l'inégalité (80) étant remplies, il existe une constante B telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 < B \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p. \tag{130}$$

Dans le cas III 2 B ne dépend que de p et de c et si $p>1$ est de la forme $B = C^p$ où C ne dépend que de c [nous utilisons ici la propriété évidente qu'une valeur de B qui dans (80) convient à toutes les fonctions F de croissance cardinale c convient encore, pour la même valeur de p, aux fonctions de croissance cardinale inférieure à c]. Dans le cas III 3 B ne dépend que de p.

De l'inégalité (130) découle, en faisant parcourir à m_1 toutes les valeurs entières,

$$\sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 < B \sum_{m_1} \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p. \tag{131}$$

Un théorème bien connu de Lebesgue et de B. Levi sur l'intégration des séries à termes positifs permet de conclure, puisque le premier membre de (131) est une série convergente, que la série $\sum\limits_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p$ est presque partout convergente et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 = \sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2.$$

Appelons E_2 l'ensemble des points de convergence de la série $\sum\limits_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p$. La fonction de z, $F(z, x_2)$, vérifie encore, lorsque x_2 appartient à E_2, toutes les conditions requises pour l'emploi de l'inégalité (80). Par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1 < B \sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p$$

en tout point x_2 de E_2, donc presque partout, et avec la même constante

B que plus haut. Le second membre de cette inégalité entre fonctions positives de x_2 est intégrable dans $(-\infty, \infty)$; il en est donc de même du premier membre et l'intégration par rapport à x_2 donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} | F(x_1, x_2) |^p dx_1 < B \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m_1} | F(m_1, x_2) |^p dx_2$$
$$< B^2 \sum_{m_1} \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p .$$

$F(z_1, z_2)$ est par suite de p-ième puissance intégrable et l'inégalité (128) est démontrée dans le cas $n = 2$.

Une induction complète qui procède comme celle que nous venons de donner, mais qui est encore plus simple, conduit à la généralisation au cas $n > 1$ du théorème de Mlle Cartwright cité au n° 20 et dont nous avons donné une démonstration au n° 40.

Soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel, de croissance cardinale inférieure à π. Si F est bornée sur l'ensemble des points $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ à coordonnées entières elle est bornée dans tout l'espace réel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

48. Le théorème dont la proposition du n° 41 est le cas particulier peut s'énoncer comme suit:

Pour qu'une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ soit de type exponentiel et possède les propriétés suivantes :

(I) *La croissance cardinale de F est $\leqq \pi$,*

(II) *Pour un certain $p > 1$*

$$\int\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} | F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad \textit{converge,}$$

il faut et il suffit qu'il existe une suite n-uple de nombres

$$a_{m_1 m_2 \ldots m_n} , \quad m_\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ayant la propriété que

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} | a_{m_1 m_2 \ldots m_n} |^p \quad \textit{converge,}$$

et que $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ puisse être représentée par la série

$$F(z_1 z_2, \ldots, z_n) = \frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi z_2}{\pi} \cdots \frac{\sin \pi z_n}{\pi} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} \frac{a_{m_1 m_2 \ldots m_n}}{(z_1 - m_1)(z_2 - m_2) \ldots (z_n - m_n)} . \quad (132)$$

Notre démonstration par induction complète se bornera ici encore à l'étude du cas $n = 2$.

a) Pour démontrer que les conditions (I) et (II) sont suffisantes nous noterons, en premier lieu, qu'il en découle d'après le théorème III 1 la convergence de la série double $\sum_{m_1}\sum_{m_2}|F(m_1, m_2)|^p$. On montre en effet comme au n° 41, sous a), en faisant usage de la conclusion 1 du théorème du n° 46, que les conditions (I) et (II) entraînent les relations (129). Le second membre de (132), où nous prenons $n = 2$, est par suite une série absolument et uniformément convergente de z_1, z_2 dans tout domaine borné de l'espace complexe (z_1, z_2), comme on le voit en se servant de l'inégalité de Hölder; il représente donc une fonction entière de z_1, z_2.

Appelons E_2 l'ensemble des valeurs de x_2 pour lesquelles $\int_{-\infty}^{\infty}|F(x_1, x_2)|^p dx_1$ converge. Son complémentaire est de mesure nulle en vertu de (II). Lorsque x_2 est une valeur arbitraire fixe de l'ensemble E_2, la fonction de z, $F(z, x_2)$, est une fonction entière de type exponentiel qui satisfait aux conditions (I) et (II) du cas $n = 1$. Elle est, par conséquent, représentable dans tout le plan de la variable complexe z par la formule

$$F(z, x_2) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{m_1} (-1)^{m_1} \frac{F(m_1, x_2)}{z - m_1} . \tag{133}$$

De plus, en vertu du théorème III 1, il existe une constante A (indépendante de x_2) telle que, en tout point x_2 de E_2,

$$\sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p < A \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1 .$$

Le complémentaire de E_2 étant de mesure nulle et le second membre de l'intégrale ci-dessus étant intégrable en x_2 dans $(-\infty, \infty)$, on conclut encore que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 < A \int_{-\infty}^{\infty}\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1\, dx_2 .$$

Par suite, $\int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2$ converge pour toute valeur entière de m_1. La fonction $F(m_1, z)$ satisfait donc, elle aussi, à toutes les conditions du théorème du n° 41 et par conséquent

$$F(m_1, z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{m_2} (-1)^{m_2} \frac{F(m_1, m_2)}{z - m_2} . \tag{134}$$

On peut déduire des développements (133) et (134) obtenus pour $F(z, x_2)$ et pour $F(m_1, z)$, en tenant compte de la convergence absolue des séries considérées,

$$F(z_1, x_2) = \frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi x_2}{\pi} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{(-1)^{m_1+m_2} F(m_1, m_2)}{(z_1 - m_1)(x_2 - m_2)} .$$

Cette formule n'est, pour l'instant, établie que pour z_1 complexe arbitraire et pour x_2 réel appartenant à l'ensemble E_2. Mais E_2 est partout dense puisque son complémentaire est de mesure nulle. Or, $F(z_1, z_2)$ est une fonction entière de z_2 ainsi que

$$\frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi z_2}{\pi} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{(-1)^{m_1+m_2} F(m_1, m_2)}{(z_1 - m_1)(z_2 - m_2)}$$

(à cause de la convergence de la série $\sum\limits_{m_1} \sum\limits_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p$). L'égalité de ces fonctions sur un ensemble partout dense de valeurs réelles de z_2 entraîne leur égalité pour toutes les valeurs complexes de z_2. Il suffit maintenant de prendre $a_{m_1 m_2} = (-1)^{m_1+m_2} F(m_1, m_2)$ pour achever la démonstration de la suffisance.

b) Démontrons maintenant que les conditions (I) et (II) sont nécessaires. Nous supposons donc que la série $\sum\limits_{m_1} \sum\limits_{m_2} |a_{m_1 m_2}|^p$, $(p > 1)$, converge et que $F(z_1, z_2)$ est définie par la série (132) pour $n = 2$. On en tire, par l'inégalité de Hölder, que F est une fonction entière de type exponentiel, de croissance cardinale inférieure ou égale à π et que

$$F(m_1, m_2) = (-1)^{m_1+m_2} a_{m_1 m_2} .$$

Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2$ converge.

On considère à cet effet la fonction de z, $F(m_1, z)$. Comme c'est une fonction entière de type exponentiel qui vérifie les conditions du théorème III 3 pour $n = 1$, il existe une constante B telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 < B \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p.$$

Donc,

$$\sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 < B \sum_{m_1} \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p .$$

De la convergence de la série premier membre résulte que $\sum\limits_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p$ est une fonction intégrable de x_2 et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 = \sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(m_1, x_2)|^p dx_2 \ .$$

La série $\sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p$ converge par conséquent sur un ensemble E_2 dont le complémentaire est de mesure nulle. Si x_2 appartient à E_2 la fonction de z, $F(z, x_2)$, satisfait encore aux conditions du cas $n = 1$ du théorème III 3. Donc, pour toute valeur de x_2 appartenant à E_2, c'est-à-dire presque partout,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^p dx_1 < B \sum_{m_1} |F(m_1, x_2)|^p .$$

Le second membre étant, comme nous l'avons vu, une fonction intégrable de x_2, une nouvelle intégration donne

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int |F(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 < B^2 \sum_{m_1} \sum_{m_2} |F(m_1, m_2)|^p$$

C. q. f. d.

49. Il suffit maintenant de se servir de la formule (117) et de procéder comme au n° 43 pour exprimer $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par une intégrale définie et obtenir le théorème.

Théorème IV: *Pour qu'une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ soit de type exponentiel et possède les deux propriétés suivantes :*

(I) *La croissance cardinale de F est $\leqq \pi$,*

(II) *L'intégrale $\int \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ converge pour un certain $p > 1$,*

il faut et il suffit qu'elle puisse être représentée par la formule

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \int \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2 + \cdots + z_n t_n)} \{ & \Psi(\pi, \pi, \ldots, \pi)\,(1-z_1)\,(1-z_2)\cdots(1-z_n) \\ & + \sum \Psi(t_1, \pi, \ldots, \pi) z_1 (1-z_2) \ldots (1-z_n) \\ & + \sum \Psi(t_1, t_2, \pi, \ldots, \pi)\, z_1 z_2 (1-z_3) \ldots (1-z_n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \Psi(t_1, t_2, \ldots, t_n) z_1 z_2 \ldots z_n \} dt_1 dt_2 \ldots dt_n \ , \end{aligned} \tag{135}$$

où $\Psi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une fonction continue de $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, de période 2π relativement à chacune des variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dont la série de Fourier

$$\Psi(t_1, t_2, \ldots, t_n) \sim \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} e^{-i(m_1 t_1 + m_2 t_2 + \cdots + m_n t_n)}$$

possède la propriété particulière que

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} |m_1 m_2 \ldots m_n c_{m_1 m_2 \ldots m_n}|^p \quad \textit{converge} \ .$$

(avec la convention que, lorsqu'un ou plusieurs des indices $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont nuls, il faut remplacer dans le terme correspondant $|m_1 m_2 \ldots m_n c_{m_1 m_2} \ldots {}_{m_n}|^p$ de la dernière série le facteur nul $|m_1 m_2 \ldots m_n|^p$ par le produit des valeurs absolues des termes non nuls de la suite $m_1^p, m_2^p, \ldots, m_n^p$).

Le symbole Σ placé devant les expressions qui figurent dans la formule (135) signifie qu'il faut faire la somme de tous les termes que l'on obtient en permutant dans ces expressions les indices de toutes les manières possibles. Par exemple, la seconde ligne de la formule (135) s'écrit, si on la développe

$$\Psi(t_1, \pi, \ldots, \pi) z_1 (1-z_2) \ldots (1-z_n) + \Psi(\pi, t_2, \pi, \ldots, \pi)(1-z_1) z_2 (1-z_3) \ldots (1-z_n)$$
$$+ \cdots + \Psi(\pi, \pi, \ldots, \pi, t_n)(1-z_1)(1-z_2) \ldots (1-z_{n-1}) z_n$$

et a $\binom{n}{1}$ termes; la troisième ligne a $\binom{n}{2}$ termes, la quatrième $\binom{n}{3}$ termes, $\ldots$, l'avant-dernière $\binom{n}{n-1}$ termes.

Ce théorème établit une correspondance biunivoque entre la classe des fonctions entières de type exponentiel possédant les propriétés (I) et (II) du théorème IV et celle des séries de Fourier absolument convergentes dont les coefficients $c_{m_1 m_2} \cdots {}_{m_n}$ sont tels que

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} | m_1 m_2 \ldots m_n c_{m_1 m_2 \ldots m_n} |^p$$

converge (avec la convention faite ci-dessus au sujet des indices nuls).

50. Du théorème ci-dessus découle encore la proposition suivante qui relie les coefficients de Fourier d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ intégrable dans le domaine $-\pi \leqq x_\nu \leqq \pi$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ à la transformée de Fourier de la fonction égale à f dans ce domaine et égale à zéro en dehors.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction définie et intégrable dans le domaine $-\pi \leqq x_\nu \leqq \pi$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Soit

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} c_{m_1 m_2 \ldots m_n} e^{-i(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n)} \sim f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sa série de Fourier et $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ la fonction entière de type exponentiel définie par

$$F(z_1 z_2, \ldots, z_n) = \int\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, e^{-i(t_1 z_1 + t_2 z_2 + \cdots + t_n z_n)} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n .$$

Il existe, si $p > 0$, une constante A ne dépendant que de p telle que

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} | c_{m_1 m_2 \ldots m_n} |^p < A^n \int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int | F(x_1, x_2, \ldots, x_n) |^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

et, si $p > 1$, une constante B ne dépendant que de p telle que

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int | F(x_1, x_2, \ldots, x_n) |^p dx_1\, dx_2 \ldots dx_n < B^n \sum_{m_1} \sum_{m_2} \cdots \sum_{m_n} | c_{m_1 m_2 \ldots m_n} |^p .$$

La dernière inégalité cesse en général d'être valable si $0 < p \leqq 1$, mais elle subsiste encore dans ce cas pour les fonctions particulières f qui sont nulles en dehors d'un domaine

$$-(\pi - \eta) \leqq x_\nu \leqq \pi - \eta, \quad 0 < \eta < \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n .$$

Dans ce cas la constante B dépend non seulement de p, mais encore de η.

La croissance de $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dans le cas général $p > 0$

51. Les théorèmes I et II de la première partie relient la fonction $h(\lambda)$ qui caractérise la croissance de la fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel et de *carré intégrable* à la fonction d'appui $\chi(\lambda)$ d'un domaine convexe n-dimensionnel $\mathfrak{K}$ déterminé par la transformée de Fourier de F. Il se pose naturellement la question de savoir dans quelle mesure ces théorèmes se laissent généraliser au cas où F est de puissance p-ième intégrable. Nous avons vu au n° 42 que si $p > 2$, F n'a pas nécessairement une transformée de Fourier. Il n'est donc pas possible d'étendre au cas général $p > 0$ l'énoncé que nous avons donné des théorèmes I et II. On peut cependant, par l'artifice simple du n° 30, ramener l'étude de la croissance dans le cas $p > 0$ au cas $p = 2$.

En effet, soit $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable ($p > 0$). Déterminons l'entier m par $2m > p$. Alors, d'après un résultat obtenu précédemment (n° 46, conclusion 1)

$$G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)^m$$

est une fonction entière, de type exponentiel et de carré intégrable. A la fonction G appartient, d'après le théorème II, un domaine convexe n-dimensionnel $\mathfrak{K}_m$ qui est le plus petit domaine convexe à l'extérieur duquel la transformée de Fourier Φ_m de G est équivalente à zéro. La fonction

$$h_m(\lambda) = \underset{(\alpha)}{\operatorname{Max}} \varlimsup_{r \to \infty} r^{-1} \log |G(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \alpha_2 - i\lambda_2 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$$

est égale à la fonction d'appui $\chi_m(\lambda)$ de $\mathfrak{K}_m$ et

$$F(z_1 z_2, \ldots, z_n)^m = \int\int\cdots\int_{\mathfrak{K}_m} \Phi_m(y_1 y_2, \ldots, y_n)\, e^{-i(z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots + z_n y_n)} dy_1\, dy_2 \ldots dy_n . \tag{136}$$

Mais comme, en vertu de leurs définitions ,

$$h(\lambda) = \frac{1}{m} h_m(\lambda) ,$$

on voit que $h(\lambda)$ est la fonction d'appui du domaine obtenu en réduisant les dimensions linéaires de $\mathfrak{K}_m$ dans le rapport $m : 1$.

Le théorème II comporte donc la généralisation suivante.

Théorème II a. *Si $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est une fonction entière, non identiquement nulle, de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable* ($p > 0$), *la fonction $h(\lambda)$ définie par* (5) *est la fonction d'appui d'un domaine convexe n-dimensionnel.*

L'égalité des croissances cardinale et globale de la fonction G, de carré intégrable, entraîne la même chose pour F, d'où le théorème, énoncé déjà au n° 23: *La croissance cardinale et la croissance globale d'une fonction entière non nulle, de type exponentiel, sont égales lorsque cette fonction est, pour un certain $p > 0$, de puissance p-ième intégrable.*

La formule (136) — voir la formule (7) et les remarques du n° 14 — montre encore que, sous les hypothèses du théorème IIa, il existe une constante K telle que

$$|F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \alpha_2 - i\lambda_2 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)| < K e^{h(\lambda) r} . \tag{137}$$

52. Les raisonnements du n° 51 reposent d'une part sur les théorèmes I et II, donc sur la théorie de la transformée de Fourier des fonctions de carré intégrable, et d'autre part sur la propriété que si F est une fonction entière de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable, elle est aussi de q-ième puissance intégrable lorsque $q > p$. On peut établir le théorème II a directement en introduisant au lieu de la transformée de Fourier une fonction d'intervalle, qui, dans le cas où la transformée de Fourier existe, a cette transformée pour dérivée.

Cette fonction d'intervalle se définit comme suit. Soit $J = (a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2 \ldots, b_n)$ un intervalle n-dimensionnel, c'est-à-dire l'ensemble des points $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de l'espace réel à n dimensions, tels que

$$a_\nu \leqq y_\nu \leqq b_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Si F est une fonction mesurable de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et si

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int |F|^p dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

converge pour un certain $p \geqq 1$, la fonction d'intervalle

$$\varphi(J; F) = \varphi(J) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{138}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dx_1 \ldots dx_n F(x_1, \ldots, x_n) \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} dy_1 \ldots dy_n$$

est une fonction additive de l'intervalle J. C'est, de plus, une fonction continue de J au sens suivant: $\varphi(J)$ tend vers zéro avec le volume $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$ de J.

Appelons *point de constance* de $\varphi(J)$ un point $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tel que $\varphi(J) = 0$ pour tout intervalle J situé dans un certain voisinage de ce point. Appelons encore *points de variance* de $\varphi(J)$ les points $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ qui ne sont pas des points de constance de cette fonction d'intervalle. On peut alors montrer:

Théorème II b. *Si $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est une fonction entière, de type exponentiel et de p-ième puissance intégrable ($p > 0$), les points de variance de $\varphi(J)$ forment un ensemble borné $\mathfrak{M}$. De plus, si la fonction F n'est pas identiquement nulle, $\mathfrak{M}$ n'est pas vide, le plus petit domaine convexe $\mathfrak{K}$ enfermant $\mathfrak{M}$ est n-dimensionnel et*

$$h(\lambda) = \chi(\lambda),$$

$\chi(\lambda)$ étant la fonction d'appui de $\mathfrak{K}$ et $h(\lambda)$ la fonction caractérisant la croissance de F[49]*)*.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration afin de ne pas allonger outre mesure ce mémoire. Nous remarquerons simplement qu'elle procède d'une manière parallèle à celle des théorèmes I et II. Bien que plus longue, elle est plus «élémentaire» en ce sens qu'elle n'a pas à faire usage de la théorie de la transformée de Fourier et de la notion de convergence en moyenne parce que les intégrales qu'elle introduit sont toutes absolument convergentes.

53. Le théorème suivant relie la croissance des dérivées partielles de F à celle de F.

Les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial z_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, d'une fonction entière $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de type exponentiel et de puissance p-ième intégrable $(p > 0)$ ont la même fonction de croissance $h(\lambda)$ que F.

Nous donnerons deux démonstrations très différentes de cette proposition.

a) La première est une application du théorème IIb. Comparons la fonction d'intervalle $\varphi(J) = \varphi(J\,; F)$ de F avec la fonction d'intervalle

---

[49]) Lorsque $\varphi(J)$ est une fonction d'intervalle absolument continue (c'est toujours le cas si $0 < p \leqq 2$), F possède une transformée de Fourier Φ et peut s'exprimer par la formule

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \int\int_{\mathfrak{K}} \cdots \int \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, e^{i(z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots + z_n y_n)}\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n\,. \quad (\mathrm{a})$$

Dans ce cas l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \cdots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-i(y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

calculée comme *valeur principale*, c'est-à-dire comme la limite

$$\lim_{R_1 \to \infty, \ldots, R_n \to \infty} \int_{-R_1}^{R_1}\int_{-R_2}^{R_2} \cdots \int_{-R_n}^{R_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-i(y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

existe et est nulle en tout point $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ extérieur à $\mathfrak{K}$. C'est une conséquence de (a) et du théorème de Riemann-Lebesgue de la théorie des séries trigonométriques. Nous avons obtenu au no 19 une proposition plus générale dans le cas $n = 1$ puisque nous n'y supposons pas $F(z)$ de puissance p-ième intégrable mais seulement que $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = 0$. Corrigeons à ce propos une phrase incorrecte du no 19. La dernière phrase de la page 246 doit être remplacée par la suivante: L'égalité (37) ayant lieu sans exception en dehors de l'intervalle $(-h', h)$, nous savons que non seulement l'intégrale figurant dans la conclusion du théorème du no 5 est nulle en dehors de l'intervalle $(-h', h)$ quand on la calcule comme limite en moyenne, mais encore que sa valeur principale existe à l'extérieur de cet intervalle et y est nulle.

$\varphi_1(J) = \varphi(J\,; \frac{\partial F}{\partial z_1})$ de sa dérivée $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ qui, comme nous l'avons vu, est aussi de p-ième puissance intégrable. Un calcul élémentaire donne, en partant des définitions de $\varphi(J)$ et de $\varphi_1(J)$

$$\begin{aligned}\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; b_1, b_2, \ldots, b_n) = &-i b_1 \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; b_1, b_2, \ldots, b_n) \\ &+ i \int_{a_1}^{b_1} \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; y_1, b_2, \ldots, b_n) dy_1\,. \end{aligned} \tag{139}$$

Si $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ est un point de constance de $\varphi(J)$, $\varphi(J) = 0$ pour tout intervalle $J = (a_1, a_2, \ldots, a_n\,; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ du voisinage de ce point et la relation ci-dessus montre que $\varphi_1(J) = 0$. Tout point de constance de $\varphi(J)$ est donc un point de constance de $\varphi_1(J)$.

Si $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ est un point de constance de $\varphi_1(J)$, le premier membre de la relation (139) est nul pour tout intervalle du voisinage de ce point et par conséquent on a dans ce voisinage

$$b_1 \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; y_1, b_2, \ldots, b_n) dy_1\,.$$

$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n\,; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est donc une fonction absolument continue de b_1 et la dérivation par rapport à b_1 donne

$$\frac{\partial \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)}{\partial b_1} = 0\,.$$

Par suite $\varphi(J)$ est indépendante de b_1 lorsque l'intervalle J est situé dans le voisinage du point $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Comme d'autre part φ est une fonction continue de $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n$ et est nulle lorsque $b_1 = a_1$ il résulte que $\varphi(J) = 0$. Tout point de constance de $\varphi_1(J)$ est donc un point de constance de $\varphi(J)$.

Il suffit maintenant de se rappeler la signification conférée par le théorème II b aux points de constance de $\varphi(J)$ pour conclure la proposition énoncée.

b) La seconde démonstration part du cas particulier $p = 2$. Dans ce cas les théorèmes I et II de la première partie donnent la formule

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \iint_{\mathfrak{K}} \cdots \int \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, e^{i(z_1 y_1 + z_2 y_2 + \cdots + z_n y_n)} dy_1 dy_2 \ldots dy_n$$

qu'il suffit de dériver par rapport à z_1 pour voir que $i y_1 \Phi$ est la transformée de Fourier de $\frac{\partial F}{\partial z_1}$. Par suite, $\mathfrak{K}$ est encore le plus petit domaine convexe à l'extérieur duquel la transformée de Fourier de $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ est équivalente à zéro. Donc, d'après le théorème II, $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ et F ont la même fonction $h(\lambda)$. La proposition est donc démontrée lorsque $p = 2$.

Si $p \neq 2$, déterminons un entier m tel que $m > 2p$. $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)^m$ étant de carré intégrable, F^m et $\frac{\partial}{\partial z_1} F^m$ ont, d'après ce qui précède, la même fonction de croissance:

$$h(\lambda\,;\, \frac{\partial}{\partial z_1} F^m) = h(\lambda\,;F^m)\ .$$

Or,

$$h(\lambda;F^m) = m\,h(\lambda\,;F)$$

$$h(\lambda\,;\frac{\partial}{\partial z_1} F^m) = h\left(\lambda;\ F^{m-1}\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)$$

$$\leqq h(\lambda;F^{m-1}) + h\left(\lambda\,;\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)$$

d'où

$$h(\lambda;\frac{\partial}{\partial z_1} F^m) \leqq (m-1)\,h(\lambda;F) + h\left(\lambda;\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)\ ,$$

et par conséquent

$$h(\lambda;F) \leqq h\left(\lambda;\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)\ .$$

Pour démontrer l'inégalité inverse et achever ainsi la démonstration, remarquons que la fonction

$$G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{\sin z_1}{z_1}\frac{\sin z_2}{z_2}\cdots\frac{\sin z_n}{z_n}$$

a la propriété

$$\operatorname*{Max}_{(\alpha)} \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\log|G(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \alpha_2 - i\lambda_2 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$$
$$= \lim_{r\to\infty} r^{-1}\log|G(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \alpha_2 - i\lambda_2 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|\ ,$$

sauf pour certaines directions «exceptionnelles» (celles pour lesquelles une des composantes λ_ν est nulle). Par conséquent, si F est une fonction de type exponentiel, on a

$$h(\lambda\,;FG) = \operatorname*{Max}_{(\alpha)} \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\,[\log|F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$$
$$+ \log|G(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|]$$
$$= \operatorname*{Max}_{(\alpha)} \overline{\lim_{r\to\infty}}\ r^{-1}\log|F(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$$
$$+ \lim_{r\to\infty} r^{-1}\log|G(\alpha_1 - i\lambda_1 r, \ldots, \alpha_n - i\lambda_n r)|$$

c'est-à-dire

$$h(\lambda\,;FG) = h(\lambda\,;F) + h(\lambda\,;G)$$

pour toute direction (λ) non exceptionnelle. Les termes de cette formule étant des fonctions continues de la direction (λ), l'égalité a encore lieu pour les directions exceptionnelles. On a donc aussi

$$h\left(\lambda; G\frac{\partial F}{\partial z_1}\right) = h(\lambda; G) + h\left(\lambda; \frac{\partial F}{\partial z_1}\right) .$$

On établirait de même que

$$h\left(\lambda; F\frac{\partial G}{\partial z_1}\right) = h(\lambda; F) + h\left(\lambda; \frac{\partial G}{\partial z_1}\right) .$$

Mais les fonctions FG, $\dfrac{\partial G}{\partial z_1}$ sont de carré intégrable. Par suite,

$$h(\lambda; \frac{\partial}{\partial z_1}(FG)) = h(\lambda; FG), \quad h\left(\lambda; \frac{\partial G}{\partial z_1}\right) = h(\lambda; G) .$$

Donc, puisque

$$G\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}(FG) - F\frac{\partial G}{\partial z_1} ,$$

$$h\left(\lambda; G\frac{\partial F}{\partial z_1}\right) \leqq \mathrm{Max}\left[h\left(\lambda; \frac{\partial}{\partial z_1}(FG)\right), h\left(\lambda; F\frac{\partial G}{\partial z_1}\right)\right]$$

$$h\left(\lambda; \frac{\partial F}{\partial z_1}\right) + h(\lambda; G) \leqq \mathrm{Max}\,[h(\lambda; F) + h(\lambda; G), h(\lambda; F) + h(\lambda; G)]$$

c'est-à-dire

$$h\left(\lambda; \frac{\partial F}{\partial z_1}\right) \leqq h(\lambda; F) .$$

Les méthodes de ce mémoire s'appliquent aussi à l'étude des fonctions entières de type exponentiel $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ qui, dans le domaine réel, sont telles que $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-k}$ reste bornée pour une certaine valeur de k positive ou nulle lorsque $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{-1}$ tend vers zéro.

(Reçu le 1er septembre 1937.)