Math. Z. 177, 285–287 (1981)

Mathematische Zeitschrift

Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra

Martin Kneser*

Mathematisches Institut der Universität, Bunsenstraße 3–5, D-3400 Göttingen, Bundesrepublik Deutschland

Vor etwa vierzig Jahren hat mein Vater in einer kleinen Arbeit [1] eine konstruktive Variante des Beweises von Argand und Cauchy für den Fundamentalsatz der Algebra angegeben. Einigen Aufwand erforderte dabei der Beweis eines Hilfssatzes, der ihn offenbar nicht befriedigt hat, denn ich fand in seinem Nachlaß mehrere Ansätze zur Vereinfachung. Ich möchte hier eine andere Version geben, die mir einfacher erscheint und Ähnlichkeit mit dem von Dejon und Nickel [2] angegebenen Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Polynomnullstellen zeigt. Dort wird übrigens in den Abschnitten 5. und 6. ein Konvergenzbeweis ohne Voraussetzung der Existenz von Nullstellen geführt und damit auch der Fundamentalsatz bewiesen, allerdings – was in diesem Zusammenhang erstaunen mag – mit Hilfe eines nicht konstruktiven Auswahlverfahrens. Die folgenden Überlegungen können daher auch als Ergänzung zu diesen Abschnitten der Arbeit [2] aufgefaßt werden.

In [1] wurde Wert darauf gelegt, alle Beweisschritte so zu führen, daß sie auch von Intuitionisten anerkannt werden. So wurde z.B. die für den Intuitionisten bei reellen Zahlen unzulässige Fallunterscheidung „$a \leqq b$ oder $a \geqq b$" immer ersetzt durch eine andere „$a < c$ oder $a > b$" mit $b < c$. Das wäre auch hier ohne Schwierigkeit möglich gewesen. Im Interesse der leichteren Lesbarkeit habe ich aber darauf verzichtet.

Unser Beweis beruht auf dem

Hilfssatz. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine positive Zahl* $q = q_n < 1$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $c > 0$, $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ *ein normiertes Polynom mit komplexen Beiwerten* a_i *und* $|a_0| \leqq c$, *so gibt es eine komplexe Zahl x mit* $|x| \leqq c^{1/n}$ *und* $|f(x)| \leqq qc$.

Der Fundamentalsatz der Algebra folgt daraus in wenigen Zeilen. Ist $g(X) = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ ein normiertes Polynom vom Grad n und $c > |b_0|$, so konstruieren

* Diese Note wurde während eines Aufenthalts an der Universität Salzburg geschrieben. Den dortigen Kollegen danke ich herzlich für ihre Gastfreundschaft

0025-5874/81/0177/0285/$01.00

wir induktiv eine Folge komplexer Zahlen x_m, indem wir $x_0=0$ setzen, dann – wenn wir x_m schon haben – den Hilfssatz auf $f(X)=g(x_m+X)$ anwenden und $x_{m+1}=x_m+x$ setzen. Wir erhalten $|g(x_m)|\leqq q^m c$ und $|x_{m+1}-x_m|\leqq (q^m c)^{1/n}$, so daß $\lim\limits_{m\to\infty} x_m=y$ existiert und $g(y)=0$ wird.

Beweis des Hilfssatzes. Ist $|a_0|\leqq qc$, so setzen wir $x=0$. Anderenfalls versuchen wir es mit folgendem Ansatz. Wir wählen eines der Glieder $a_1X,\ldots,a_nX^n=X^n$ aus, etwa a_kX^k, bestimmen das Argument von x so, daß a_0 und a_kx^k sich um einen negativen Faktor unterscheiden, und setzen für den Betrag $|x|=r$ zunächst nur voraus, daß er hinreichend klein ist, nämlich

$$|a_k|\,r^k\leqq|a_0|,\qquad r^n\leqq|a_0|. \tag{1}$$

Dann haben wir die Abschätzung

$$|f(x)|\leqq|a_0+a_kx^k|+\sum_{i\neq 0,k}|a_i\,x^i|=|a_0|-|a_k|\,r^k+\sum_{i\neq 0,k}|a_i|\,r^i. \tag{2}$$

Es kommt also darauf an, k und r so zu wählen, daß die Summanden $|a_i|\,r^i$ $(i\neq 0,k)$ klein gegen $|a_k|\,r^k$, dieser andererseits nicht zu klein gegen $|a_0|$ wird.

Um das zu erreichen, betrachten wir für positive s die Funktion $m(s)=\max\{|a_i|s^i;\,i=1,\ldots,n\}$. Sie ist stetig und wächst monoton von 0 bis ∞. Die positive Halbgerade zerfällt in aneinanderstoßende Intervalle $I_1,\ldots,I_n$ (von denen einige leer sein können) derart, daß für $s\in I_k$

$$m(s)=|a_k|\,s^k \tag{3}$$

gilt. Wir bestimmen t als Lösung der Gleichung $m(t)=|a_0|$, haben also sicher (1) wenn $r\leqq t$ ist. Weiter seien die Zahlen k_{-1}, k_0, k_1, $k_2,\ldots$ so bestimmt, daß $3^{-i}t$ im Intervall I_{k_i} liegt.

Da $n\geqq k_{-1}\geqq k_0\geqq\ldots\geqq 1$ ist, gibt es ein $j\geqq 0$, für das $k_{j-1}=k_j=k_{j+1}$ ist. Wählen wir j möglichst klein, so gilt $k_{2i-1}\leqq n-i$ für $2i-1\leqq j$ und somit $j\leqq 2(n-k_j)$.

Wir setzen jetzt $k=k_j$ und $r=3^{-j}t$. Da $m(s)$ von $3^{-i}t$ bis $3^{-i-1}t$ höchstens wie eine k_i-te Potenz abnimmt, haben wir

$$m(r)=m(3^{-j}t)\geqq 3^{-h}\,m(t)$$

mit

$$h\leqq n+2(n-1)+2(n-2)+\ldots+2(k+1)+k=n^2-k^2. \tag{4}$$

Wegen $k_{j+1}=k$ gilt (3) mit $s=r/3$, also

$$\begin{aligned}&|a_i|\,r^i=3^i|a_i|(r/3)^i\leqq 3^i|a_k|(r/3)^k=3^{i-k}|a_k|\,r^k,\\ &\sum_{1\leqq i<k}|a_i|\,r^i\leqq\sum_{1\leqq i<k}3^{i-k}|a_k|\,r^k=\tfrac{1}{2}(1-3^{1-k})|a_k|\,r^k.\end{aligned} \tag{5}$$

Entsprechend ergibt sich aus $k_{j-1}=k$ die Ungleichung

$$\sum_{k<i\leqq n}|a_i|\,r^i\leqq\tfrac{1}{2}(1-3^{k-n})|a_k|\,r^k. \tag{6}$$

Aus (2), (5), (6) und (4) folgt nun

$$|f(x)| \leqq |a_0| - |a_k| r^k + \tfrac{1}{2}(1-3^{1-k})|a_k| r^k + \tfrac{1}{2}(1-3^{k-n})|a_k| r^k$$
$$< |a_0| - \tfrac{1}{2} 3^{1-k} m(r) \leqq (1 - \tfrac{1}{2} 3^{1-k+k^2-n^2})|a_0| \leqq (1 - \tfrac{1}{2} 3^{1-n^2}) c.$$

Das ist die Behauptung des Hilfssatzes mit $q = 1 - \frac{1}{2} 3^{1-n^2}$.

Literatur

1. Kneser, H.: Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus. Math. Z. **46**, 287–302 (1940)
2. Dejon, B., Nickel, K.: A never failing, fast convergent root-finding algorithm. In: Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra. Proceedings of a Symposium (Zürich-Rüschlikon 1967), S. 1–35. London-New York-Sidney: Wiley-Interscience 1969

Eingegangen am 21. Januar 1981