Math. Z. 168, 167–179 (1979)

Mathematische Zeitschrift

Connexions à courbure de Ricci donnée

Jacques Gasqui

Laboratoire de Mathématiques Pures, Institut Fourier, Université de Grenoble, F-38402 St. Martin d'Hères, France

Nous avions montré dans [1] qu'un tenseur analytique réel de type $(0,2)$ sur $\mathbb{R}^n$ était localement la courbure de Ricci d'une connexion linéaire analytique réelle sur $\mathbb{R}^n$. En se ramenant à des équations différentielles ordinaires, Jacobowitz a étendu ce résultat au cas différentiable, lorsque $n=2$ (cf. [4]). Nous nous proposons ici d'obtenir ce résultat en toutes dimensions.

Nous étudions en fait un problème un peu plus général, qui englobe celui de la courbure de Ricci, et que l'on peut présenter ainsi. Appelons P l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 associant à une 1-forme vectorielle ω sur $\mathbb{R}^n$, la 1-forme scalaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\langle \xi, P(\omega)\rangle = \mathrm{Trace}(\eta \mapsto (\nabla\omega)(\eta,\xi) - (\nabla\omega)(\xi,\eta)),$$

où ∇ est la connexion plate canonique sur $\mathbb{R}^n$ et ξ, η sont des champs de vecteurs. Si β est une 1-forme scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et Q une forme quadratique analytique réelle sur les 1-formes vectorielles sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans les 1-formes scalaires sur $\mathbb{R}^n$, nous résolvons localement le système non-linéaire

$$P(\omega) + Q(\omega) = \beta. \tag{1}$$

Au paragraphe 1, on étudie le cas différentiable d'ordre fini: l'opérateur différentiel linéarisé de $P+Q$, le long d'une 1-forme vectorielle donnée, admet un inverse à droite avec «perte de dérivées» et, dans cette situation, des calculs itératifs basés sur la méthode de Newton permettent d'obtenir des solutions de (1). Dans le cas $\mathscr{C}^\infty$, étudié au paragraphe 2, on passe dans le domaine complexe et on utilise un théorème des fonctions implicites dû à Jacobowitz (cf. [3]).

1. Le cas différentiable d'ordre fini

Soient $x^1, \ldots, x^n$, T et T^* les coordonnées canoniques, les fibrés tangent et cotangent à $\mathbb{R}^n$, respectivement. On note $B(r)$ la boule fermée de centre O et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne. Pour k entier positif, on désigne

0025-5874/79/0168/0167/$02.60

par $\mathscr{C}^k(B(r))$ l'espace des fonctions sur $B(r)$, à valeurs réelles, continues ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqq k$. On le munit de sa norme habituelle

$$|f|_{k,r} = \sum_{|\alpha| \leqq k} \sup_{x \in B(r)} |D^\alpha f(x)|.$$

On note alors $\mathscr{C}^k_r(T^*)$ (resp. $\mathscr{C}^k_r(T^* \otimes T)$) l'espace des 1-*formes différentielles* $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i dx^i$ (resp. 1-*formes vectorielles* $\omega = \sum_{1 \leqq i,j \leqq n} \omega^j_i dx^i \otimes \partial/\partial x^j$) sur $B(r)$ telles que les β_i (resp. ω^j_i) soient dans $\mathscr{C}^k(B(r))$. On munit ces espaces des normes

$$|\beta|_{k,r} = \sup_{1 \leqq i \leqq n} |\beta_i|_{k,r} \quad \text{et} \quad |\omega|_{k,r} = \sup_{1 \leqq i,j \leqq n} |\omega^j_i|_{k,r},$$

si $\beta = \sum_i \beta_i dx^i \in \mathscr{C}^k_r(T^*)$ et $\omega = \sum_{i,j} \omega^j_i dx^i \otimes \partial/\partial x^j \in \mathscr{C}^k_r(T^* \otimes T)$. Jusqu'à la fin de ce paragraphe, k est fixé et supposé $\geqq 1$. Si $\beta \in \mathscr{C}^k_r(T^*)$ et si $r' \leqq r$, on notera systématiquement $|\beta|_{k,r'}$ la norme de la restriction de β à la boule $B(r')$ et on adopte la même convention avec les 1-formes vectorielles.

Soit P l'opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 envoyant la 1-forme vectorielle $\omega = \sum_{i,j} \omega^j_i dx^i \otimes \partial/\partial x^j$ sur la 1-forme scalaire

$$P(\omega) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \omega^i_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega^i_i}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, on peut définir intrinsèquement P de la manière suivante: si $\mathscr{T}\colon \Lambda^2 T^* \otimes T \to T^*$ est le morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\langle \xi, \mathscr{T}\omega \rangle = \mathrm{Trace}(\eta \mapsto \langle \xi \wedge \eta, \omega \rangle)$$

si $\omega \in \Lambda^2 T^* \otimes T$ et $\xi, \eta \in T$, alors P est la composition

$$\underline{T}^* \otimes \underline{T} \xrightarrow{d_\nabla} \Lambda^2 \underline{T}^* \otimes \underline{T} \xrightarrow{\mathscr{T}} \underline{T}^*,$$

où $\underline{T}$ et $\underline{T}^*$ désignent respectivement les faisceaux des germes de sections de T et T^*, et où d_∇ est défini par

$$d_\nabla \omega(\xi, \eta) = (\nabla \omega)(\eta, \xi) - (\nabla \omega)(\xi, \eta)$$

pour tous $\omega \in \underline{T}^* \otimes \underline{T}$ et $\xi, \eta \in \underline{T}$.

Enfin soit Q une forme quadratique à coefficients constants sur $T^* \otimes T$, à valeurs dans T^*. On entend par là que si $\omega = \sum_{i,j} \omega^j_i dx^i \otimes \partial/\partial x^j$ est une 1-forme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$Q(\omega) = \sum_{p,q,p',q',i} a^{p'q'}_{pq,i} \omega^q_p \omega^{q'}_{p'} dx^i,$$

où les $a^{p'q'}_{pq,i}$ sont des fonctions constantes. En fait, pour les résultats locaux que nous avons en vue, on peut supposer que les $a^{p'q'}_{pq,i}$ sont des fonctions analytiques réelles sur $\mathbb{R}^n$.

Si ω est une 1-forme vectorielle, on pose $F(\omega) = P(\omega) + Q(\omega)$.

Proposition 1.1. *Soit β une 1-forme différentielle analytique réelle sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une 1-forme vectorielle analytique réelle ω sur $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de x et telle que*

$$F(\omega) = \beta.$$

Avant de démontrer cette proposition, nous allons faire quelques rappels sur les opérateurs différentiels sous-déterminés en utilisant les notations et le formalisme de Goldschmidt [2]. Soient E et F des fibrés sur $\mathbb{R}^n$, s une section de F sur $\mathbb{R}^n$ et $\varphi: J_m(E) \to F$ un morphisme de fibrés sur $\mathbb{R}^n$, où $J_m(E)$ désigne le fibré sur $\mathbb{R}^n$ des m-jets de sections de E, si m est un entier $\geqq 0$; on suppose que tous les objets ci-dessus sont analytiques réels et qu'il existe $p \in J_m(E)$ de source $x \in \mathbb{R}^n$ et de but $a \in E$ tel que $\varphi(p) = s(x)$. Si $V(E)$ et $V(F)$ désignent les fibrés verticaux de E et F, et si $\varphi_*: S^m T^* \underset{J_m(E)}{\otimes} V(E) \to V(F)$ est le morphisme induit par la différentielle de φ (cf. [2]), alors on a le lemme suivant qui généralise légèrement un résultat de Quillen (cf. [6]):

Lemme 1.1. *S'il existe $\lambda \in T_x^*$ tel que l'application $\sigma(\lambda, \varphi_{*,p}): V_a(E) \to V_{s(x)}(F)$*

$$u \mapsto \varphi_{*,p}(\lambda^m \otimes u)$$

soit surjective, alors il existe une section analytique v de E, définie au voisinage de x, telle que $\varphi(j_m(v)) = s$ et que $j_m(v)(x) = p$.

Démonstration. La preuve de ce lemme résulte d'arguments très classiques dans la théorie formelle des équations différentielles. Indiquons brièvement comment l'on procède. D'après un argument de Quillen (cf. [6, p. 36]), l'application

$$\varphi_{*,p} \circ \Delta_{\ell,m}: S^{\ell+m} T_x^* \otimes V_a(E) \to S^\ell T_x^* \otimes V_{s(x)}(F),$$

où $\Delta_{\ell,m}: S^{\ell+m} T_x^* \to S^\ell T_x^* \otimes S^m T_x^*$ est l'application naturelle, est surjective pour tout $\ell \geqq 0$. A partir de là, on en déduit aisément que p est une solution formelle fortement prolongeable, au sens de Malgrange, de $R_m = \mathrm{Ker}_s \varphi$. Le lemme est alors une conséquence du théorème 4.2 de [5, Appendice].

Démonstration de la proposition 1.1. Posons $E = T^* \otimes T$ et considérons le morphisme $\varphi: J_1(E) \to T^*$ de fibrés sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\varphi(j_1(\omega)(x)) = (P(\omega) + Q(\omega) - \beta)(x),$$

si ω est une 1-forme vectorielle définie au voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$. Ici, on a identifié une 1-forme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ avec son graphe, section de E sur $\mathbb{R}^n$. Si $\Phi: T^* \otimes_E E \to T^*$ est le morphisme de fibrés vectoriels sur la projection de E sur $\mathbb{R}^n$, notée π, défini par

$$\Phi(C)(\xi) = \mathrm{Trace}(\eta \mapsto C(\eta, \xi) - C(\xi, \eta)),$$

pour $C \in T^* \otimes_E E$ et $\xi, \eta \in T$, il est clair que φ est un morphisme de fibrés affines sur π, dont le morphisme de fibrés vectoriels associés est Φ. Par ailleurs, on a

$$\Phi(dx^1 \otimes dx^j \otimes \partial/\partial x^1) = dx^j, \quad \text{si } j > 1,$$

et

$$\Phi(dx^1 \otimes dx^2 \otimes \partial/\partial x^2) = -dx^1.$$

donc l'application $C \mapsto \Phi(dx^1 \otimes C)$ de $T^* \otimes T$ dans T^* est surjective. En particulier, il existe une section L de $T^* \otimes_E E$, avec $L = \sum_j L^j \otimes \partial/\partial x^j$, telle que $\Phi(L) = \beta$. Une 1-forme vectorielle $\omega = \sum_{i,j} \omega_i^j \, dx^i \otimes \partial/\partial x^j$, nulle au point x et telle que

$$\frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(x) = L^j((\partial/\partial x^k)\,x,\ (\partial/\partial x^i)\,x)$$

vérifie alors $\varphi(j_1(\omega)(x)) = \beta(x)$. On est donc dans les conditions d'application du lemme 1.1, d'où la proposition.

Lemme 1.2. *Si $r \leqq 1$, il existe un opérateur linéaire*

$$K_r \colon \mathscr{C}_r^k(T^*) \to \mathscr{C}_r^k(T^* \otimes T)$$

tel que $P \circ K_r$ soit l'identité sur $\mathscr{C}_r^k(T^*)$ et que

$$|K_r(\beta)|_{k,r} \leqq |\beta|_{k,r} \tag{1.1}$$

pour tout $\beta \in \mathscr{C}_r^k(T^*)$.

Démonstration. Pour $\beta = \sum_i \beta_i \, dx^i \in \mathscr{C}_r^k(T^*)$, on définit

$$K_r(\beta) = \sum_{i,j} K_r(\beta)_i^j \, dx^i \otimes \partial/\partial x^j \in \mathscr{C}_r^k(T^* \otimes T)$$

comme suit: pour $(x^1, \dots, x^n) \in B(r)$, on pose

$$K_r(\beta)_j^1(x^1, \dots, x^n) = \int_0^{x^1} \beta_j(y, x^2, \dots, x^n)\, dy, \qquad \text{si } j > 1,$$

et

$$K_r(\beta)_1^2(x^1, \dots, x^n) = \int_0^{x^2} \beta_1(x^1, y, x^3, \dots, x^n)\, dy;$$

par ailleurs, on suppose que tous les autres $K_r(\beta)_i^j$ sont nuls. On vérifie alors facilement que K_r a les propriétés voulues.

Lemme 1.3. *Soit $\theta \in \mathscr{C}_\rho^k(T^* \otimes T)$, avec $\rho \leqq 1$. Il existe $r_0 = r_0(\theta) \leqq 1$, une constante positive $M = M(\theta)$ et un opérateur linéaire*

$$L_\theta \colon \mathscr{C}_{r_0}^k(T^*) \to \mathscr{C}_{r_0}^k(T^* \otimes T)$$

tels que $dF_\theta \circ L_\theta$ soit l'identité sur $\mathscr{C}_{r_0}^k(T^*)$ et que

$$|L_\theta \beta|_{k,r} \leqq M |\beta|_{k,r}, \tag{1.2}$$

si $r \leqq r_0$ et $\beta \in \mathscr{C}_{r_0}^k(T^*)$.

Démonstration. Ici dF_θ désigne l'opérateur linéarisé de F le long de θ. Si Φ est la forme polaire de $2Q$, on a donc

$$dF_\theta(\omega) = P(\omega) + \Phi(\theta, \omega),$$

pour tout $\omega \in \mathscr{C}_\rho^k(T^* \otimes T)$. Par ailleurs, il existe une constante C, ne dépendant que de k, n et Q, telle que

$$|\Phi(\theta, \omega)|_{k,r} \leqq C|\theta|_{k,r}|\omega|_{k,r} \tag{1.3}$$

pour tous r et $\omega \in \mathscr{C}_r^k(T^* \otimes T)$. Supposons, dans un premier temps, que $C|\theta|_{k,\rho} < 1$. Si $\beta \in \mathscr{C}_\rho^k(T^*)$, on construit une suite $\{\omega_\ell\}_{\ell \geqq 0}$ de $\mathscr{C}_\rho^k(T^* \otimes T)$, par récurrence de la manière suivante: on pose $\omega_0 = 0$ et

$$\omega_{\ell+1} = K_\rho(\beta - \Phi(\theta, \omega_\ell)), \qquad \text{pour } \ell \geqq 0.$$

On a

$$\omega_{\ell+1} - \omega_\ell = K_\rho(\Phi(\theta, \omega_{\ell-1} - \omega_\ell)),$$

donc, d'après (1.1) et (1.3), on obtient

$$|\omega_{\ell+1} - \omega_\ell|_{k,\rho} \leqq C|\theta|_{k,\rho}|\omega_\ell - \omega_{\ell-1}|_{k,\rho}.$$

Par conséquent, ω_ℓ converge dans $\mathscr{C}_\rho^k(T^* \otimes T)$ vers un élément que nous appellerons $L_\theta(\beta)$. D'après le lemme 1.2, on a

$$P(\omega_{\ell+1}) + \Phi(\theta, \omega_\ell) = \beta,$$

donc, en passant à la limite, on obtient

$$dF_\theta \circ L_\theta(\beta) = P(L_\theta(\beta)) + \Phi(\theta, L_\theta(\beta)) = \beta.$$

Par ailleurs, d'après (1.1), on a

$$|\omega_{\ell+1}|_{k,r} \leqq C|\theta|_{k,\rho}|\omega_\ell|_{k,r} + |\beta|_{k,r},$$

pour $l \geqq 0$, si $r \leqq \rho$, et comme $\omega_0 = 0$, on a

$$|L_\theta(\beta)|_{k,r} \leqq \frac{|\beta|_{k,r}}{1 - C|\theta|_{k,\rho}}.$$

Ainsi, dans cette situation, le lemme est démontré avec $r_0 = \rho$ et $M(\theta) = (1 - C|\theta|_{k,\rho})^{-1}$. Quand $C|\theta|_{k,\rho} \geqq 1$, on peut trouver $r_0 < \rho$, assez petit, tel que

$$C|\tilde{\theta}|_{k,1} < 1, \tag{1.4}$$

où $\tilde{\theta} \in \mathscr{C}_1^k(T^* \otimes T)$ est définie par

$$\tilde{\theta}(u) = r_0\, \theta(r_0 u),$$

pour tout $u \in B(1)$. A ce moment-là, on fait le changement de variable $x = r_0 u$ (i.e.: $x^i = r_0 u^i$, pour $i = 1, \ldots, n$). Si

$$\theta = \sum_{i,j} \theta_i^j\, dx^i \otimes \partial/\partial x^j \quad \text{et} \quad \Phi(\theta, \omega) = \sum_{p,q,p',q',i} b_{pq,i}^{p'q'}\, \theta_p^q\, \omega_{p'}^{q'}\, dx^i,$$

où $\omega=\sum_{i,j}\omega_i^j\,dx^i\otimes\partial/\partial x^j\in\mathscr{C}^k_{r_0}(T^*\otimes T)$, les conditions suivantes sont équivalentes pour $\beta=\sum_j\beta_j\,dx^j\in\mathscr{C}^k_{r_0}(T^*)$:

a) on a $dF_\theta(\omega)=\beta$ sur $B(r_0)$;

b) on a

$$\sum_i\left(\frac{\partial\omega_j^i}{\partial x^i}-\frac{\partial\omega_i^i}{\partial x^j}\right)(x)+\sum_{p,q,p',q'}b_{pq,j}^{p'q'}\,\theta_p^q(x)\,\omega_{p'}^{q'}(x)=\beta_j(x),$$

pour $x\in B(r_0)$ et $j=1,\ldots,n$;

c) on a

$$\sum_i\left(\frac{\partial\Omega_j^i}{\partial u^i}-\frac{\partial\Omega_i^i}{\partial u^j}\right)(u)+r_0\sum_{p,q,p',q'}b_{pq,j}^{p'q'}\,\theta_p^q(r_0u)\,\Omega_{p'}^{q'}(u)=r_0\,\beta_j(r_0u),$$

pour $u\in B(1)$ et $j=1,\ldots,n$, si l'on pose $\Omega_i^j(u)=\omega_i^j(r_0u)$.

Comme la constante C, intervenant dans (1.3), ne dépend pas du rayon r, on est ramené, grâce à (1.4), à la situation précédente sur la boule unité, ce qui nous donne le lemme sur la boule de rayon r_0.

Proposition 1.2. *Soit β une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une 1-forme vectorielle ω de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de l'origine, telle que*

$$F(\omega)=\beta.$$

Démonstration. Appelons β_0 la série de Taylor d'ordre k de β à l'origine. On pose $\varepsilon(r)=|\beta-\beta_0|_{k,r}$. La proposition 1.1 nous fournit un germe analytique en 0 ce 1-forme vectorielle θ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $F(\theta)=\beta_0$. En considérant θ comme un élément de $\mathscr{C}^k_\rho(T^*\otimes T)$, pour un certain $\rho>0$, nous pouvons appliquer le lemme 1.3 et construire une suite $\{\omega_\ell\}_{\ell\geqq 0}$ de $\mathscr{C}^k_{r_0}(T^*\otimes T)$ comme suit: on part de $\omega_0=0$ et on pose

$$\omega_{\ell+1}=L_\theta(\beta-\beta_0-Q(\omega_\ell)) \tag{1.5}$$

pour $\ell\geqq 0$. Il existe deux constantes positives C_1 et C_2, ne dépendant que de Q et k, telles que

$$|Q(\omega)|_{k,r}\leqq C_1|\omega|_{k,r}^2 \tag{1.6}$$

et que

$$|Q(\omega)-Q(\omega')|_{k,r}\leqq C_2|\omega-\omega'|_{k,r}|\omega+\omega'|_{k,r} \tag{1.7}$$

pour tous $r>0$ et $\omega,\omega'\in\mathscr{C}^k_r(T^*\otimes T)$. On a, d'après (1.2) et (1.6)

$$|\omega_{\ell+1}|_{k,r}\leqq M(\varepsilon(r)+C_1|\omega_\ell|_{k,r}^2)$$

pour $\ell\geqq 0$ et $r\leqq r_0$. Avec nos hypothèses, $\varepsilon(r)$ tend vers 0 avec r, donc si r est assez petit, on a

$$\varepsilon(r)\leqq\frac{1}{4C_1M^2}.$$

On vérifie alors aisément, par récurrence, qu'on a

$$|\omega_\ell|_{k,r} \leqq 2M\varepsilon(r),$$

pour tout $\ell \geqq 0$. On a

$$\omega_{\ell+2} - \omega_{\ell+1} = L_\theta(Q(\omega_\ell) - Q(\omega_{\ell+1})),$$

donc, d'après (1.2) et (1.7), on a

$$|\omega_{\ell+2} - \omega_{\ell+1}|_{k,r} \leqq M C_2 |\omega_{\ell+1} - \omega_\ell|_{k,r} |\omega_{\ell+1} + \omega_\ell|_{k,r}.$$

Maintenant, si r est choisi encore plus petit, de sorte que

$$\varepsilon(r) \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{4C_1M^2}, \frac{1}{8C_2M^2}\right),$$

on a

$$|\omega_{\ell+1} + \omega_\ell|_{k,r} \leqq |\omega_{\ell+1}|_{k,r} + |\omega_\ell|_{k,r} \leqq 4M\varepsilon(r) \leqq \frac{1}{2MC_2},$$

et finalement on obtient

$$|\omega_{\ell+2} - \omega_{\ell+1}|_{k,r} \leqq \tfrac{1}{2} |\omega_{\ell+1} - \omega_\ell|_{k,r}.$$

Ainsi $\{\omega_\ell|_{B(r)}\}$ converge vers un élément ω' dans $\mathscr{C}_r^k(T^* \otimes T)$. On déduit alors de (1.5) et du lemme 1.3 que

$$dF_\theta(\omega') = \beta - \beta_0 - Q(\omega')$$

sur $B(r)$. Dans l'égalité ci-dessus, on a noté θ pour $\theta|_{B(r)}, \ldots$ etc. Comme

$$\begin{aligned} F(\theta + \omega') &= P(\omega') + P(\theta) + Q(\omega') + Q(\theta) + \Phi(\theta, \omega') \\ &= \beta_0 + Q(\omega') + dF_\theta(\omega'), \end{aligned}$$

on voit que

$$F(\theta + \omega') = \beta.$$

Remarque. On aurait pu supposer, dans l'énoncé de la proposition 1.2, que β est de classe $\mathscr{C}^{k+\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$, c'est-à-dire que $\beta = \sum_j \beta_j dx^j$, où les β_j sont de classe $\mathscr{C}^k$, les dérivées d'ordre k vérifiant une condition de Hölder d'ordre α: en effet, sous ces hypothèses, on a toujours $\underset{r \to 0}{\varepsilon(r) \to 0}$. On pourrait même, en travaillant au départ avec ces classes de fonctions, obtenir une solution $\mathscr{C}^{k+\alpha}$ de notre problème, si β est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Bien entendu, les résultats de la proposition 1.2 se généralisent à des systèmes. Si $Q_1, \ldots, Q_m$ sont m formes quadratiques, à coefficients constants, sur la somme directe de m exemplaires de $T^* \otimes T$, à valeurs dans T^*, et si $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des 1-formes différentielles de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}^n$, on peut trouver localement des 1-formes vectorielles $\omega_1, \ldots, \omega_m$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$P(\omega_\nu) + Q_\nu(\omega_1, \ldots, \omega_m) = \beta_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, m. \tag{1.8}$$

Donnons un exemple, en géométrie différentielle, où l'on rencontre ce genre de systèmes. Soit ∇ une connexion linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Sa courbure de Ricci est le tenseur de type $(0,2)$ sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\Omega(\xi,\eta)=\mathrm{Trace}(\zeta\mapsto R(\zeta,\xi)\eta),$$

où R est le tenseur de courbure de ∇ et où ξ, η, $\zeta\in T$. En coordonnées locales, si

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\partial/\partial x^j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\,\partial/\partial x^k,$$

on a

$$\Omega(\partial/\partial x^j,\partial/\partial x^k)=\sum_i\left\{\frac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^i}{\partial x^j}+\sum_m(\Gamma_{jk}^m\,\Gamma_{im}^i-\Gamma_{ik}^m\,\Gamma_{jm}^i)\right\}.$$

Par conséquent, si l'on veut trouver des connexions linéaires à courbure de Ricci donnée, on est ramené à résoudre un système du type (1.8). On a donc le

Théorème. *Soit Ω une section de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ de $\otimes^2T^*$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $k\geqq 1$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe une connexion linéaire de classe $\mathscr{C}^k$, ou $\mathscr{C}^{k+\alpha}$, avec $0<\alpha<1$, sur $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de x, dont la courbure de Ricci est égale à Ω.*

Ce théorème étend au cas différentiable le théorème 2 de [1]. Par les mêmes méthodes, on peut aussi étendre le théorème 1 de [1] au cas différentiable.

2. Le cas $\mathscr{C}^\infty$

Le but de ce paragraphe est de montrer la

Proposition 2.1. *Si β est un germe de classe $\mathscr{C}^p$, avec p non entier et >2 (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe un germe de classe $\mathscr{C}^p$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de 1-forme vectorielle ω sur $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$F(\omega)=\beta.$$

Considérons une boule fermée B sur $\mathbb{R}^n$, centrée en 0, de rayon $\rho<1$. Pour $r>0$, appelons M_r le domaine de $\mathbb{C}^n$ formé des $z=x+iy$ de $\mathbb{C}^n$ tels que $|x|<\rho+r$ et $|y|<r$; on choisira toujours r assez petit pour que $\rho+r\leqq 1$. On note $A(r)$ *l'espace des 1-formes vectorielles holomorphes* $\omega=\sum_{a,b}\omega_a^b\,dz^a\otimes\frac{\partial}{\partial z^b}$ *sur M_r telles que*

$$|\omega|_r=\sup_{\substack{1\leqq a,b\leqq n\\ z\in M_r}}|\omega_a^b(z)|<+\infty.$$

Parallèlement, on désignera par $B(r)$ *l'espace des 1-formes différentielles holomorphes* $\beta=\sum_j\beta_j\,dz^j$ *sur M_r* telles que

$$|\beta|_r=\sup_{\substack{1\leqq j\leqq n\\ z\in M_r}}|\beta_j(z)|<+\infty.$$

Quand il n'y a pas risque de confusion, on notera par la même lettre un élément de $A(r)$ (ou $B(r)$) et sa restriction à $M_{r'}$, lorsque $r'<r$. On notera encore P et F les opérateurs sur $A(r)$, induits naturellement par les opérateurs P et F du paragraphe 1.

Il existe une constante positive C, ne dépendant que de Q, telle que

$$|\Phi(\omega, \omega')|_r \leqq C|\omega|_r |\omega'|_r$$

pour tous $r>0$ et $\omega, \omega' \in A(r)$.

Lemme 2.1. *Soient $r_0>0$ et $\theta \in A(r_0)$ tels que $C|\theta|_{r_0} \leqq \frac{3}{4}$. Il existe un opérateur linéaire $L_\theta\colon B(r_0) \to A(r_0)$ tel que $dF_\theta \circ L_\theta$ soit l'identité $B(r_0)$ et que*

$$|L_\theta \beta|_r \leqq 4|\beta|_r$$

si $r \leqq r_0$ et $\beta \in B(r_0)$.

Démonstration. La construction du lemme 1.2 nous fournit un opérateur linéaire $K_{r_0}\colon B(r_0) \to A(r_0)$ tel que $P \circ K_{r_0}$ soit l'identité sur $B(r_0)$ et que

$$|K_{r_0} \beta|_r \leqq |\beta|_r,$$

si $r \leqq r_0$ et $\beta \in B(r_0)$. On procède alors comme dans le lemme 1.3. Si $\beta \in B(r_0)$, $L_\theta \beta$ est bien défini comme limite de la suite $\{\omega_\ell\}_{\ell \geqq 0}$ de $A(r_0)$ construite ainsi: on part de $\omega_0 = 0$ et on pose

$$\omega_{\ell+1} = K_{r_0}(\beta - \Phi(\theta, \omega_\ell)),$$

pour $\ell \geqq 0$.

A partir de là, la proposition 2.1 est une conséquence directe d'un théorème des fonctions implicites de Jacobowitz (cf. [3, Th. 2]). Comme le problème non-linéaire que nous considérons est particulièrement simple, nous allons rapidement redonner, pour la commodité du lecteur, une démonstration de notre résultat en suivant la démarche de Jacobowitz.

Il existe deux constantes positives C_1 et C_2, ne dépendant que de Q, telles que

$$|Q(\omega)|_r \leqq C_1 |\omega|_r^2$$

et que

$$|Q(\omega) - Q(\omega')|_r \leqq C_2 |\omega - \omega'|_r |\omega + \omega'|_r$$

pour tous $r>0$ et $\omega, \omega' \in A(r)$. On a alors le

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du lemme 2.1, supposons que $F(\theta) = \psi \in B(r_0)$. Si $\beta \in B(r)$, avec $r \leqq r_0$, vérifie $|\psi - \beta|_r \leqq v$, où*

$$v = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{64\, C_1}, \frac{1}{128\, C_2}\right),$$

alors il existe $\omega \in A(r)$ *tel que*

$$F(\omega)=\beta$$

et que

$$|\omega-\theta|_r \leqq 8|\beta-\psi|_r. \tag{2.1}$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 1.2. La 1-forme vectorielle ω que l'on cherche sera bien définie comme somme de θ et de la limite de la suite $\{\omega_\ell\}_{\ell \geqq 0}$ de $A(r)$ donnée par $\omega_0=0$ et

$$\omega_{\ell+1}=L_\theta(\beta-\psi-Q(\omega_\ell)),$$

pour $\ell \geqq 0$. L'inégalité (2.1) s'obtient alors en remarquant que

$$\omega-\theta=\sum_{\ell=0}^{+\infty} \omega_{\ell+1}-\omega_\ell,$$

d'où

$$|\omega-\theta|_r \leqq \sum_{\ell=0}^{+\infty} |\omega_{\ell+1}-\omega_\ell|_r \leqq |\omega_1|_r \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{2^\ell} \leqq 8|\psi-\beta|_r.$$

On note, pour k entier $\geqq 0$ et $s \in]0,1[$, $\mathscr{C}^{k+s}(B)$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur B, à valeurs réelles, dont les dérivées partielles d'ordre k vérifient une condition de Hölder d'exposant s. On munit cet espace de sa norme habituelle

$$|f|_{k+s,\rho}=|f|_{k,\rho}+\sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in B\\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^s}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_\rho^{k+s}(T^*)$ (resp. $\mathscr{C}_\rho^{k+s}(T^* \otimes T)$ l'espace des 1-formes scalaires (resp. vectorielles) sur B, à coefficients dans $\mathscr{C}^{k+s}(B)$. On munit alors ces espaces des normes

$$|\beta|_{k+s,\rho}=\sup_{1 \leqq i \leqq n} |\beta_i|_{k+s,\rho} \quad \text{et} \quad |\omega|_{k+s,\rho}=\sup_{1 \leqq i,j \leqq n} |\omega_i^j|_{k+s,\rho}$$

si $\beta=\sum_i \beta_i\, dx^i \in C_\rho^{k+s}(T^*)$ et $\omega=\sum_{i,j} \omega_i^j\, dx^i \otimes \partial/\partial x^j \in C_\rho^{k+s}(T^* \otimes T)$.

Nous avons besoin du théorème d'approximation suivant:

Théorème (Jacobowitz [3]). *Soient* $r>0$ *et* $h \in \mathscr{C}^0(B)$. *On peut trouver une suite de fonctions* h_i, *avec* h_i *holomorphe sur* $M_{r/2^i}$ *et* $\sup_{z \in M_{r/2^i}} |h_i(z)|<+\infty$, *telle que* $h_0=0$ *et* $h_i \to h$ *dans* $\mathscr{C}^0(B)$, *et possédant la propriété suivante: si* h *est aussi un élément de* $\mathscr{C}^q(B)$, *pour un certain* $q \geqq 0$, *alors on a*

$$|h_i-h_{i-1}|_{r/2^i} \leqq \frac{\tilde{C}|h|_{q,\rho}}{2^{iq}},$$

où $\tilde{C}$ est une constante dépendant de q. Réciproquement si q est non entier et si $\{h_i\}$ est une suite de fonctions satisfaisant:

a) *h_i holomorphe sur $M_{r/2^i}$ et $\sup_{z\in M_{r/2^i}} |h_i(z)| < +\infty$, et*

b) $|h_i - h_{i-1}|_{r/2^i} \leqq \frac{K}{2^{iq}}$,

alors il existe $h \in \mathscr{C}^q(B)$ telle que $h_i \to h$ dans $\mathscr{C}^{q-\varepsilon}(B)$, pour ε assez petit.

Soient $r_0 > 0$ et $\theta \in A(r_0)$ tels que $C|\theta|_{r_0} \leqq \frac{1}{2}$. On suppose que $F(\theta) = \psi \in B(r_0)$. Soit $\beta \in \mathscr{C}^q_\rho(T^*)$, avec $q > 2$ et non entier: le théorème précédent nous donne une suite $\{\tilde{\beta}_i\}$, avec $\tilde{\beta}_i \in B(r_0/2^i)$, qui approche $\beta - \psi$, telle que $\tilde{\beta}_0 = 0$ et que

$$|\tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_{i-1}|_{r_0/2^i} \leqq \frac{\tilde{C}}{2^{iq}} |\beta - \psi|_{q,\rho}, \tag{2.2}$$

pour $i \geqq 1$, où $\tilde{C}$ est une constante dépendant de q. On pose $\beta_i = \tilde{\beta}_i + \psi$. Supposons que

$$|\beta - \psi|_{q,\rho} \leqq \frac{1}{128\,\tilde{C}} \operatorname{Min}(\nu, 1/C): \tag{2.3}$$

comme $|\beta_i - \beta_{i-1}|_{r_0/2^i}$ est majoré par le second membre de l'inégalité (2.2), on obtient

$$|\beta_i - \beta_{i-1}|_{r_0/2^i} \leqq \nu, \quad \text{pour } i \geqq 1. \tag{2.4}$$

Montrons qu'on peut fabriquer une suite $\{\theta_i\}$, avec $\theta_i \in A(r_0/2^i)$, telle que $F(\theta_i) = \beta_i$,

$$C|\theta_i|_{r_0/2^i} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2^q} + \dots + \frac{1}{2^{iq}}\right), \tag{2.5}$$

et que

$$|\theta_i - \theta_{i-1}|_{r_0/2^i} \leqq 8|\beta_i - \beta_{i-1}|_{r_0/2^i}. \tag{2.6}$$

On procède par récurrence sur i. Le résultat est vrai pour $i = 0$, en prenant $\theta_0 = \theta$. Supposons-le établi pour $i \geqq 0$. La majoration (2.5) entraine

$$C|\theta_i|_{r_0/2^i} \leqq \tfrac{3}{4},$$

donc, d'après (2.4), le lemme 2.2 s'applique et il existe $\theta_{i+1} \in A(r_0/2^i)$ tel que $F(\theta_{i+1}) = \beta_{i+1}$ et que

$$|\theta_{i+1} - \theta_i|_{r_0/2^{i+1}} \leqq 8|\beta_{i+1} - \beta_i|_{r_0/2^{i+1}}.$$

On a donc, d'après (2.3),

$$|\theta_{i+1} - \theta_i|_{r_0/2^{i+1}} \leqq \frac{8\,\tilde{C}}{2^{(i+1)q}} |\beta - \psi|_{q,\rho} \leqq \frac{1}{16\,C\,2^{(i+1)q}}, \tag{2.7}$$

d'où

$$C|\theta_{i+1}|_{r_0/2^{i+1}} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2^q} + \dots + \frac{1}{2^{(i+1)q}}\right)$$

et la récurrence peut se poursuivre. D'après (2.7) et le théorème d'approximation, il existe $\omega \in \mathscr{C}^q_\rho(T^* \otimes T)$ tel que $\theta_i \to \omega$ dans $\mathscr{C}^{q-\varepsilon}_\rho(T^* \otimes T)$, pour ε assez petit. On a alors $F(\omega) = \beta$ dans B. Maintenant, si $\beta \in \mathscr{C}^{q'}_\rho(T^*)$, avec q' non entier et $> q$, on a

$$|\beta_i - \beta_{i-1}|_{r_0/2^i} \leqq \frac{C'}{2^{iq'}},$$

où C' dépend seulement de q'; donc, d'après (2.6), on a

$$|\theta_i - \theta_{i-1}|_{r_0/2^i} \leqq \frac{8C'}{2^{iq'}}.$$

Il s'ensuit que $\omega \in \mathscr{C}^{q'}_\rho(T^* \otimes T)$. En particulier, ω est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si β est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

La preuve de la proposition 2.1 se termine de la manière suivante. Soit β une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathbb{R}^n$, avec $2 < m < 3$. Appelons ψ le polynôme de Taylor d'ordre 2 de β à l'origine et choisissons un nombre réel q dans l'intervalle $]2, m[$: si ρ est assez petit, $|\beta - \psi|_{q,\rho}$ est majoré par le membre de droite de (2.3). D'après la proposition 1.1, il existe une 1-forme vectorielle analytique θ, définie sur une boule $B(\rho_0)$, telle que $F(\theta) = \psi$. On peut avoir de plus $\theta(0) = 0$, donc il existe $\rho \leqq \rho_0$ et r_0, assez petits, et des extensions à M_{r_0} de θ et ψ, notées par les mêmes lettres, telles que $\theta \in A(r_0)$ et $C|\theta|_{r_0} \leqq \frac{1}{2}$. Ainsi on peut appliquer les constructions précédentes, d'où la proposition.

On voit facilement que les méthodes utilisées pour prouver la proposition 2.1 permettent aussi de résoudre les systèmes du type (1.8). Il s'ensuit, avec les remarques de la fin du paragraphe précédent, que tout germe de classe $\mathscr{C}^q$, avec q non entier et > 2, (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de section de $\otimes^2 T^*$ est la courbure de Ricci d'une connexion linéaire de classe $\mathscr{C}^q$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^n$.

On aurait pu, dans ce paragraphe, travailler aussi avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^q$, pour q entier. A ce moment-là, dans le théorème d'approximation, la convergence se fait dans un espace $\hat{\mathscr{C}}^q(B)$, plus général que $\mathscr{C}^q(B)$ (cf. [3, § 5]) et de toutes façons on retrouve alors les résultats du paragraphe précédent.

Si β est une 1-forme polynômiale, il est facile de vérifier que l'équation $F(\theta) = \beta$ admet des solutions polynômiales. A partir de là, et en raffinant un peu nos majorations, on pourrait obtenir des résultats globaux dans une boule donnée de $\mathbb{R}^n$.

References

1. Gasqui, J.: Sur la courbure de Ricci d'une connexion linéaire. C.R.Acad. Sci. Paris Sér. A **281**, 389–391 (1975)

2. Goldschmidt, H.: Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations. J. Differential Geometry **1**, 269–307 (1967)
3. Jacobowitz, H.: Implicit function theorems and isometric embeddings. Ann. of Math. **95**, 191–225 (1972)
4. Jacobowitz, H.: The Poincaré Lemma for $d\omega = F(x, \omega)$. (à paraitre)
5. Malgrange, B.: Equations de Lie II. J. Differential Geometry **7**, 117–141 (1972)
6. Quillen, D.G.: Formal properties of overdetermined systems of linear partial differential equations. Ph. D. Thesis, Harvard University, 1964

Reçu le 20 novembre 1978