Math. Z. 140, 127–149 (1974)

Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren

Jens C. Jantzen

Einleitung

Ist G_k eine universelle Chevalley-Gruppe über einem unendlichen Körper k der Charakteristik $p \neq 0$, so gibt es zu jedem dominanten Gewicht λ des zugehörigen Wurzelsystems eine irreduzible, algebraische Darstellung von G_k zum höchsten Gewicht λ. Deren (formaler) Charakter $\chi_k(\lambda)$ ist von der Form $\chi_k(\lambda) = \sum_{\lambda'} a(\lambda', \lambda)\chi(\lambda')$ mit λ' dominant und $a(\lambda', \lambda) \in \mathbb{Z}$, wobei $\chi(\lambda')$ der Charakter der irreduziblen Darstellung von $G_{\mathbb{C}}$ zum höchsten Gewicht λ' ist. Nach Humphreys ([7]) gibt es eine (affine) Spiegelungsgruppe W_k, so daß $a(\lambda', \lambda) \neq 0$ nur für $\lambda' \in W_k \cdot (\lambda)$ möglich ist. Dies wurde allerdings nur bewiesen, wenn p größer als die Coxeter-Zahl des Wurzelsystems ist, was wir von nun an annehmen wollen. (Dank der Arbeit [4] ist diese Voraussetzung bei einem Teil der Ergebnisse überflüssig, wenn der Typ A_n ist.) Schreiben wir $a(w, \lambda)$ statt $a(w.(\lambda), \lambda)$ für $w \in W_k$. Die Spiegelungsgruppe W_k definiert Kammern. Sind λ und λ' dominante Gewichte, die im Innern derselben Kammer C liegen, so zeigen wir in Theorem 1, daß $a(w, \lambda) = a(w, \lambda')$ ist. Schreiben wir dann $a(w, C)$ statt $a(w, \lambda)$. Wir können $\bar{C}$ in zwei disjunkte Teilmengen $\bar{C}_a$ und $\bar{C}_b$ zerlegen und für ein dominantes Gewicht $\lambda \in \bar{C}$ die (endliche) Summe $\sum_{w \in W_k} a(w, C)\chi(w.(\lambda))$ bilden. Dann zeigen wir, daß diese Summe $\chi_k(\lambda)$ für $\lambda \in \bar{C}_a$ (Theorem 1) und gleich Null für $\lambda \in \bar{C}_b$ (Theorem 2) ist. Für jedes dominante λ gibt es genau eine Kammer C mit $\lambda \in \bar{C}_a$. Daher sagt Theorem 1: Kennen wir $\chi_k(\lambda)$ für je ein dominantes Gewicht λ im Innern jeder Kammer, in der überhaupt ein dominantes Gewicht liegt, so kennen wir alle $\chi_k(\lambda)$. Theorem 2 liefert uns Beziehungen zwischen verschiedenen $a(w, C)$ für festes C.

Ganz ähnliche Aussagen gelten für $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, die Lie-Algebra von $G_{\mathbb{C}}$, und deren irreduziblen Darstellungen, die von höchsten Gewichtsvektoren erzeugt werden. Man ersetzt oben $\chi(\lambda')$ durch den Charakter der „größten" Darstellung zum höchsten Gewicht λ' und W_k durch eine Untergruppe der Weylgruppe. Diese verschiedenen Ergebnisse werden einheitlich dargestellt. Dazu betrachten wir statt $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ deren einhüllende Algebra U und ersetzen G_k durch $U_k = U_{\mathbb{Z}} \otimes k$, wobei $U_{\mathbb{Z}}$ die Kostantsche $\mathbb{Z}$-Form von U ist. Die betrachteten endlichdimensionalen U_k-Moduln sind auch G_k-Moduln; sie sind genau dann für G_k einfach, wenn sie es für U_k sind.

§ 1. Präliminarien

Es seien $\mathfrak{g}$ eine einfache komplexe Lie-Algebra, $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, R das zugehörige Wurzelsystem, $Q(R)$ die von R erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{h}^*$, $P(R)$ die Gruppe der ganzzahligen Gewichte in $\mathfrak{h}^*$, B eine Basis des Wurzelsystems, R^+ die Menge der positiven Wurzeln und $P(R)^+$ die Menge der dominanten Gewichte relativ B. Sei ρ die halbe Summe der positiven Wurzeln und P die Partitionsfunktion relativ R^+ (s. [6], S. 219).

Sei $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$, $(H_\alpha)_{\alpha\in B}$ eine Chevalley-Basis von $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ der von dieser Basis erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathfrak{g}$ und sei $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ der $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathfrak{h}$ mit Basis $(H_\alpha)_{\alpha\in B}$. Für einen beliebigen Körper setzen wir dann $\mathfrak{g}_k=\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}\otimes k$ und $\mathfrak{h}_k=\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}\otimes k$. In der einhüllenden assoziativen Algebra $U(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ sei $U_{\mathbb{Z}}$ die von allen $X_{\alpha,n}=X_\alpha^n/(n!)$ mit $\alpha\in R$ und $n\in\mathbb{N}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Unteralgebra. Die Unteralgebren, die wir erhalten, wenn wir nur die $\alpha\in R^+$ bzw. $\alpha\in -R^+$ nehmen, mögen $U_{\mathbb{Z}}^+$ bzw. $U_{\mathbb{Z}}^-$ heißen. Ferner sei $U_{\mathbb{Z}}^0$ der Durchschnitt von $U_{\mathbb{Z}}$ mit der in $U(\mathfrak{g})$ eingebetteten einhüllenden Algebra von $\mathfrak{h}$. Ist k ein beliebiger Körper, so seien $U_k=U_{\mathbb{Z}}\otimes k$, $U_k^0=U_{\mathbb{Z}}^0\otimes k$, $U_k^+=U_{\mathbb{Z}}^+\otimes k$, $U_k^-=U_{\mathbb{Z}}^-\otimes k$.

Sei von nun an k ein festgewählter Körper. Unter *Gewichten* wollen wir im folgenden verstehen:

$$\begin{aligned} &\text{Elemente von } \mathfrak{h}_k^*, && \text{wenn } \mathrm{Char}(k)=0,\\ &\text{Elemente von } P(R), && \text{wenn } \mathrm{Char}(k)\neq 0. \end{aligned}$$

In jedem Fall induziert ein Gewicht einen Homomorphismus von U_k^0 in k, durch den es eindeutig bestimmt ist und mit dem es identifiziert wird. Sind λ,μ zwei Gewichte, so schreiben wir $\lambda\leqq\mu$, wenn es natürliche Zahlen $(n_\alpha)_{\alpha\in B}$ mit $\mu-\lambda=\sum_{\alpha\in B}n_\alpha\alpha$ gibt. Ist α eine Wurzel, so sei $\alpha^\vee$ die duale Wurzel; für ein $n\in\mathbb{Z}$ sei dann $s_{\alpha,n}$ die Spiegelung $s_{\alpha,n}(x)=x-(\langle x,\alpha^\vee\rangle-n)\alpha$ an der Hyperebene $\langle x,\alpha^\vee\rangle=n$. Wir denken uns $s_{\alpha,n}$ und die übrigen, gleich zu definierenden Abbildungen auf $\mathfrak{h}_k^*$ für $\mathrm{Char}(k)=0$ und auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$ operierend. Sei W die Weylgruppe; für ihre Erzeugenden $s_{\alpha,0}$ werde kurz s_α $(\alpha\in R)$ geschrieben. Ist $\gamma\in P(R)$, so sei $T(\gamma)$ die Translation um γ. Mit W_k werde die von W und allen $T(\mathrm{Char}(k)\gamma)$ mit $\gamma\in Q(R)$ erzeugte Gruppe bezeichnet. Für $w\in W_k$ sei $w.(x)=w(x+\rho)-\rho$; wenn im folgenden nichts ausdrücklich gesagt wird, soll W_k immer so, um ρ verschoben, operieren.

Wir wollen uns $P(R)$ in $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ eingebettet denken und $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ mit einer unter W invarianten, positiv definiten symmetrischen Bilinearform versehen. Ist $\mathrm{Char}(k)=0$, so wollen wir k als $\mathbb{Q}$-Vektorraum in $k=\mathbb{Q}\oplus k'$ zerlegen und erhalten dann $\mathfrak{h}_k^*=\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*\oplus k'\,\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. Für $\lambda\in\mathfrak{h}_k^*$ seien dann $\Re\lambda$ und $\Im\lambda$ die Projektionen von λ für diese Zerlegung. Für alle $w\in W$ ist dann $\Re(w(\lambda))=w(\Re\lambda)$ und $w(\Im\lambda)=\Im(w(\lambda))$ sowie $\Re(w.(\lambda))=w.(\Re\lambda)$ und $\Im(w.(\lambda))=w(\Im\lambda)$. Es sei dann

$$W_k^{(\lambda)}=\{w\in W_k|w(\lambda)-\lambda\in Q(R)\}=\{w\in W_k|w.(\lambda)-\lambda\in Q(R)\}.$$

Es ist dann $W_k^{(\lambda)}$ der Durchschnitt von $W_k^{(\Re\lambda)}$ mit dem Stabilisator von $\Im\lambda$ in W_k. Ist $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, so definieren wir $W_k^{(\lambda)}$ für Gewichte λ wie eben; wegen $\lambda\in P(R)$ ist dann natürlich $W_k^{(\lambda)}=W_k$. Außerdem setzen wir $\Re\lambda=\lambda$ und $\Im\lambda=0$. In jedem Fall wird $W_k^{(\lambda)}$ von den $s_{\alpha,r\cdot\mathrm{Char}(k)}$ mit $r\in\mathbb{Z}$ und $\alpha\in R^{(\lambda)}=\{\alpha\in R|\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\}$ erzeugt (s. [2], Chap. VI, § 2, exerc. 1).

Ist V ein U_k-Modul und λ ein Gewicht, so heißt $V^\lambda=\{v\in V|h\,v=\lambda(h)\,v$ für alle $h\in U_k^0\}$ der Gewichtsraum von V zum Gewicht λ. Ist $V^\lambda\neq\{0\}$, so heißt λ ein Gewicht von V. Ein Element $v\in V$ heißt primitiv vom Gewicht λ, wenn $v\in V^\lambda$ ist und wenn $X_{\alpha,n}v=0$ für alle $\alpha\in R^+$ und $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ ist. Es heißt V ein Modul zum höchsten Gewicht λ, wenn V ungleich Null ist und wenn V von einem primitiven Element v vom Gewicht λ erzeugt wird. Es muß dann natürlich $V=U_k^- v$ sein, und V ist direkte Summe seiner Gewichtsräume; ist μ ein Gewicht von V, so ist $\mu \leqq \lambda$; alle V^μ sind endlichdimensional, und es ist $\dim(V^\lambda)=1$.

Es gibt einen Antiautomorphismus σ von $\mathfrak{g}$, der X_α auf $X_{-\alpha}$ für alle $\alpha\in R$ und H auf H für alle $H\in\mathfrak{h}$ abbildet. Dann induziert σ Antiautomorphismen von $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{g}_k$, $U_{\mathbb{Z}}$ und U_k, die ebenfalls mit σ bezeichnet werden. Ist V ein U_k-Modul und $(\,,\,)$ eine symmetrische Bilinearform auf V, so heiße $(\,,\,)$ kontravariant, wenn für alle $v_1, v_2\in V$ und $u\in U_k$ gilt: $(u\,v_1, v_2)=(v_1, \sigma(u)\,v_2)$. Für kontravariante Formen sind stets Gewichtsräume zu verschiedenen Gewichten orthogonal.

Ist V ein Modul zum höchsten Gewicht λ und v ein primitives Erzeugendes von V, so gibt es genau eine kontravariante Form $(\,,\,)$ auf V mit $(v,v)=1$. Es ist dann das Radikal von $(\,,\,)$ der größte U_k-Untermodul von V. Der Restklassenmodul von V nach diesem Radikal ist ein irreduzibler Modul zum höchsten Gewicht λ. Je zwei irreduzible Moduln zum höchsten Gewicht λ sind isomorph; sie werden mit $L_k(\lambda)$ bezeichnet.

§ 2. Charaktere

Sei A die Menge aller Abbildungen von der Gruppe der Gewichte in $\mathbb{Z}$. Ist λ ein Gewicht, so sei $e(\lambda)\in A$ die Abbildung mit $e(\lambda)(\lambda)=1$ und $e(\lambda)(\mu)=0$ für $\mu\neq\lambda$. Ist $f\in A$, so schreiben wir $f=\sum_\lambda f(\lambda)\,e(\lambda)$. Mit A_0 werde die Menge der $f\in A$ bezeichnet, für die es endlich viele Gewichte $\mu_1,\dots,\mu_n$ gibt, so daß $f(\lambda)\neq 0$ impliziert, daß es ein i mit $\lambda\leqq\mu_i$ gibt. A_0 ist auf natürliche Weise Erweiterungsring des Gruppenrings der Gruppe der Gewichte.

Ist V ein U_k-Modul, der direkte Summe seiner Gewichtsräume ist, die alle endlichdimensional sind, so sei $\mathrm{ch}(V)=\sum_\lambda \dim(V^\lambda)\,e(\lambda)$. Dann ist $\mathrm{ch}(V)$ ein Element von A; ist V ein Modul zu einem höchsten Gewicht, so ist $\mathrm{ch}(V)$ ein Element von A_0. Wir setzen $\chi_k(\lambda)=\mathrm{ch}(L_k(\lambda))$.

Ist $\lambda\in P(R)^+$ und v ein erzeugendes primitives Element von $L_{\mathbb{C}}(\lambda)$, so setzen wir $V(\lambda)_{\mathbb{Z}}=U_{\mathbb{Z}}\,v=U_{\mathbb{Z}}^-\,v$ und $V(\lambda)_k=V(\lambda)_{\mathbb{Z}}\otimes k$ sowie $\chi(\lambda)=\mathrm{ch}(V(\lambda)_k)$. Ist $w\in W$ und $\lambda\in P(R)^+$, so setzen wir $\chi(w.(\lambda))=\det(w)\,\chi(\lambda)$; ist $\lambda\in P(R)$ und gibt es $w\in W$ mit $w.(\lambda)=\lambda$ und $w\neq 1$, so setzen wir $\chi(\lambda)=0$; dadurch ist $\chi(\lambda)$ für alle $\lambda\in P(R)$ definiert.

Für ein Gewicht λ sei $M_k(\lambda)$ der Restklassenmodul von U_k nach dem von allen $X_{\alpha,n}$ mit $\alpha\in R^+$ und $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ und allen $h-\lambda(h)1$ mit $h\in U_k^0$ erzeugten Linksideal. Dann ist $M_k(\lambda)$ ein Modul zum höchsten Gewicht λ, der sich auf alle Moduln zum höchsten Gewicht λ abbilden läßt. Es ist $\mathrm{ch}(M_k(\lambda))=\sum_\mu P(\lambda-\mu)\,e(\mu)$.

Ist $\mathrm{Char}(k)=0$ und λ ein Gewicht, so sei $\chi_k'(\lambda)=\mathrm{ch}(M_k(\lambda))$; ist dagegen $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, und λ ein Gewicht (also $\lambda\in P(R)$), so sei $\chi_k'(\lambda)=\chi(\lambda)$. Ist $\mathrm{Char}(k)=0$, so sind die $\chi_k'(\lambda)$ linear unabhängig; ist $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, so sind die $\chi_k'(\lambda)$ mit $\lambda\in P(R)^+$ linear unabhängig.

Ist $\mathrm{Char}(k)=0$ und λ ein beliebiges Gewicht, so besitzt jeder Modul zum höchsten Gewicht λ eine (endliche) Jordan-Hölder-Reihe, deren einfache Faktoren gewisse $L_k(\lambda')$ mit $\lambda'\leqq\lambda$ und $\lambda'\in W_k.(\lambda)$ sind. Dabei kommt $L_k(\lambda)$ genau einmal vor. Wendet man dies auf die $M_k(\lambda)$ an und benutzt man Induktion, so folgt, daß es ganze Zahlen $a(w,\lambda)$ für alle $w\in W_k$ mit

$$\chi_k(\lambda)=\mathrm{ch}(L_k(\lambda))=\sum_{w\in W_k} a(w,\lambda)\,\mathrm{ch}(M_k(w.(\lambda)))=\sum_{w\in W_k}\chi_k'(w.(\lambda))\,a(w,\lambda)$$

gibt. Dabei wollen wir stets annehmen, daß $a(1,\lambda)=1$ und $a(w,\lambda)=0$ für die $w\in W_k$ mit $w.(\lambda)\nleq\lambda$ ist. (Es sind im allgemeinen nur die $\sum_{w.(\lambda)=\lambda} a(w'w,\lambda)$ eindeutig bestimmt.)

Ist $\mathrm{Char}(k)\neq 0$ *und R nicht vom Typ* A_n, *so sei* $\mathrm{Char}(k)$ *größer als die Coxeter-Zahl von R. Diese Voraussetzung gelte für den ganzen Aufsatz.* Ist $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, ist $\lambda\in P(R)^+$ und V ein endlichdimensionaler Modul zum höchsten Gewicht λ, so besitzt V eine Jordan-Hölder-Reihe, deren einfache Faktoren gewisse $L_k(\lambda')$ mit $\lambda'\in W_k.(\lambda)$ und $\lambda'\leqq\lambda$ und λ' dominant sind; dabei tritt $L_k(\lambda)$ genau einmal auf. Wenden wir dies auf $V(\lambda)_k$ an und benutzen wir Induktion, so folgt, daß es ganze Zahlen $a(w,\lambda)$ für alle $w\in W_k$ gibt mit:

$$\chi_k(\lambda)=\mathrm{ch}(L_k(\lambda))=\sum_{w\in W_k} a(w,\lambda)\,\mathrm{ch}(V(w.(\lambda))_k)=\sum_{w\in W_k} a(w,\lambda)\,\chi'_k(w.(\lambda)).$$

Dabei soll stets $a(w,\lambda)=0$ für die $w\in W_k$ mit $w.(\lambda)\nleq\lambda$ oder $w.(\lambda)\notin P(R)^+$ sein; auch gelte $a(1,\lambda)=1$.

Für jede Charakteristik gilt dann: Ist λ ein Gewicht und V ein (endlichdimensionaler für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$) U_k-Modul, der eine (endliche) Jordan-Hölder-Reihe besitzt, deren einfache Faktoren gewisse $L_k(\lambda')$ mit $\lambda'\in W_k.(\lambda)$ sind, so ist $\mathrm{ch}(V)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der $\chi'_k(\lambda')$ mit $\lambda'\in W_k.(\lambda)$.

§ 3. Zerlegungen von Tensorprodukten

In diesem Abschnitt seien λ und λ_0 zwei Gewichte, von denen λ_0 immer und λ für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$ dominant sein sollen. Seien V ein (für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$: endlichdimensionaler) Modul zum höchsten Gewicht λ und E ein endlichdimensionaler Modul zum höchsten Gewicht λ_0. Sei v ein erzeugendes primitives Element von V. Beide Räume seien mit kontravarianten Formen ungleich Null versehen; beide Formen und ihr Tensorprodukt, das eine kontravariante Form auf $V\otimes E$ ist, werden mit $(\,,\,)$ bezeichnet. Wir wählen Gewichte $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ von E, so daß es für alle Gewichte μ von E genau ein i mit $\lambda+\mu\in W_k.(\lambda+\mu_i)$ gibt.

Satz 1. *Es gibt Untermoduln* $(M_i)_{1\leqq i\leqq n}$ *von* $V\otimes E$ *mit:*

(i) $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$.

(ii) *Jedes* M_i *besitzt eine (endliche) Jordan-Hölder-Reihe, deren einfache Faktoren gewisse* $L_k(\lambda')$ *mit* $\lambda'\in W_k.(\lambda+\mu_i)$ *und* $\lambda'\leqq\lambda+\lambda_0$ *sind.*

(iii) *Jedes* M_i *wird über* U_k^- *von den Projektionen längs der Zerlegung* (i) *der* $v\otimes E^\nu$ *mit* $\lambda+\nu\in W_k.(\lambda+\mu_i)$ *erzeugt.*

(iv) *Die* M_i *sind für* $(\,,\,)$ *paarweise orthogonal. Ist* $V=L_k(\lambda)$ *und* $E=L_k(\lambda_0)$, *so ist* $(\,,\,)$ *auf jedem* M_i *nicht ausgeartet.*

Beweis. Über U_k^- wird $V\otimes E$ von den $v\otimes E^\nu$ erzeugt (vgl. [8], S. 52) und besitzt eine endliche Jordan-Hölder-Reihe, deren einfache Faktoren gewisse $L_k(\lambda')$ sind, für die es ein i mit $\lambda'\in W_k.(\lambda+\mu_i)$ gibt. (Der Beweis von [6], Lemme 7.6.14 überträgt sich sofort.) Seien $M_1,\dots,M_m$ unzerlegbare U_k-Untermoduln, so daß $V\otimes E$ ihre direkte Summe ist. Dann gibt es zu jedem M_i ein $\mu\in P(R)$, so daß alle einfachen Unterquotienten von M_i gewisse $L_k(\lambda')$ mit $\lambda'\in W_k.(\lambda+\mu)$ sind. (Dies ist für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$ das Theorem 5.1 aus [7], wobei für den Typ A_n auch [4] heranzuziehen ist. Für $\mathrm{Char}(k)=0$ läßt sich der Beweis von [10], Prop. 4.5 und 4.7

übertragen: Bei 4.7 benutzt man Induktion über die Länge einer Jordan-Hölder-Reihe und bei 4.5 braucht man nur solche Abbildungen f von U_k in $\operatorname{Hom}_k(V'', V')$ zu betrachten, so daß für alle Gewichte $\mu \in P(R)$ gilt:

$$f((U_k)^\mu) \subset \prod_\nu \operatorname{Hom}_k((V'')^\nu, (V')^{\nu+\mu}).$$

Weil $\operatorname{Hom}_k((V'')^\nu, (V')^{\nu+\mu})$ endlichdimensional ist und weil das Zentrum von U_k in $(U_k)^0$ enthalten ist, kann man Lemma 4.6 a.a.O. benutzen.) Ist $M_i \neq 0$, so muß es ein j mit $W_k.(\lambda+\mu) = W_k.(\lambda+\mu_j)$ geben. Fassen wir notfalls einige M_i zusammen und ordnen sie neu, so sehen wir, daß (i) und (ii) erfüllt werden kann.

Da $V \otimes E$ über U_k^- von den $v \otimes E^\nu$ erzeugt wird, wird M_i von den Projektionen F^ν der $v \otimes E^\nu$ erzeugt. Ist $F^\nu \not\subset \sum_{\mu>\nu} U_k^-(M_i^{\lambda+\mu})$, so ist $\left(U_k^- F^\nu + \sum_{\mu>\nu} U_k^-(M_i^{\lambda+\mu})\right)/\sum_{\mu>\nu} U_k^-(M_i^{\lambda+\mu})$ ein U_k-Modul ungleich Null, der von primitiven Elementen zum Gewicht $\lambda+\nu$ erzeugt wird; also besitzt M_i einen Unterquotienten isomorph $L_k(\lambda+\nu)$. Also ist $\lambda+\nu \in W_k.(\lambda+\mu_i)$ und (iii) folgt.

Zeigen wir (iv). Da die Gewichtsräume von $V \otimes E$ paarweise orthogonal sind, können wir Induktion benutzen: Wir betrachten ein $\mu \in P(R)$ mit $\mu \leqq \lambda_0$ und nehmen an, daß $(M_i^{\lambda+\nu}, M_j^{\lambda+\nu}) = 0$ für alle $i \neq j$ und alle $\nu > \mu$ ist, und wollen dasselbe für $\nu = \mu$ zeigen. Nun ist

$$(U_k^- M_i^{\lambda+\nu}, U_k^- M_j^{\lambda+\nu'}) = (M_i^{\lambda+\nu}, \sigma(U_k^-)\, U_k^- M_j^{\lambda+\nu'}) \subset (M_i^{\lambda+\nu}, M_j^{\lambda+\nu}) = 0$$

für $i \neq j$ und $\nu, \nu' > \mu$. Ist nun μ kein Gewicht von E oder aber $\lambda+\mu \notin W_k.(\lambda+\mu_i)$ und $\lambda+\mu \notin W_k.(\lambda+\mu_j)$, so ist $M_i^{\lambda+\mu} \subset \sum_{\nu>\mu} U_k^- M_i^{\lambda+\nu}$, ebenso für $M_j^{\lambda+\mu}$ und es folgt $(M_i^{\lambda+\mu}, M_j^{\lambda+\mu}) = 0$. Sei also μ Gewicht von E und etwa $\lambda+\mu \in W_k.(\lambda+\mu_1)$; sei F^μ die Projektion von $v \otimes E^\mu$ in M_1; wir müssen nur $(F^\mu, U_k^- M_i^{\lambda+\nu}) = 0$ für alle $i \neq 1$ und $\nu > \mu$ zeigen. Es ist aber

$$(F^\mu, U_k^- M_i^{\lambda+\nu}) = (M_i^{\lambda+\nu}, \sigma(U_k^-)\, F^\mu) \subset (M_i^{\lambda+\nu}, M_1^{\lambda+\nu}) = 0.$$

Also folgt die erste Aussage von (iv). Ist $V = L_k(\lambda)$ und $E = L_k(\lambda_0)$, so ist $(\ ,\ )$ auf V und E, also auf $V \otimes E$ und daher auf jedem M_i nicht ausgeartet.

Im zuletzt betrachteten Fall ist klar, daß die Projektion auf ein M_i längs der Zerlegung (i) die orthogonale Projektion für $(\ ,\ )$ ist.

Sei nun $V = L_k(\lambda)$ und $E = L_k(\lambda_0)$. Sei $\chi_k(\lambda) = \sum_{w \in W_k} a(w, \lambda)\, \chi'_k(w.(\lambda))$ der Charakter von V und sei $\chi_k(\lambda_0) = \sum_\mu n(\mu)\, e(\mu)$ der Charakter von E. Weil λ_0 dominant ist, ist $n(w(\mu)) = n(\mu)$ für alle $w \in W$. Der Charakter von $V \otimes E$ ist $\operatorname{ch}(V) \operatorname{ch}(E) = \chi_k(\lambda)\, \chi_k(\lambda_0)$. Es gilt nun:

$$\chi'_k(\lambda)\, \chi_k(\lambda_0) = \sum_\mu n(\mu)\, \chi'_k(\lambda+\mu).$$

Ist $\operatorname{Char}(k) = 0$, so folgt dies aus [6], Lemme 7.6.14. Ist $\operatorname{Char}(k) \neq 0$, so ist $\chi_k(\lambda_0)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination gewisser $\chi_{\mathbb{Q}}(\lambda')$, und es reicht, die Formel dafür zu zeigen. Sie folgt in dem Fall aus dem Theorem in [3].

Satz 2. *In Satz 1 seien V und E irreduzibel. Dann ist dort:*

$$\operatorname{ch}(M_i) = \sum_{\lambda+\mu \in W_k\cdot(\lambda+\mu_i)} n(\mu) \sum_{w \in W_k} a(w, \lambda)\, \chi'_k(w.(\lambda+\mu))$$

Beweis. Wegen (ii) ist $\operatorname{ch}(M_i)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination gewisser $\chi'_k(\lambda')$ mit $\lambda' \in W_k.(\lambda+\mu_i)$. Außerdem ist $\operatorname{ch}(V \otimes E)$ die Summe der $\operatorname{ch}(M_i)$. Aus unseren

Aussagen in § 2 über lineare Unabhängigkeit der Charaktere folgt der Satz durch Vergleich mit der Formel oben.

Für alle Gewichte μ von E sei eine Basis $(e_{\mu,j})_{1\leqq j\leqq n(\mu)}$ von E^{μ} gewählt.

Satz 3. *In Satz 1 seien V und E irreduzibel. Sei μ ein Gewicht von E, so daß $\lambda+\mu'\notin W_k.(\lambda+\mu)$ für alle Gewichte $\mu'\neq\mu$ von E ist. Sei M das zu μ gehörende M_i in Satz 1. Für $1\leqq i\leqq n(\mu)$ sei $f_{\mu,i}$ die orthogonale Projektion von $v\otimes e_{\mu,i}$ in M. Dann sind die $f_{\mu,i}$ primitive Elemente vom Gewicht $\lambda+\mu$. Der Rang n der Matrix der $(f_{\mu,i}, f_{\mu,j})$ $(1\leqq i, j\leqq n(\mu))$ ist $n(\mu)$ oder Null. Es ist M isomorph zu $L_k(\lambda+\mu)^n$ und es gilt:*

$$n(\mu)\sum_{w\in W_k} a(w,\lambda)\,\chi'_k(w.(\lambda+\mu))=n\,\chi_k(\lambda+\mu).$$

Beweis. Wegen (iii) sind die $f_{\mu,j}$ immer primitiv, wenn μ maximal unter den Gewichten μ' von E mit $\lambda+\mu'\in W_k.(\lambda+\mu)$ ist. Weil $(\,,)$ auf $\sum_{j=1}^{n(\mu)} k f_{\mu,j}=M^{\lambda+\mu}$ nicht ausgeartet ist, ist n gleich der Dimension von $M^{\lambda+\mu}$. Sei $g_1, g_2, \ldots, g_n$ eine Orthogonalbasis dieses Raumes. Es ist $M=\sum_{i=1}^{n} U_k^-\,g_i$ und die $U_k^-\,g_i$ sind paarweise orthogonal; da $(\,,)$ auf M nicht ausgeartet ist, ist es auch auf jedem $U_k^-\,g_i$ nicht ausgeartet. Daher ist jedes $U_k^-\,g_i$ isomorph zu $L_k(\lambda+\mu)$, die Summe ist direkt, also M isomorph $L_k(\lambda+\mu)^n$.

Die Charakterformel folgt aus Satz 2. Der Koeffizient von $e(\lambda+\mu)$ in $n\,\chi_k(\lambda+\mu)$ ist n; andererseits wird er von $n(\mu)$ geteilt. Nun ist $n\leqq n(\mu)$ nach Definition; es gibt also zwei Möglichkeiten: Es ist $n=n(\mu)$ oder $n=0$, je nachdem, ob die Determinante von $(\,,)$ für die $f_{\mu,j}$ ungleich oder gleich Null ist.

Betrachten wir zum Abschluß dieses Paragraphen zwei *Beispiele*. Es sei dabei $\mathrm{Char}(k)=0$. Seien V und E irreduzibel.

1) Ist $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\notin\mathbb{Z}$ für alle $\alpha\in R$, so ist $W_k^{(\lambda+\mu)}=\{1\}$ für alle $\mu\in P(R)$, also insbesondere für alle Gewichte von E. Es ist $L_k(\lambda+\mu)=M_k(\lambda+\mu)$ für alle $\mu\in P(R)$. In Satz 1 ist dann die Menge der μ_i gleich der Menge der Gewichte von E und es ist $\mathrm{ch}(M_i)=n(\mu_i)\,\mathrm{ch}(M_k(\lambda+\mu_i))\neq 0$. Nach Satz 3 ist also $M_i=M_k(\lambda+\mu_i)^{n(\mu_i)}$.

2) Sei $\alpha\in R^+$ mit $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle=r\in\mathbb{Z}$. Für alle $\beta\in R$, $\beta\neq\pm\alpha$ sei $\langle\lambda+\rho,\beta^\vee\rangle\notin\mathbb{Z}$. Ist $\mu\in P(R)$, so ist (nach [5], Prop. 1)

$$\chi_k(\lambda+\mu)=\chi'_k(\lambda+\mu)-\chi'_k(s_\alpha.(\lambda+\mu)) \quad \text{für } \langle\lambda+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle>0,$$

$$\chi_k(\lambda+\mu)=\chi'_k(\lambda+\mu) \quad \text{für } \langle\lambda+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle\leqq 0.$$

Sind μ und μ' Gewichte von E mit $\lambda+\mu'\in W_k.(\lambda+\mu)$, so muß $\mu=\mu'$ oder $s_\alpha.(\lambda+\mu)=\lambda+\mu'$, also $\mu'=s_\alpha(\mu)-r\,\alpha$ sein. Nehmen wir nun an, es sei $r>0$. Ist μ ein Gewicht von E mit $\langle\lambda+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle<0$, so ist $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle<0$, also $s_\alpha(\mu)=\mu-\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\,\alpha>\mu+r\,\alpha>\mu$, also ist auch $\mu'=s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$ ein Gewicht von E, und zwar mit $\langle\lambda+\mu'+\rho,\alpha^\vee\rangle>0$. Wir können daher annehmen, daß die $(\mu_i)_{1\leqq i\leqq n}$ genau die Gewichte von E mit $\langle\lambda+\rho+\mu_i,\alpha^\vee\rangle\geqq 0$ sind. Es ist dann

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(M_i)&=n(\mu_i)\big(\chi'_k(\lambda+\mu_i)-\chi'_k(s_\alpha.(\lambda+\mu_i))\big)\\&\quad+n(s_\alpha(\mu_i+r\alpha))\big(\chi'_k(\lambda+s_\alpha(\mu_i)-r\alpha)-\chi'_k(s_\alpha.(\lambda+s_\alpha(\mu_i)-r\alpha))\big)\\&=\big(n(\mu_i)-n(\mu_i+r\alpha)\big)\,\chi_k(\lambda+\mu_i).\end{aligned}$$

Für $\langle\lambda+\rho+\mu_i,\alpha^\vee\rangle=0$ entfällt hier eigentlich die zweite Zeile; da sie jedoch dann gleich Null ist, stimmt das Endergebnis auch in diesem Fall. Für diese μ_i ist $M_i=\{0\}$. Sei $\langle\lambda+\rho+\mu_i,\alpha^\vee\rangle>0$. Die orthogonale Projektion von $v\otimes E^{\mu_i}$ in M_i besteht aus primitiven Elementen vom Gewicht $\lambda+\mu_i$. Sie erzeugen Moduln zum höchsten Gewicht $\lambda+\mu_i$, also $\{0\}$ oder $L_k(\lambda+\mu_i)$ oder $M_k(\lambda+\mu_i)$. Jedoch kann $M_k(\lambda+\mu_i)$ nicht auftreten, weil M_i dann einen Unterquotienten $L_k(s_\alpha.(\lambda+\mu_i))$ besäße, der wegen der Formel für $\mathrm{ch}(M_i)$ nicht auftritt. Daher erzeugen diese primitiven Elemente einen Modul $L_k(\lambda+\mu_i)^n$ mit $n=\dim(M_i^{\lambda+\mu_i})=n(\mu_i)-n(\mu_i+r\alpha)$. Wegen der Formel für $\mathrm{ch}(M_i)$ muß dieser Modul ganz M_i sein; es ist also $M_i=L_k(\lambda+\mu_i)^n$ mit $n=n(\mu_i)-n(\mu_i+r\alpha)$. Dies gilt nach oben auch für $\langle\lambda+\rho+\mu_i,\alpha^\vee\rangle=0$.

§ 4. Facetten und obere Abschlüsse

Sei λ ein Gewicht und betrachten wir die Operation von $W_k^{(\lambda)}$ auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$. Nun wird $W_k^{(\lambda)}$ von den orthogonalen Spiegelungen $s_{\alpha,r\mathrm{Char}(k)}$ an den Hyperebenen $\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle=r\,\mathrm{Char}(k)$ mit $r\in\mathbb{Z}$ und $\alpha\in R^{(\lambda)}=\{\alpha\in R\,|\,\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\}$ erzeugt. Wie in [2], Chap. V lassen sich Facetten, Kammern und Wände für das System dieser Hyperebenen definieren.

Ist $\mathrm{Char}(k)=0$ und F eine Facette für $W_k^{(\lambda)}$, so gibt es eine disjunkte Zerlegung $R^{(\lambda)}\cap R^+=R_1^+(F)\cup R_2^+(F)\cup R_3^+(F)$ mit

$$\begin{aligned} F=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*\,|\,&\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle=0 \text{ für alle } \alpha\in R_1^+(F),\\ &\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle>0 \text{ für alle } \alpha\in R_2^+(F),\\ &\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle<0 \text{ für alle } \alpha\in R_3^+(F)\}. \end{aligned}$$

F ist genau dann eine Kammer, wenn $R_1^+(F)=\varnothing$ ist. Sind F_1, F_2 Facetten, so ist genau dann $F_2\subset\bar{F}_1$, wenn $R_1^+(F_1)\subset R_1^+(F_2)$, $R_2^+(F_2)\subset R_2^+(F_1)$ und $R_3^+(F_2)\subset R_3^+(F_1)$ ist. Gilt darüber hinaus $R_2^+(F_2)=R_2^+(F_1)$ (oder $R_3^+(F_2)=R_3^+(F_1)$), so sagen wir, daß F_2 zum oberen (oder unteren) Abschluß $\hat{F}_1$ von F_1 gehört. Es ist also

$$\begin{aligned} \hat{F}=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*\,|\,&\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle=0 \text{ für alle } \alpha\in R_1^+(F),\\ &\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle>0 \text{ für alle } \alpha\in R_2^+(F),\\ &\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle\leqq 0 \text{ für alle } \alpha\in R_3^+(F)\}. \end{aligned}$$

der obere Abschluß von F. Ist F_1 eine Kammer und $F_2\subset\bar{F}_1$, so heißt F_2 Wand (cloison) von F_1, wenn $R_1^+(F_2)$ aus genau einer Wurzel besteht; gehört dann F_2 zum oberen Abschluß von F_1, so heißt F_2 eine obere Wand; analog sind untere Wände definiert.

Sind $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}_k^*$ mit $\mu-\lambda\in Q(R)$ und $\mu\in W_{k'}(\lambda)$ (also $\mu\in W_k^{(\lambda)}\cdot(\lambda)$) und gibt es eine Facette F für $W_k^{(\lambda)}$ in $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ mit $\Re\lambda\in\bar{F}$, $\Re\mu\in\bar{F}$, so ist $\lambda=\mu$. (Da $\Im\lambda=\Im\mu$ ist, muß man $\Re\lambda=\Re\mu$ zeigen. Wegen $w.(\Re\lambda)=\Re\mu$ folgt dies aus [2], Chap. V, § 3, n° 3, Prop. 1.)

Ist F eine Facette für $W_k^{(\lambda)}$ und ist $\lambda'\in\lambda+P(R)$, so ist die Aussage „$\Re\lambda'\in F$" unabhängig von der Wahl der Zerlegung $k=\mathbb{Q}\oplus k'$ und der davon abhängigen Abbildung $\Re$. Ist nämlich $\alpha\in R^{(\lambda)}$, so ist $\langle\Im\lambda,\alpha^\vee\rangle=\langle\Im\lambda',\alpha^\vee\rangle=0$, also $\langle\Re\lambda',\alpha^\vee\rangle=\langle\lambda',\alpha^\vee\rangle$. Die Zugehörigkeit zu F wird aber durch Gleichungen und Ungleichungen für die $\langle\Re\lambda'+\rho,\alpha^\vee\rangle$ mit $\alpha\in R^{(\lambda)}$ definiert.

Ist $\mathrm{Char}(k)=p\neq 0$ und F eine Facette für $W_k^{(\lambda)}=W_k$, so gibt es eine disjunkte Zerlegung $R^+=R_1^+(F)\cup R_2^+(F)$ und ganze Zahlen $(n_\alpha)_{\alpha\in R^+}$ mit:

$$F=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*|n_\alpha p=\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle \quad \text{für alle } \alpha\in R_1^+(F),$$
$$n_\alpha p<\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle<(n_\alpha+1)p \quad \text{für alle } \alpha\in R_2^+(F)\}.$$

Man erhält unter Berücksichtigung der n_α für $F_1\subset\bar{F}_2$ Formeln analog zu denen oben. F heißt Kammer, wenn $R_1^+(F)=\varnothing$ ist; dann ist $\bar{F}$ ein Fundamentalbereich für W_k. Ist F eine (wie oben gegebene) Facette, so heißt

$$\hat{F}=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*|n_\alpha p=\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle \quad \text{für alle } \alpha\in R_1^+(F),$$
$$n_\alpha p<\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle\leqq(n_\alpha+1)p \quad \text{für alle } \alpha\in R_2^+(F)\}$$

der obere Abschluß von F. Analog wird der untere Abschluß definiert. Wände (sowie obere und untere Wände) haben dieselbe Definition wie in Charakteristik 0.

Sei $\mathrm{Char}(k)$ beliebig. Sei λ ein Gewicht und sei C eine Kammer für $W_k^{(\lambda)}$. Gehört ein $x\in\bar{C}$ nicht zum oberen Abschluß von C, so gibt es eine untere Wand F von C mit $x\in\bar{F}$.

Satz 4. *Seien λ ein Gewicht und F eine Facette für $W_k^{(\lambda)}$. Dann gibt es genau eine Kammer für $W_k^{(\lambda)}$, zu deren oberen Abschluß F gehört.*

Beweis. Ist $\mathrm{Char}(k)=0$, so sei

$$C^-=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*|\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle<0 \text{ für alle } \alpha\in R^{(\lambda)}\cap R^+\}.$$

Nach [11], Prop. 2.29 gibt es genau eine Kammer C für $W_k^{(\lambda)}$ mit $F\subset\bar{C}$, so daß für alle $\alpha\in R^{(\lambda)}\cap R^+$ gilt: Liegen F und C^- auf derselben Seite der Hyperebene $\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle=0$, so liegt auch C auf dieser Seite, das heißt, ist $\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle\leqq 0$ für alle $x\in F$, so ist $\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle<0$ für alle $x\in C$. Daher gehört F zum oberen Abschluß von C, und C ist offensichtlich eindeutig.

Ist $\mathrm{Char}(k)=p\neq 0$, so definieren wir C^- wie oben mit der zusätzlichen Ungleichung $\langle x+\rho,\alpha_0^\vee\rangle>-p$. Ist F eine Facette mit

$$\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle\geqq 0 \quad \text{für alle } \alpha\in R^{(\lambda)}\cap R^+$$

und alle $x\in F$, so können wir wie oben argumentieren. Eine beliebige Facette können wir durch eine Translation mit einem Element aus $pQ(R)$ in eine von dem Typ oben überführen. Dabei gehen Facetten in Facetten und obere Abschlüsse in obere Abschlüsse über. Daher ist alles gezeigt.

Satz 5. *Sei λ ein Gewicht und sei F die Facette für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda\in F$. Sei λ_0 ein dominantes Gewicht und sei $E=L_k(\lambda_0)$. Sei μ ein unter W zu λ_0 konjugiertes Gewicht von E mit $\Re\lambda+\mu\in\bar{F}$. Dann ist $\lambda+\mu'\notin W_k\cdot(\lambda+\mu)$ für alle Gewichte $\mu'\neq\mu$ von E.*

Beweis. Sei $E'=V(\lambda_0)_k$; da jedes Gewicht von E auch eines von E' ist, reicht es, den Satz mit E' statt E zu beweisen. Sei $p=\mathrm{Char}(k)$, wobei $p=0$ möglich ist. Sei C eine Kammer mit $F\subset\bar{C}$. Ist C_1 eine andere Kammer für $W_k^{(\lambda)}$, so sei $d(C_1,C)$ die Anzahl der Hyperebenen $\langle x+\rho,\alpha^\vee\rangle=rp$ mit $\alpha\in R^{(\lambda)}$ und $r\in\mathbb{Z}$, so daß C und C_1 auf verschiedenen Seiten der Hyperebene liegen.

Nehmen wir an, es gebe ein Gewicht $\mu'\neq\mu$ von E' mit $\lambda+\mu'\in W_k\cdot(\lambda+\mu)$. Es gibt eine Kammer C_1 für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda+\mu'\in\bar{C}_1$. Wir wählen μ' und C_1 so, daß

$d(C_1, C)$ minimal hierfür ist. Wäre $d(C_1, C)=0$, so wäre $C_1=C$, also $\Re\lambda+\mu'$, $\Re\lambda+\mu\in\bar{C}$ und $\Re\lambda+\mu'\in W_k^{(\lambda)}\cdot(\Re\lambda+\mu)$; da $\bar{C}$ ein Fundamentalbereich ist, folgt $\Re\lambda+\mu'=\Re\lambda+\mu$ im Widerspruch zur Wahl von μ'. Es gibt also ein $\alpha\in R^{(\lambda)}\cap R^+$ und $r\in\mathbb{Z}$, so daß die Hyperebene $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle=rp$ Träger einer Wand von C_1 ist und so daß C_1 und C auf verschiedenen Seiten der Hyperebene liegen. Sei etwa $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle<rp$ für $x\in C_1$ und $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle>rp$ für $x\in C$. (Der andere Fall läßt sich ganz analog behandeln.) Sei $C_2=s_{\alpha,rp}\cdot(C_1)$; es ist $d(C_2, C)<d(C_1, C)$.

Nun ist $\langle\Re\lambda+\rho+\mu', \alpha^\vee\rangle\leqq rp$ und $\langle\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle=\langle\Re\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle\geqq rp$. Es ist $s_{\alpha,rp}\cdot(\lambda+\mu')=\lambda-(\langle\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle-rp)\,\alpha+s_\alpha(\mu')$. Aus

$$\langle\Re\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle-rp\geqq 0 \quad\text{und}\quad s_{\alpha,rp}\cdot(\lambda+\mu')\geqq\lambda+\mu'$$

folgt $s_\alpha(\mu')\geqq\mu''=s_\alpha(\mu')-(\langle\Re\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle-rp)\alpha\geqq\mu'$. Nun sind μ' und $s_\alpha(\mu')$ Gewichte von E', also auch μ''. Nun ist $\lambda+\mu''\in W_k\cdot(\lambda+\mu')=W_k\cdot(\lambda+\mu)$ und $\Re\lambda+\mu''\in\bar{C}_2$ mit $d(C_2, C)<d(C_1, C)$. Wegen der Minimalität von $d(C_1, C)$ muß $\mu''=\mu$ sein. Da $\mu\in W(\lambda_0)$ ist, können nicht gleichzeitig $\mu+\alpha$ und $\mu-\alpha$ Gewichte von $V(\lambda_0)_k$ sein; da $\mu\neq\mu'$ ist, muß $\mu=s_\alpha(\mu')$ sein. Daher ist $\langle\Re\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle=rp$. Es ist dann $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle=rp$ für alle $x\in\bar{F}$, also insbesondere für $x=\Re\lambda+\mu$; daher ist $\langle\mu, \alpha^\vee\rangle=0$ und $\mu=s_\alpha(\mu)=\mu'$, ein Widerspruch.

Satz 6. *Seien λ, λ' Gewichte mit $\lambda-\lambda'\in P(R)$. Sei F die Facette für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda\in F$. Es gehöre $\Re\lambda'$ zum oberen Abschluß von F, und es sei $w\in W_k$ mit $w\cdot(\lambda')=\lambda'$. Dann ist $w\cdot(\lambda)\geqq\lambda$.*

Beweis. Sei $\mathrm{Char}(k)=p$, wobei auch $p=0$ möglich ist. Sei F_1 die Facette für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda'\in F_1$. Zu F_1 und $W_k^{(\lambda)}$ gibt es ein Gewicht $\mu\in pP(R)$ mit $\mu-\rho\in\bar{F}_1$. (Es ist $\mu-\rho$ ein spezieller Punkt für $W_k^{(\lambda)}$.) Dann normalisiert die Translation $T(-\mu)$ die Gruppe $W_k^{(\lambda)}$, sie permutiert die Facetten für $W_k^{(\lambda)}$ und führt obere Abschlüsse in obere Abschlüsse über. Ferner ist $T(-\mu)\,\lambda-T(-\mu)\,\lambda'\in P(R)$ und $\big(T(-\mu)\,w\,T(\mu)\big)\cdot T(-\mu)\,\lambda'=T(-\mu)\,\lambda'$. Aus $\big(T(-\mu)\,w\,T(\mu)\big)\cdot T(-\mu)\,\lambda\geqq T(-\mu)\,\lambda$ folgt außerdem $w\,(\lambda)\geqq\lambda$. Daher können und wollen wir annehmen, daß $0-\rho\in\bar{F}_1$ ist.

Sei $R_1=\{\alpha\in R^{(\lambda)}\,|\,\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle=0$ für alle $x\in F_1\}$. Wegen $0-\rho\in\bar{F}_1$ sind die Spiegelungshyperebenen $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle=0$ mit $\alpha\in R^+\cap R_1$ die einzigen, die F_1 enthalten. Daher gehört w zur Gruppe W_1, die von den s_α mit $\alpha\in R^+\cap R_1$ erzeugt wird. Nun ist R_1 ein Wurzelsystem in dem Teilraum, den es erzeugt, und man kann eine Basis B_1 von R_1 mit $B_1\subset R^+$ wählen. Dann ist eine Wurzel $\alpha\in R_1$ genau dann positiv für B_1, wenn $\alpha\in R^+$ ist. Für solch ein α ist $\langle\lambda'+\rho, \alpha^\vee\rangle=0$, also $\langle\lambda+\rho, \alpha^\vee\rangle\leqq 0$, mithin $s_\alpha\cdot(\lambda)\geqq\lambda$. Wie beim Beweis von Prop. 18 in [2] sieht man dann $w_1\,(\lambda)\geqq\lambda$ für alle $w_1\in W_1$, also insbesondere für $w_1=w$.

Theorem 1. *Seien λ, λ' Gewichte mit $\lambda-\lambda'\in P(R)$. Sei F die Facette für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda\in F$. Es gehöre $\Re\lambda'$ zum oberen Abschluß von F. Ist* $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, *so sei $\lambda\in P(R)^+$. Dann ist*

$$\chi_k(\lambda')=\sum_{w\in W_k} a(w, \lambda)\,\chi_k'(w\cdot(\lambda')).$$

Beweis. Sei $\mu=\lambda'-\lambda$ und sei λ_0 das dominante Gewicht in $W(\mu)$. Ist $E=L_k(\lambda_0)$, so ist (nach Satz 5) $\lambda+\mu'\notin W_k\cdot(\lambda+\mu)$ für alle Gewichte $\mu'\neq\mu$ von E. Wir können also Satz 3 auf $L_k(\lambda)\otimes E$ anwenden; dabei ist $n(\mu)=1$ und $n\in\{0, 1\}$. Um zu zeigen, daß $n\neq 0$ ist, müssen wir zeigen, daß die Summe im Satz ungleich Null ist. Wir können annehmen, daß $a(w, \lambda)=0$ ist, wenn $w\cdot(\lambda)\not\geqq\lambda$ ist und, für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, auch wenn $w.(\lambda)$ nicht dominant ist. In der Summe oben ist dann der Koeffizient von $e(\lambda')$ gleich dem von $\chi'_k(\lambda')$, also gleich $\sum_{w.(\lambda')=\lambda'} a(w,\lambda)$. Ist $w.(\lambda')=\lambda'$, so ist (nach Satz 6) $w.(\lambda)\geqq\lambda$; wenn $a(w,\lambda)\neq 0$ sein soll, muß $w.(\lambda)=\lambda$ sein. Wegen $\Re\lambda'\in\bar{F}$ folgt natürlich umgekehrt $w.(\lambda')=\lambda'$ aus $w.(\lambda)=\lambda$. Daher ist der Koeffizent von $e(\lambda')$ gleich $\sum_{w.(\lambda)=\lambda} a(w,\lambda)=1$. Mithin ist die Summe im Satz ungleich Null, also gleich $\chi_k(\lambda')$ nach Satz 3.

Der Fall $\Re\lambda'\in F$ ist für $\mathrm{Char}(k)\neq 0$ die Conjecture III von Verma ([12]). Sie ist also hiermit bewiesen, wenn $\mathrm{Char}(k)$ größer als die Coxeter-Zahl ist oder wenn R vom Typ A_n ist. Daß die entsprechende Aussage für $\mathrm{Char}(k)=0$ gilt, ist Verma von Bernštein 1971 mündlich mitgeteilt worden.

Ist $\mathrm{Char}(k)=0$ oder $\mathrm{Char}(k)$ größer als die Coxeterzahl, so ist hierdurch die Berechnung der $\chi_k(\lambda)$ auf die der $\chi_k(\lambda')$ zurückgeführt, für die $\Re\lambda'$ in einer Kammer liegt. Ist nämlich λ ein Gewicht, so gibt es (nach Satz 4) eine Kammer C, zu deren oberen Abschluß $\Re\lambda$ gehört, und ein $\lambda'\in\lambda+P(R)$ mit $\Re\lambda'\in C$.

§ 5. Primitive Elemente in Tensorprodukten

Sei $\omega\in\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$, so daß die $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle$ mit $\alpha\in B$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Sei $V=L_{\mathbb{C}}(\omega)=M_{\mathbb{C}}(\omega)$. Sei λ_0 ein dominantes Gewicht und sei $E=L_{\mathbb{C}}(\lambda_0)$. Seien v und v_0 primitive Erzeugende von V und E. Es seien V und E mit durch $(v,v)=(v_0,v_0)=1$ normierten kontravarianten Formen $(,)$ versehen; auch das Tensorprodukt dieser Formen heiße $(,)$. Sei $E_{\mathbb{Z}}=U^-_{\mathbb{Z}}\,v_0=U_{\mathbb{Z}}v_0$ und sei $(e_{\mu,j})_{1\leqq j\leqq n(\mu)}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $E^\mu_{\mathbb{Z}}$ für alle Gewichte μ von E. Nun sind die Voraussetzungen von Satz 1 gegeben. Nach Beispiel 1 zu Satz 3 ist $\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n\}$ die Menge der Gewichte μ von E; für ein solches μ werde das zugehörige M_i mit M_μ bezeichnet. Sei $f_{\mu,j}$ die orthogonale Projektion von $v\otimes e_{\mu,j}$ in M_μ. Die $f_{\mu,j}$ sind *primitive Elemente*, jedes $U^-_{\mathbb{C}}f_{\mu,j}$ ist isomorph zu $M_{\mathbb{C}}(\lambda+\mu)$ und M_μ ist direkte Summe der $U^-_{\mathbb{C}}f_{\mu,j}$. Nun muß nach Satz 3 die Determinante von $(,)$ für die $f_{\mu,j}(1\leqq j\leqq n(\mu))$ ungleich Null sein. Diese Determinante habe ich in [8], Lemma II 8(ii) berechnet; sie ist $D_E(\mu)a_\mu$. Dabei ist $D_E(\mu)$ die Determinante von $(,)$ für eine $\mathbb{Z}$-Basis von $E^\mu_{\mathbb{Z}}$, also etwa für die $e_{\mu,j}$; ferner bedeute:

$$a_\mu=\prod_{\alpha\in R^+}\prod_{\substack{r>0\\ r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0}}\left(\frac{\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r}{\langle\omega+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle+r}\right)^{n(\mu+r\alpha)}.$$

Sind $\lambda,\lambda'\in\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$, so sei

$$D'_\lambda(\lambda')=\prod_{\alpha\in R^+}\prod_{r>0}\left(\frac{\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r}{r}\right)^{P(\lambda-\lambda'-r\alpha)}$$

Ist v' ein primitives Element von $M_{\mathbb{C}}(\lambda)$, ist $(,)$ die durch $(v',v')=1$ normierte kontravariante Form auf $M_{\mathbb{C}}(\lambda)$ und ist $M_{\mathbb{Z}}(\lambda)=U^-_{\mathbb{Z}}\,v'$, so ist $D'_\lambda(\lambda')$ die Determinante von $(,)$ für eine $\mathbb{Z}$-Basis von $M_{\mathbb{Z}}(\lambda)^{\lambda'}$ (s. [8], Satz II 1 oder [13]).

Eine Partition ist ein R^+-tupel $\pi=(p(\alpha))_{\alpha\in R,\alpha>0}$ natürlicher Zahlen; es sei dann $R(\pi)=\sum_{\alpha\in R^+}p(\alpha)\alpha$ und $X_{-\pi}=\prod_{\alpha\in R^+}X_{-\alpha,p(\alpha)}$ sowie $X_\pi=\prod_{\alpha\in R^+}X_{\alpha,p(\alpha)}$. Dabei sind die beiden Produkte jeweils in einer festen, doch beliebigen Reihenfolge auszuführen; der Einfachheit halber mögen diese Reihenfolgen durch $\sigma(X_{-\pi})=X_\pi$ für alle π verbunden sein. Nun bilden die $X_{-\pi}v$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $V_{\mathbb{Z}}=U^-_{\mathbb{Z}}\,v$ und die $X_{-\pi}(v\otimes e_{\mu,j})$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $(V\otimes E)_{\mathbb{Z}}=V_{\mathbb{Z}}\otimes E_{\mathbb{Z}}$.

Die Koeffizienten der primitiven Elemente $f_{\mu,j}$ mögen $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}$ heißen:

$$f_{\mu,j}=v\otimes e_{\mu,j}-\sum_{\nu>\mu}\sum_{k=1}^{n(\nu)}\sum_{R(\pi)=\nu-\mu}a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}X_{-\pi}(v\otimes e_{\nu,k}). \tag{1}$$

Die $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}$ sind durch das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu>\mu}\sum_{k=1}^{n(\nu)}\sum_{R(\pi)=\nu-\mu}a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}\big(X_{-\pi}(v\otimes e_{\nu,k}),X_{-\pi'}(v\otimes e_{\nu',k'})\big) \tag{2}$$
$$=\big(v\otimes e_{\mu j},X_{-\pi'}(v\otimes e_{\nu',k'})\big)$$

für alle $\nu'>\mu$, $1\leqq k'\leqq n(\nu')$ und $R(\pi')=\nu'-\mu$ gegeben. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist nach [8], Lemmata II 8(i) und 7 gleich:

$$\prod_{\nu>\mu}D'_{\omega+\nu}(\omega+\mu)^{n(\nu)}\big(a_\nu D_E(\nu)\big)^{P(\nu-\mu)}=\frac{1}{a_\mu}\prod_{\nu>\mu}D_E(\nu)^{P(\nu-\mu)}D'_\omega(\omega+\mu-\nu)^{n(\nu)}. \tag{3}$$

Sind μ und ν Gewichte von E mit $\nu>\mu$, so gibt es $m_\alpha\in\mathbb{N}$ mit $\nu-\mu=\sum_{\alpha\in B}m_\alpha\alpha$. Mit $d(E)$ werde das Maximum aller m_α für alle möglichen ν und μ bezeichnet. Seien $p_1,p_2,\ldots,p_n$ die Primzahlen, die kleiner oder gleich $d(E)$ sind oder die ein $D_E(\mu)$ teilen. Sei $\mathbb{Z}_E=\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2},\ldots,\frac{1}{p_n}\right]\subset\mathbb{Q}$. Sei A der von $\mathbb{Z}_E$ und allen $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle$ mit $\alpha\in B$ erzeugte Teilring von $\mathbb{C}$. Dann ist A ein Polynomring über $\mathbb{Z}_E$, ein Ring also, in dem sich jedes Element eindeutig in Primelemente zerlegen läßt. Zu diesen Primelementen gehören alle $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ mit $\alpha\in R$ und $r\in\mathbb{Z}$, weil sie Primelemente in $\mathbb{Q}[(\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle)_{\beta\in P}]$ sind und weil der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten des Polynoms gleich 1 ist (nach [2], Chap. VI, § 1, n° 6, Cor. de la Thm. 3). Sei S die von allen $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ mit $\alpha\in R^+$ und $r\in\mathbb{Z}$ erzeugte multiplikative Teilmenge von A. Nimmt man nur die $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ mit $n(\mu+r\alpha)>0$ und $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle<0$, so heiße die erzeugte multiplikative Menge S_μ. Wir wollen zeigen:

Satz 7. *Für alle Gewichte μ von E gehören alle $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}$ zu $S_\mu^{-1}A$.*

Nun ist $S_\mu^{-1}A=S^{-1}A\cap S_\mu^{-1}\mathbb{Q}[(\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle)_{\beta\in P}]$ wegen der Eindeutigkeit der Primelementzerlegung. Zeigen wir zuerst $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}\in S^{-1}A$. Nun können wir die $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}$ als Lösungen des Gleichungssystems (2) mit Hilfe der Cramerschen Regel berechnen. Da nach (3) der Nenner der Determinante zu A gehört und da im Zähler der Anteil der $D_E(\nu)$ in A invertierbar ist und der Rest zu S gehört, reicht es zu zeigen, daß alle Koeffizienten des Gleichungssystems in A liegen. Diese Koeffizienten sind einmal vom Typ

$$\big(v\otimes e_{\mu,j},X_{-\pi'}(v\otimes e_{\nu',k'})\big)=\big(X_{\pi'}(v\otimes e_{\mu,j}),v\otimes e_{\nu',k'}\big)$$
$$=\big(v\otimes X_{\pi'}e_{\mu,j},v\otimes e_{\nu',k'}\big)=\big(X_{\pi'}e_{\mu,j},e_{\nu',k'}\big).$$

Weil $\lambda_0\in P(R)$ ist, ist $X_{\pi'}e_{\mu,j}\in E_{\mathbb{Z}}$ und $(E_{\mathbb{Z}},E_{\mathbb{Z}})\subset\mathbb{Z}$, also ist der Koeffizient aus $\mathbb{Z}$. Die übrigen Koeffizienten sind von der Form

$$\big(X_{-\pi}(v\otimes e_{\nu,k}),X_{-\pi'}(v\otimes e_{\nu',k'})\big)=\big(v\otimes e_{\nu,k},X_\pi X_{-\pi'}(v\otimes e_{\nu',k'})\big).$$

Sind $\pi=(p(\alpha))_{\alpha\in R,\alpha>0}$ und $\pi'=(p'(\alpha))_{\alpha\in R,\alpha>0}$, so folgt aus $R(\pi)=\nu-\mu$ und $R(\pi')=\nu'-\mu$, daß $p(\alpha), p'(\alpha)\leqq d(E)$ sind, also daß $p(\alpha)$ und $p'(\alpha)$ in A invertierbar sind. Daher reicht es zu zeigen, daß $(v\otimes e_{\nu,k}, \prod_{\alpha\in R^+} X_\alpha^{p(\alpha)} \prod_{\alpha\in R^+} X_{-\alpha}^{p'(\alpha)}(v\otimes e_{\nu',k'}))$ in A liegt. Ist $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}})$ die einhüllende $\mathbb{Z}$-Algebra von $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$, so reicht es aus, zu zeigen, daß $(v\otimes e_{\nu,k}, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}})(v\otimes e_{\nu',k'}))\subset A$ ist. Weil $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ von den H_α mit $\alpha\in B$ erzeugt wird und $H_\alpha(v\otimes e_{\nu',k'})=\langle\omega+\nu',\alpha^\vee\rangle(v\otimes e_{\nu',k'})$ ist, ist $(v\otimes e_{\nu,k}, U(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}})(v\otimes e_{\nu',k'}))\subset A$; die entsprechende Aussage für $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ folgt aus $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}})E_{\mathbb{Z}}\subset E_{\mathbb{Z}}$.

Sei $\alpha\in R^+$ und $r\in\mathbb{N}$, und betrachten wir das Polynom $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle+r$. In der Determinante (3) tritt es nur auf, wenn es vom Nenner von a_μ herkommt; dazu muß es $s>0$ mit $r=\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+s$ und $n(\mu+s\alpha)>0$ geben; also muß $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle-r<0$ und $n(\mu+r\alpha-\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\alpha)=n(s_\alpha(\mu-r\alpha))=n(\mu-r\alpha)>0$ sein. Dies ist aber die Bedingung dafür, daß $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle+r$ zu S_μ gehört. Damit ist für die $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle+r$ mit $r\geqq 0$ alles gezeigt.

Sei nun $\alpha\in R^+$ und $r\in\mathbb{N}$, $r>0$. Das Polynom $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ induziert eine Bewertung des Quotientenkörpers von A; sie heiße für den Rest des Beweises kurz die Bewertung. Sei A' der (diskrete) Bewertungsring, M das Bewertungsideal und K der Restklassenkörper A'/M. Wir wollen zeigen, daß $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}\in A'$ ist, wenn $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r\notin S_\mu$ ist. Ist dies für alle α und r geschehen, so folgt dann $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}\in S_\mu^{-1}\mathbb{Q}[(\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle)_{\beta\in B}]$. Daß $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r\notin S_\mu$ ist, bedeutet $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0$ oder $n(\mu+r\alpha)=0$. Wenn aber $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle<0$ ist, so ist $\mu<\mu+r\alpha<\mu-\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\alpha=s_\alpha(\mu)$ und auch $\mu+r\alpha$ ist ein Gewicht von E. Wir müssen also zeigen: Ist $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0$, so ist $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}\in A'$.

Es sei $U_{A'}=U_{\mathbb{Z}}\otimes A'\subset U_{\mathbb{C}}$ und $E_{A'}=E_{\mathbb{Z}}\otimes A'\subset E$ sowie $V_{A'}=M_{A'}(\omega)=U_{\mathbb{Z}}^- v\otimes A'\subset V$. Weil $\mathbb{Q}\subset A'$ und $\omega(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}})\subset A'$ ist, ist $V_{A'}$ ein $U_{A'}$-Modul: dies gilt natürlich auch für $E_{A'}$ und $(V\otimes E)_{A'}=V_{A'}\otimes_{A'}E_{A'}$. Die $X_{-\pi}(v\otimes e_{\nu,k})$ bilden eine A'-Basis von $(V\otimes E)_{A'}$. Daß für ein μ und ein j alle $a_{\nu,k,\pi}^{(\mu,j)}$ in A' liegen, ist äquivalent dazu, daß $f_{\mu,j}\in(V\otimes E)_{A'}$ ist.

Die kanonische Abbildung von A' auf K werde mit $a\mapsto\bar a$ bezeichnet, ebenso die von $U_{A'}$ auf U_K, von $E_{A'}$ auf E_K, von $M_{A'}(\omega)$ auf $M_K(\bar\omega)$ und von $(V\otimes E)_{A'}$ auf $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$. Dabei ist $\langle\bar\omega+\rho,\beta^\vee\rangle=\overline{\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle}$ für alle $\beta\in R$; es ist dann $\langle\bar\omega+\rho,\beta^\vee\rangle\notin\mathbb{Z}$ für alle $\beta\in R$ mit $\beta\neq\pm\alpha$ und es ist $\langle\bar\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle=r$. Alle diese Abbildungen von $U_{A'}$-Moduln sind mit der von $U_{A'}$ auf U_K verträglich. Versehen wir $M_K(\bar\omega)$ und E_K mit durch $(\bar v,\bar v)=(\bar v_0,\bar v_0)=1$ normierten kontravarianten Formen und $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$ mit deren Tensorprodukt, so ist $(\bar x,\bar y)=\overline{(x,y)}$ für alle x,y in einem dieser $U_{A'}$-Moduln. Nun läßt sich $M_K(\bar\omega-r\,\alpha)$ eindeutig in $M_K(\bar\omega)$ als das Radikal von (,) einbetten, und es ist $L_K(\bar\omega)=M_K(\bar\omega)/M_K(\bar\omega-r\,\alpha)$. Dann ist $M_K(\bar\omega-r\,\alpha)\otimes E_K$ das Radikal von (,) auf $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$ und es ist $L_K(\bar\omega)\otimes E_K=(M_K(\bar\omega)\otimes E_K)/(M_K(\bar\omega-r\,\alpha)\otimes E_K)$. Sei φ die aus $u\mapsto\bar u$ und der kanonischen Projektion von $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$ auf $L_K(\bar\omega)\otimes E_K$ zusammengesetzte Abbildung von $(V\otimes E)_{A'}$ auf $L_K(\bar\omega)\otimes E_K$. Für $x\in(V\otimes E)_{A'}$ ist $\varphi(x)$ genau dann gleich Null, wenn $\bar x$ zum Radikal von (,) auf $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$ gehört, also genau dann, wenn $(x,(V\otimes E)_{A'})\subset M$ ist.

Unsere Behauptung folgt nun aus dem genaueren

Lemma. (i) *Sei μ ein Gewicht von E mit $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0$. Alle $f_{\mu,j}$ $(1\leqq j\leqq n(\mu))$ gehören zu $(V\otimes E)_{A'}$. Es gibt eine A'-Orthogonalbasis $g_{\mu,j}$ $(1\leqq j\leqq n(\mu))$ von $A'f_{\mu,1}+A'f_{\mu,2}+\cdots+A'f_{\mu,n(\mu)}$, so daß der Basiswechsel von den $f_{\mu,j}$ zu den $g_{\mu,j}$ Deter-*

minante 1 *hat und so daß die Bewertung von* $(g_{\mu,j}, g_{\mu,j})$ *gleich* 1 *für* $1 \leqq j \leqq n(\mu + r\alpha)$ *und gleich* 0 *für* $j > n(\mu + r\alpha)$ *ist. Für* $1 \leqq j \leqq n(\mu + r\alpha)$ *ist* $(g_{\mu,j}, (V \otimes E)_{A'}) \subset M$.

(ii) *Sei* μ *ein Gewicht von* E *mit* $r + \langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0$. *Sei* $g_{\mu,j}$ *die Orthogonalisierung von* $v \otimes e_{\mu,j}$ *auf alle* $X_{-\pi} g_{\nu,k}$ *mit* $\nu > \mu$ *und* $\nu \neq s_\alpha(\mu + r\alpha)$ *oder mit* $\nu = s_\alpha(\mu + r\alpha)$ *und* $k > n(\mu) = n(\nu + r\alpha)$. *Dann ist* $g_{\mu,j} \in (V \otimes E)_{A'}$ *und* $(g_{\mu,j}, (V \otimes E)_{A'}) \subset M$ *für* $1 \leqq j \leqq n(\mu)$.

Beweis. Wir benutzen Induktion über μ und nehmen an, der Satz sei für alle Gewichte $\nu > \mu$ wahr. Die $X_{-\pi}(v \otimes e_{\nu,k})$ mit $\nu > \mu$, $1 \leqq k \leqq n(\nu)$ und $R(\pi) = \nu - \mu$ erzeugen über $\mathbb{C}$ denselben Teilraum wie die $X_{-\pi} g_{\nu,k}$; da $f_{\mu,j}$ die Orthogonalisierung von $v \otimes e_{\mu,j}$ auf die ersten Vektoren ist, ist es auch die auf die zweiten. Es gibt also $b^{(\mu;j)}_{\nu,k,\pi} \in \mathbb{C}$ mit:

$$f_{\mu,j} = v \otimes e_{\mu,j} - \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=1}^{n(\nu)} \sum_{R(\pi) = \nu - \mu} b^{(\mu;j)}_{\nu,k,\pi} X_{-\pi} g_{\nu,k}. \tag{4}$$

Im Fall (ii) erhalten wir $g_{\mu,j}$, wenn wir die Terme mit $\nu = s_\alpha(\mu + r\alpha)$ und $1 \leqq k \leqq n(\mu)$ fortlassen. Es ist zu zeigen, daß die $b^{(\mu;j)}_{\nu,k,\pi}$ (bei (ii) außer denen mit $\nu = s_\alpha(\mu + r\alpha)$ und $1 \leqq k \leqq n(\mu)$) aus A' sind. Sie sind durch ein zu (2) analoges Gleichungssystem gegeben. Nun ist $X_{-\pi} g_{\nu,k} \in M_\nu$ für $r + \langle \nu, \alpha^\vee \rangle \geqq 0$ und $X_{-\pi} g_{\nu,k} \in M_\nu + M_{s_\alpha(\nu + r\alpha)}$ für $r + \langle \nu, \alpha^\vee \rangle < 0$. Daher ist $(X_{-\pi} g_{\nu,k}, X_{-\pi'} g_{\nu',k'}) = 0$ für alle ν, ν' mit $\nu' \neq \nu, s_\alpha(\nu + r\alpha)$. Ist $\langle \nu, \alpha^\vee \rangle + r > 0$ und $k > n(\nu + r\alpha)$, so ist $(X_{-\pi} g_{\nu,k}, X_{-\pi'} g_{\nu',k'}) = 0$ auch für $\nu' = s_\alpha(\nu + r\alpha)$ oder für $\nu' = \nu$ und $k' \neq k$. Daher zerfällt das zu (4) gehörige Gleichungssystem in verschiedene Teilsysteme.

Sei $\nu > \mu$ mit $\langle \nu, \alpha^\vee \rangle + r \geqq 0$ und sei $\nu' = s_\alpha(\nu + r\alpha)$. Für $k > n(\nu')$ erhalten wir ein System:

$$(v \otimes e_{\mu,j}, X_{-\pi'} g_{\nu,k}) = \sum_{R(\pi) = \nu - \mu} b^{(\mu;j)}_{\nu,k,\pi} (X_{-\pi} g_{\nu,k}, X_{-\pi'} g_{\nu,k}) \tag{5}$$

für alle π' mit $R(\pi') = \nu - \mu$.

Außerdem erhalten wir das folgende System:

$$\begin{aligned}(v \otimes e_{\mu,j}, X_{-\pi'} g_{\nu,k'}) = {} & \sum_{k=1}^{n(\nu')} \sum_{R(\pi) = \nu - \mu} (X_{-\pi} g_{\nu,k}, X_{-\pi'} g_{\nu,k'}) \, b^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi} \\ & + \sum_{k=1}^{n(\nu')} \sum_{R(\pi) = \nu' - \mu} (X_{-\pi} g_{\nu',k}, X_{-\pi'} g_{\nu,k'}) \, b^{(\mu,j)}_{\nu',k,\pi}\end{aligned} \tag{6}$$

für alle k' und π' mit $1 \leqq k' \leqq n(\nu + r\alpha)$ und $R(\pi) = \nu - \mu$, und

$$\begin{aligned}(v \otimes e_{\mu,j}, X_{-\pi'} g_{\nu',k'}) = {} & \sum_{k=1}^{n(\nu')} \sum_{R(\pi) = \nu - \mu} (X_{-\pi} g_{\nu,k}, X_{-\pi'} g_{\nu',k'}) \, b^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi} \\ & + \sum_{k=1}^{n(\nu')} \sum_{R(\pi) = \nu' - \mu} (X_{-\pi} g_{\nu',k}, X_{-\pi'} g_{\nu',k'}) \, b^{(\mu,j)}_{\nu',k,\pi}\end{aligned}$$

für alle k' und π' mit $1 \leqq k' \leqq n(\nu')$ und $R(\pi') = \nu' - \mu$. Für $\nu' = \nu$ entfällt die zweite Hälfte des Gleichungssystems. Ist $r + \langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0$, so ist (6) für $\nu = s_\alpha(\mu + r\alpha)$ fortzulassen.

Die Determinante dieser Gleichungssysteme ist die Determinante von (,) für alle $X_{-\pi} g_{\nu,k}$ mit $R(\pi) = \nu - \mu$ bei (5), für alle $X_{-\pi} g_{\nu,k}$ und $X_{-\pi'} g_{\nu',k'}$ mit

$R(\pi)=\nu-\mu$, $R(\pi')=\nu'-\mu$ und $1 \leqq k, k' \leqq n(\nu')$ für (6). Im zweiten Fall können wir die $X_{-\pi'} g_{\nu',k'}$ durch die $X_{-\pi'} f_{\nu',k'}$ ersetzen, ohne daß sich die Determinante ändert. Daher ist die Determinante im Fall (5) oder im Fall (6) gleich

$$(g_{\nu,k}, g_{\nu,k})^{P(\nu-\mu)} D'_{\omega+\nu}(\omega+\mu) \tag{5'}$$

oder

$$\left(\prod_{k=1}^{n(\nu')} (g_{\nu,k}, g_{\nu,k})^{P(\nu-\mu)}\right) D'_{\omega+\nu}(\omega+\mu)^{n(\nu')} a_{\nu'}^{P(\nu'-\mu)} D'_{\omega+\nu'}(\omega+\mu)^{n(\nu')}. \tag{6'}$$

Bei (6') entfallen die beiden letzten Faktoren für $\nu'=\nu$. Berechnen wir zunächst die Bewertung dieser Determinanten. Nach Wahl von k bringt in (5') das $(g_{\nu,k}, g_{\nu,k})$ keinen Beitrag zur Bewertung, während in (6') jedes 1 dazu beiträgt, so daß das Produkt über k dort insgesamt $n(\nu')\, P(\nu-\mu)$ liefert. Es ist

$$D'_{\omega+\nu}(\omega+\mu)=\prod_{\beta>0}\prod_{s>0}\left(\frac{\langle\omega+\rho+\nu, \beta^\vee\rangle - s}{s}\right)^{P(\nu-\mu-s\beta)}.$$

Zur Bewertung trägt nur der Faktor mit $\beta=\alpha$ und $s-\langle\nu,\alpha^\vee\rangle=r$ etwas bei; dazu muß $r+\langle\nu,\alpha^\vee\rangle>0$ sein, was in (5') immer, in (6') nur für $\nu \neq \nu'$ der Fall ist. Der Beitrag ist dann $P(\nu-\mu-(r+\langle\nu,\alpha^\vee\rangle)\,\alpha)=P(\nu'-\mu)$ bei (5') und $P(\nu'-\mu)\, n(\nu')$ bei (6'). Insgesamt haben wir bisher als Bewertung erhalten:

$$P(\nu'-\mu), \tag{5''}$$

$$\begin{aligned} &n(\nu')\big(P(\nu'-\mu)+P(\nu-\mu)\big) && \text{für } \nu \neq \nu', \\ &n(\nu')\, P(\nu-\mu) && \text{für } \nu=\nu'. \end{aligned} \tag{6''}$$

Dies ist die volle Bewertung, weil bei (6') die beiden letzten Faktoren keinen Beitrag liefern. Es ist nämlich

$$a_{\nu'}=\prod_{\beta>0}\prod_{\substack{s>0\\ s+\langle\nu',\beta^\vee\rangle\geqq 0}}\left(\frac{\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle-s}{\langle\omega+\rho+\nu',\beta^\vee\rangle+s}\right)^{n(\nu'+s\beta)}.$$

Im Nenner tritt $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ sicher nicht auf. Im Zähler müßte $\beta=\alpha$ und $s=r$, also $r+\langle\nu',\alpha^\vee\rangle=r+\langle s_\alpha(\nu)-r\,\alpha,\alpha^\vee\rangle=-(\langle\nu,\alpha^\vee\rangle+r)\geqq 0$ sein. Nun ist $\langle\nu,\alpha^\vee\rangle+r\geqq 0$ und für $\langle\nu,\alpha^\vee\rangle+r=0$, also $\nu'=\nu$, tritt dieser Faktor nicht auf. Auch $D'_{\omega+\nu'}(\omega+\mu)$ liefert nichts; es müßte nämlich $\langle\omega+\rho+\nu',\beta^\vee\rangle-s=\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$, also $\beta=\alpha$ und $s=r+\langle\nu',\alpha^\vee\rangle=-(\langle\nu,\alpha^\vee\rangle+r)<0$ sein, was im Widerspruch zu $s>0$ steht.

Bei (6) ist die Bewertung der Determinante genau die Anzahl der Gleichungen. Berechnen wir die $b_{\nu,k,\pi}^{(\mu;j)}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel, so reicht es zu zeigen, daß alle Koeffizienten von (6) echt positive Bewertung haben, also in M liegen. Sie liegen aber in $(g_{\nu,k},(V\otimes E)_{A'})$ und $(g_{\nu',k},(V\otimes E)_{A'})$, und nach Induktionsvoraussetzung sind dies Teilmengen von M.

Betrachten wir also (5). Ist $\nu' \ngeqq \mu$, so ist die Bewertung (5'') Null und nichts zu zeigen. Sei also $\nu' \geqq \mu$. Wegen $\overline{(g_{\nu,k}, g_{\nu,k})} \neq 0$ ist $\varphi(g_{\nu,k}) \neq 0$. Nun ist $\varphi(g_{\nu,k})$ ein primitives Element vom Gewicht $\bar\omega+\nu$, erzeugt also nach Beispiel 2) zu Satz 3 einen Modul isomorph $L_K(\bar\omega+\nu)$. In $M_K(\bar\omega)\otimes E_K$ erzeugt $\bar g_{\nu,k}$ einen Modul isomorph $M_K(\bar\omega+\nu)$; daher gibt es $u\in U_{A'}^{-s\alpha}$ mit $s=r+\langle\nu,\alpha^\vee\rangle$, so daß $\overline{u g_{\nu,k}} \neq 0$, aber $\varphi(u\, g_{\nu,k})=0$ ist. Alle $X_{-\pi}\, \overline{u g_{\nu,k}}$ mit $R(\pi)=\nu'-\mu$ sind linear unabhängig.

Daher lassen sich die $X_{-\pi}\, u\, g_{\nu,k}$ zu einer A'-Basis $(x_i)_{i\in I}$ von $(U_{A'}\, g_{\nu,k})^\mu$ erweitern. Es ist $\sum_{i\in I} c_i\, x_i = \sum_{R(\pi)=\nu-\mu} b^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi}\, X_{-\pi}\, g_{\nu,k}$ für geeignete $c_i\in\mathbb{C}$, die durch

$$(v\otimes e_{\mu,j}, x_{i'}) = \sum_{i\in I} c_i (x_i, x_{i'}) \qquad \text{für alle } i'\in I \tag{7}$$

gegeben sind. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist die Determinante von (,) für eine A'-Basis von $(U_{A'}\, g_{\nu,k})^\mu$, hat also dieselbe Bewertung wie die von (5). Ist x_i von der Form $X_{-\pi}\, u\, g_{\nu,k}$, so ist $(v\otimes e_{\mu,j}, x_i)$, $(x_{i'}, x_i)\in\big(u\, g_{\nu,k}, (V\otimes E)_{A'}\big)$. Diese Menge ist wegen $\varphi(u\, g_{\nu,k})=0$ in M enthalten. Löst man (7) mit Hilfe der Cramerschen Regel, so treten daher im Zähler Determinanten auf, bei denen in $P(\nu'-\mu)$ Zeilen jedes Element in M liegt. Die Bewertung dieser Determinante ist also mindestens $P(\nu'-\mu)$. Da die Bewertung der Determinante im Nenner genau $P(\nu'-\mu)$ ist, gehören die Lösungen c_i, also auch die $b^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi}$ zu A'.

Wir haben also bisher gezeigt, daß im Fall (i) die $f_{\mu,j}$, im Fall (ii) die $g_{\mu,j}$ zu $(V\otimes E)_{A'}$ gehören. Sei zunächst $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+r\geqq 0$. Es läßt sich offensichtlich eine A'-Orthogonalbasis $g_{\mu,j}$ finden, so daß der Basiswechsel Determinante 1 hat. Sei r_j die Bewertung von $(g_{\mu,j}, g_{\mu,j})$. Nun ist $\big(g_{\mu,j}(V\otimes E)_{A'}\big)=\big(g_{\mu,j}, (V\otimes E)^{\varpi+\mu}_{A'}\big)=(g_{\mu,j}, A'\, g_{\mu,j})=A'(g_{\mu,j}, g_{\mu,j})$. Ist nun $r_j\neq 0$, so ist $\big(g_{\mu,j}, (V\otimes E)_{A'}\big)\subset M$, also $\varphi(g_{\mu,j})=0$; dagegen ist $\varphi(g_{\mu,j})\neq 0$ für $r_j=0$. Wegen ihrer Orthogonalität sind die $\varphi(g_{\mu,j})$ mit $r_j=0$ linear unabhängig; es gibt also in $L_K(\varpi)\otimes E_K$ genau so viel Unterquotienten $L_K(\varpi+\mu)$, wie es j mit $r_j=0$ gibt. Nach Beispiel 2) zu Satz 3 sind es genau $n(\mu)-n(\mu+r\,\alpha)$. Andererseits kennen wir die Summe der r_j; sie ist die Bewertung der Determinante von (,) für die $g_{\mu,j}$, also auch der für die $f_{\mu,j}$, das heißt von $D_E(\mu)\, a_\mu$, mithin $n(\mu+r\,\alpha)$. Daher ist genau $n(\mu+r\,\alpha)$-mal $r_j=1$ und sonst $r_j=0$. Durch Umordnung der $g_{\mu,j}$ erhält man die Gestalt von (i).

Sei nun $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+r<0$. Wäre $\big(g_{\mu,j}, (V\otimes E)_{A'}\big)\neq 0$ für ein j, so wäre $\varphi(g_{\mu,j})\neq 0$. Nun ist $g_{\mu,j}$ zu allen $X_{-\pi}\, g_{\nu,k}$ mit $\nu\neq\mu, s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$ oder $k>n(\mu)$ orthogonal, also auch $\varphi(g_{\mu,j})$ zu den entsprechenden $X_{-\pi}\,\varphi(g_{\nu,k})$. Außerdem ist $\varphi(g_{\nu,k})=0$ für $\nu=s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$ und $1\leqq k\leqq n(\mu)$; daher ist $\varphi(g_{\mu,j})$ zu allen $X_{-\pi}\,\varphi(g_{\nu,k})$ mit $\nu>\mu$ orthogonal, mithin ein primitives Element ungleich Null vom Gewicht $\varpi+\mu$. Dann besäße $L_K(\varpi)\otimes E_K$ einen Unterquotienten $L_K(\varpi+\mu)$, was nach Beispiel 2 zu Satz 3 unmöglich ist. Damit ist das Lemma, also auch Satz 7 bewiesen.

Sei A'' der von $\mathbb{Z}_E$ und allen $\binom{\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle}{s}$ mit $\beta\in B$ und $s\in\mathbb{N}$ erzeugte Teilring von $\mathbb{C}$. Dann ist $A\subset A''$ und für alle μ ist S_μ eine multiplikative Teilmenge von A'', so daß alle $a^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi}$ zu $S_\mu^{-1}A''$ gehören. Seien $V_{A''}=V_{\mathbb{Z}}\otimes A''\subset V$ und $E_{A''}=E_{\mathbb{Z}}\otimes A''\subset E$ sowie $(V\otimes E)_{A''}=V_{A''}\otimes E_{A''}\subset V\otimes E$. Alle diese A''-Moduln sind unter $U_{\mathbb{Z}}$ invariant. Sei k ein Körper, so daß $\operatorname{Char}(k)$ in $\mathbb{Z}_E$ nicht invertierbar ist. Ist $\operatorname{Char}(k)=0$, so sei $\lambda\in\mathfrak{h}_k^*$; ist $\operatorname{Char}(k)\neq 0$, so sei $\lambda\in P(R)^+$. Die kanonische Abbildung von $\mathbb{Z}_E$ in k und die Zuordnung $\langle\omega+\rho,\beta^\vee\rangle\mapsto\langle\lambda+\rho,\beta^\vee\rangle$ für alle $\beta\in B$ induzieren einen Homomorphismus von A'' in k. Weiter gibt es einen Homomorphismus von $U_{\mathbb{Z}}$ in U_k und $U_{\mathbb{Z}}$-Modul-Homomorphismen von $E_{A''}$ in $E_k=E_{\mathbb{Z}}\otimes k=V(\lambda_0)_k$, von $V_{A''}$ in $M_k(\lambda)$ und von $(V\otimes E)_{A''}$ in $M_k(\lambda)\otimes E_k$. Alle diese Abbildungen werden mit $x\mapsto\bar{x}$ bezeichnet. Wir versehen die U_k-Moduln mit geeignet normierten kontravarianten Formen, so daß $(\bar{x},\bar{y})=\overline{(x,y)}$ für alle x, y in einem der $U_{\mathbb{Z}}$-Moduln ist. Nach Voraussetzung sind alle $D_E(\mu)$ in k invertierbar, daher ist $E_k=L_k(\lambda_0)$. Es sei $\varphi\colon (V\otimes E)_{A''}\to L_k(\lambda)\otimes E_k$ der $U_{\mathbb{Z}}$-Homomorphismus, der aus der kanonischen Abbildung $(V\otimes E)_{A''}\to M_k(\lambda)\otimes E_k$ und der Projektion $M_k(\lambda)\otimes E_k\to L_k(\lambda)\otimes E_k$ zusammengesetzt ist; Kern der zweiten Abbildung ist das Radikal der kontravarianten Form.

Sei μ ein Gewicht von E, so daß alle $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ mit $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r\in S_\mu$ invertierbar in k sind. Dann induzieren die Abbildungen von A'' in k und von $(V\otimes E)_{A''}$ in $L_k(\lambda)\otimes E_k$ auch Abbildungen von $S_\mu^{-1}A''$ in k und von $(V\otimes E)_{A''}\otimes S_\mu^{-1}A''$ in $L_k(\lambda)\otimes E_k$, die $U_{\mathbb{Z}}$-linear sind. Dann ist

$$\varphi(f_{\mu,j})=\bar v\otimes\bar e_{\mu,j}-\sum_{\nu>\mu}\sum_{k=1}^{n(\nu)}\sum_{R(\pi)=\nu-\mu}\bar a^{(\mu,j)}_{\nu,k,\pi}X_{-\pi}(\bar v\otimes\bar e_{\nu,k})$$

und $X_{\alpha,n}\varphi(f_{\mu,j})=\varphi(X_{\alpha,n}f_{\mu,j})=0$ für alle $\alpha\in R^+$ und $n>0$. Daher sind die $\varphi(f_{\mu,j})$ primitive Elemente kongruent $\bar v\otimes\bar e_{\mu,j}$ modulo $\sum_{\nu>\mu}U_k^-(\bar v\otimes E_k^\nu)$. Die Determinante von (,) für die $\varphi(f_{\mu,j})$ ist $D_E(\mu)\,\bar a_\mu$. (Der Nenner von a_μ gehört zu S_μ.)

Sei μ ein Gewicht von E, so daß $\lambda+\mu'\notin W_k\cdot(\lambda+\mu)$ für alle Gewichte $\mu'\neq\mu$ von E ist. Dann sind alle $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$ mit $\langle\omega+\rho,\alpha^\vee\rangle-r\in S_\mu$ in k invertierbar. Seien nämlich $\alpha\in R^+$ und $r\in\mathbb{Z}$ mit $n(\mu+r\alpha)>0$ und $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+r<0$. Nun ist $s_\alpha\cdot(\lambda+\mu)=\lambda-(\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r)\,\alpha+s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$. Teilt $\mathrm{Char}(k)$ nun $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r$, so wäre $\lambda+s_\alpha(\mu+r\,\alpha)\in W_k\cdot(\lambda+\mu)$. Da auch $s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$ Gewicht von E ist, müßte $s_\alpha(\mu+r\,\alpha)=\mu$, also $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+r=0$ sein. Das ist ein Widerspruch zu $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle<0$. Wir können also die im letzten Absatz definierte Abbildung φ benutzen und erhalten $\varphi(f_{\mu,j})$ in $L_k(\lambda)\otimes E_k$. Es sind nun die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt. Ist wieder M das zu μ gehörende M_i von Satz 1, so ist $\varphi(f_{\mu,j})$ die orthogonale Projektion von $\bar v\otimes\bar e_{\mu,j}$ in M, also das Element, das in Satz 3 als $f_{\mu,j}$ bezeichnet wurde, und $D_E(\mu)\,\bar a_\mu$ ist die Determinante der damals betrachteten Matrix $(f_{\mu,j},f_{\mu,i})$. Wir haben also gezeigt:

Satz 8. *Seien λ,λ_0,E,μ wie in den Sätzen 1 und 3. Ist* $\mathrm{Char}(k)=p\neq 0$, *so teile p kein $D_E(\nu)$ und sei größer als $d(E)$. Dann ist in Satz 3 genau dann $n=0$, wenn*

$$\prod_{\alpha\in R^+}\prod_{\substack{r>0\\ r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0}}(\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r)^{n(\mu+r\alpha)}$$

von $\mathrm{Char}(k)$ *geteilt wird.*

Corollar. *Ist F die Facette für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda\in F$ und ist $\Re\lambda+\mu\in\bar F$, so ist oben genau dann $n=0$, wenn $\Re\lambda+\mu$ nicht zum oberen Abschluß von F gehört.*

Beweis. Sei $\mathrm{Char}(k)=p$. Sei zunächst $n=0$. Es gibt dann $\alpha\in R^+$, $r,s\in\mathbb{Z}$ mit $r>0$, $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle\geqq 0$, $n(\mu+r\,\alpha)>0$ und $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r=s\,p$. Dann ist $\alpha\in R^{(\lambda)}$ und $s_{\alpha,sp}\cdot(\lambda+\mu)=\lambda+s_\alpha(\mu)-(\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-s\,p)\,\alpha=\lambda+s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$. Nach Voraussetzung ist $\mu=s_\alpha(\mu+r\,\alpha)$, mithin $\langle\mu,\alpha^\vee\rangle+r=0$, also $\langle\lambda+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle=\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r=s\,p\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle$. Daher gehört $\Re\lambda+\mu$ nicht zum oberen Abschluß von F.

Umgekehrt: Es gebe $\alpha\in R^+\cap R^{(\lambda)}$ und $s\in\mathbb{Z}$ mit $\langle\lambda+\rho+\mu,\alpha^\vee\rangle=sp<\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle$. Dann ist $r=-\langle\mu,\alpha^\vee\rangle>0$ sowie $r+\langle\mu,\alpha^\vee\rangle=0\geqq 0$ und $n(\mu+r\alpha)=n(\mu)>0$. Also tritt $\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle-r=sp$ in dem Produkt von Satz 8 auf, folglich ist $n=0$.

Hätten wir hier nicht die Einschränkung für $\mathrm{Char}(k)$, so könnte dies Corollar beim Beweis von Theorem 1 an die Stelle von Satz 6 treten.

Im folgenden seien α_0 die größte kurze Wurzel und h die Coxeter-Zahl von R.

Satz 9. (i) *Betrachten wir Darstellungen $E=V(\lambda_0)$ mit $\lambda_0\in P(R)^+$ winzig oder $\lambda_0=\alpha_0$. Dann ist $d(E)<h$ und $D_E(\mu)\leqq h$ für alle μ mit $E^\mu \neq 0$.*

(ii) *Für jedes Fundamentalgewicht ω_i $(1\leqq i\leqq n)$, das nicht winzig und nicht α_0 ist, gibt es ein $j\neq i$, so daß $\langle \omega_i-\omega_j, \alpha_0^\vee\rangle \geqq 0$ und $\omega_i-\omega_j$ Gewicht einer in* (i) *betrachteten Darstellung ist.*

Beweis. (i) Es ist $D_E(w(\lambda_0))=1$ für alle $w\in W$. Da für winziges λ_0 alle Gewichte μ von E in $W(\lambda_0)$ liegen, sind alle $D_E(\mu)=1$. Für $\lambda_0=\alpha_0$ gilt dies für alle Gewichte $\mu\neq 0$. In diesem Fall ist $D_E(0)$ in [8], S. 18 und S. 20, angegeben und höchstens h. Um $d(E)$ zu berechnen, braucht man nur die Differenz von größtem und kleinstem Gewicht zu bilden. Dies ist in jedem Fall eine einfache Rechnung.

(ii) Seien die ω_i so numeriert wie in [2], Planches I–IX. Ist R vom Typ A_n, so sind alle ω_i winzig. Ist R vom Typ B_n, C_n oder D_n, so ist ω_1 winzig oder gleich α_0, und es ist $\omega_i-\omega_{i-1}$ ein Gewicht von $V(\omega_1)_{\mathbb{C}}$ mit $\langle\omega_i-\omega_{i-1}, \alpha_0^\vee\rangle\geqq 0$, außer $i=n$ bei B_n und $i=n, n-1$ bei D_n. Doch ist ω_i in diesen Ausnahmefällen winzig. Für die übrigen Typen sind in der folgenden Tabelle zuerst die winzigen ω_i, dann $\omega_i=\alpha_0$ angegeben. Dann folgen gewisse $\omega_i-\omega_j$, die positive, kurze Wurzeln sind. Sie sind also Gewichte von $V(\alpha_0)_{\mathbb{C}}$ und haben mit α_0 ein nichtnegatives Produkt.

$$E_6\colon\ \omega_1, \omega_6, \omega_2, \omega_5-\omega_1, \omega_3-\omega_6, \omega_4-\omega_2,$$

$$E_7\colon\ \omega_1, \omega_7, \omega_2-\omega_7, \omega_5-\omega_2, \omega_6-\omega_1, \omega_3-\omega_6, \omega_4-\omega_3,$$

$$E_8\colon\ \omega_8, \omega_1-\omega_8, \omega_7-\omega_1, \omega_2-\omega_7, \omega_6-\omega_2, \omega_3-\omega_6, \omega_5-\omega_3, \omega_4-\omega_5,$$

$$F_4\colon\ \omega_4, \omega_1-\omega_4, \omega_3-\omega_1, \omega_2-\omega_3,$$

$$G_2\colon\ \omega_1, \omega_2-\omega_1.$$

Satz 10. *Ist* $\mathrm{Char}(k)\neq 0$, *so sei* $\mathrm{Char}(k)>h$. *Sei λ ein Gewicht. Sei C eine Kammer für $W_k^{(\lambda)}$ und F eine Wand von C. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2\in\lambda+P(R)$ mit $\mathfrak{R}\lambda_1\in C$, $\mathfrak{R}\lambda_2\in F$, so daß $\lambda_1-\lambda_2$ Gewicht einer der in Satz* 9(i) *betrachteten Darstellungen ist.*

Beweis. Sei $\mathrm{Char}(k)=p$. Sei

$$C_k=\{x\in\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*\,|\,\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle>0 \text{ für alle } \alpha\in B\}\quad \text{für } p=0,$$

$$C_k=\{x\in C_{\mathbb{Q}}\,|\,\langle x+\rho, \alpha_0^\vee\rangle<p\}\quad \text{für } p\neq 0.$$

Dann ist C_k eine Kammer für W_k. Es gibt eine Kammer C' für W_k mit $C'\subset C$, die eine Wand $F'\subset F$ besitzt. Wir können das Problem unter W_k transformieren und wollen daher annehmen, daß $C'=C_k$ ist. Für $1\leqq i\leqq n$ sei $F_k(i)$ die Menge der $x=\sum_{j=1}^n r_j\omega_j-\rho$ mit $r_j\in\mathbb{Q}$, $0<r_j$ für $j\neq i$, $r_i=0$ und für $p\neq 0$ auch mit $\langle x+\rho, \alpha_0^\vee\rangle<p$. Für $p\neq 0$ sei

$$F_k(0)=\left\{x=\sum_{j=1}^n r_j\omega_j-\rho\,\middle|\,r_j\in\mathbb{Q},\ r_j>0 \text{ für alle } j,\ \langle x+\rho, \alpha_0^\vee\rangle=p\right\}.$$

Dann sind die $F_k(j)$ die Wände von C_k. Sei $F_k(i)$ die Wand, die in F enthalten ist. Ändern wir λ um ein Element von $P(R)$ ab, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{R}\lambda\in C_k$ ist. Dies ist für $p=0$ klar; für $p\neq 0$ folgt dies aus $0\in C_k\cap P(R)$ für $p\geqq h$. Sei $\mathfrak{R}\lambda+\rho=\sum_{j=1}^n r_j\omega_j$. Wir können $0<r_j\leqq 1$ für alle j annehmen. Zunächst

sei $i \neq 0$ und α_i die zu ω_i gehörende Basiswurzel. Da $\alpha_i \in R^{(\lambda)}$ ist, muß $r_i \in \mathbb{Z}$, also $r_i = 1$ sein. Ist ω_i winzig oder $\omega_i = \alpha_0$, so sei $\lambda_2 = \lambda - \omega_i$ und $\lambda_1 = \lambda$. Es ist dann $\Re\lambda_2 \in F_k(i) \subset F$ und $\lambda - \lambda_2$ hat die gewünschte Form. Sonst gibt es $j \neq i$ mit $\omega_i - \omega_j$ wie in Satz 9(ii) und $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda - (\omega_i - \omega_j)$ erfüllen die Bedingung. Für $p \neq 0$ benutzt man $\langle \lambda_2 + \rho, \alpha_0^\vee \rangle \leqq \langle \lambda_1 + \rho, \alpha_0^\vee \rangle$, um zu sehen, daß $\lambda_2 \in F_k(i)$ ist. Sei nun also $F \supset F_k(0)$ und $p \neq 0$, also $\lambda \in P(R)$. Gibt es ein winziges ω_i, so ist $\langle \omega_i, \alpha_0^\vee \rangle = 1$; daher gibt es $r \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_1 = r\,\omega_i \in C_k$ und $\lambda_2 = (r+1)\,\omega_i \in F_k(p)$; dann erfüllen λ_1, λ_2 die Bedingung des Satzes. Gibt es kein winziges ω_i, ist also R vom Typ E_8, F_4, oder G_2, so gibt es $\omega_i = \alpha_0$ und ω_j mit $\langle \omega_j, \alpha_0^\vee \rangle = 3$. Wir setzen $\lambda_1 = r\,\omega_i + s\,\omega_j$, $\lambda_2 = (r+1)\,\omega_i + s\,\omega_j$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ an. Es muß dann $p = \langle \lambda_2 + \rho, \alpha_0^\vee \rangle = h + 1 + 2r + 3s$ sein. Diese Gleichung läßt sich immer für $p > h + 2$ und für $p = h + 1$ lösen; da $h + 2$ keine Primzahl ist, läßt sie sich also immer für $p > h$ lösen. Dann erfüllen wieder λ_1 und λ_2 die Bedingung des Satzes.

Theorem 2. *Sei $p = \mathrm{Char}(k)$; ist $p \neq 0$, so sei $p > h$. Sei λ ein Gewicht, so daß es eine Kammer C für $W_k^{(\lambda)}$ mit $\Re\lambda \in C$ gibt. Für $p \neq 0$ sei $\lambda \in P(R)^+$.*

(i) *Ist $\lambda' \in \lambda + P(R)$ mit $\Re\lambda' \in \bar{C}$, aber $\Re\lambda'$ nicht im oberen Abschluß von C, so ist $\sum_{w \in W_k} a(w, \lambda)\, \chi'_k(w.(\lambda')) = 0$.*

(ii) *Seien $\alpha \in R^+ \cap R^{(\lambda)}$ und $r \in \mathbb{Z}$, so daß die Hyperebene $\langle x + \rho, \alpha^\vee \rangle = rp$ Träger einer unteren Wand F von C ist. In* (i) *sei $\Re\lambda' \in F$. Dann ist $a(w, \lambda) + a(w\,s_{\alpha,rp}, \lambda) = 0$ für alle $w \in W_k$ mit $\chi'_k(w.(\lambda')) \neq 0$.*

Beweis. Wir haben hier wie immer vorausgesetzt, daß $a(w, \lambda) = 0$ für $p \neq 0$ und $w.(\lambda) \notin P(R)^+$ ist. Seien zunächst F, α, r wie in (ii). Ist $\Re\lambda' \in F$, so ist $\chi'_k(w.(\lambda')) = \chi'_k(w'.(\lambda'))$ nur für $w.(\lambda') = w'.(\lambda')$, also $w' \in \{w, w\,s_{\alpha,rp}\}$ möglich. Weiter ist es unabhängig davon, welches $\lambda' \in \lambda + P(R)$ mit $\Re\lambda' \in F$ gewählt ist, ob $\chi'_k(w.(\lambda')) = 0$ ist oder nicht. Wir können nach Theorem 1 außerdem λ durch jedes $\lambda_1 \in \lambda + P(R)$ mit $\Re\lambda_1 \in C$ ersetzen. Daher können wir nach Satz 10 annehmen, daß $\mu = \lambda' - \lambda$ Gewicht einer in Satz 9(i) betrachteten Darstellung $V(\lambda_0)_k$ ist. Wegen $\mu \neq 0$ ist $\mu \in W(\lambda_0)$, also ist $\lambda + \mu' \notin W_k.(\lambda + \mu)$ für alle Gewichte $\mu' \neq \mu$ von $L_k(\lambda_0)$. Wegen Satz 9(i) und der Voraussetzung über p können wir das Corollar zu Satz 8 anwenden. Da $\Re\lambda + \mu = \Re\lambda'$ nicht zum oberen Abschluß von C gehört, ist $\sum_{w \in W_k} a(w, \lambda)\, \chi'_k(w.(\lambda')) = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit der verschiedenen $\chi'_k(w.(\lambda'))$ ungleich Null folgt dann (ii).

Sei nun λ' wie in (i). Es gibt eine untere Wand F von C wie in (ii) mit $\Re\lambda' \in \bar{F}$. Ist $\lambda'' \in \lambda + P(R)$ mit $\Re\lambda'' \in F$, so gilt: Aus $\chi'_k(w.(\lambda')) \neq 0$ folgt $\chi'_k(w.(\lambda'')) \neq 0$. Daher können wir in der zu betrachtenden Summe jeweils die Terme zu w und $w\,s_{\alpha,rp}$ für $\chi'_k(w.(\lambda')) \neq 0$ zusammenfassen und sehen mit (ii), wie die Summe Null wird.

Bemerkung. Seien R von Typ A_n und $\mathrm{Char}(k) = p \neq 0$. Es seien F_1 und F_2 Facetten für W_k mit $F_2 \subset \bar{F}_1$, so daß der Träger von F_2 Kodimension eins im Träger von F_1 hat. Wenn $F_1 \cap P(R) \neq \varnothing$ ist, so kann man analog zu Satz 10 zeigen, daß es Gewichte $\lambda_1 \in F_1$ und $\lambda_2 \in F_2$ gibt, so daß $\lambda_1 - \lambda_2$ Gewicht einer Fundamentaldarstellung $E = V(\omega_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ist. Man benutzt dabei, daß jedes $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$ Gewicht einer solchen Darstellung ist. Für alle diese E ist $d(E) \leqq (n+1)/2$ und $D_E(\mu) = 1$ für alle Gewichte μ von E. Daher gilt (i) im Theorem für $\lambda \in P(R)^+ \cap F_1$ und $\lambda' \in P(R) \cap F_2$ für $p > (n+1)/2$, wenn λ' nicht zum oberen Abschluß von F_1 gehört.

Der folgende Beweis ist eine einfache Verallgemeinerung desjenigen von Theorem 5 in [1].

Satz 11. *Sei* $\mathrm{Char}(k)=0$. *Sei* λ *ein Gewicht, so daß* $\mathfrak{R}\lambda$ *zu einer Kammer für* $W_k^{(\lambda)}$ *gehört. Sei* $\alpha \in B$ *mit* $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$. *Dann gilt für alle* $w \in W$: $a(w,\lambda)+a(s_\alpha w,\lambda)=0$.

Beweis. Sei $\mathfrak{g}_k'$ die von $\mathfrak{g}_k^\alpha$ und $\mathfrak{g}_k^{-\alpha}$ erzeugte Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_k$; sie ist isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(k)$. Ist $v \in L_k(\lambda)$ ein erzeugendes primitives Element, so erzeugt v über $\mathfrak{g}_k'$ einen endlichdimensionalen $\mathfrak{g}_k'$-Modul. Die Summe aller $\mathfrak{g}_k'$-Untermoduln endlicher Dimension von $L_k(\lambda)$ ist ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, der v enthält, also $L_k(\lambda)$. Daher ist $\dim(L_k(\lambda)^\mu)=\dim(L_k(\lambda)^{s_\alpha(\mu)})$ für alle Gewichte μ, und $\chi_k(\lambda)$ ist unter s_α invariant. Sei $d=\sum_{w\in W}\det(w)\, e(w(\rho))$. Dann ist d, also auch $d\chi_k(\lambda)$ unter s_α antiinvariant. Andererseits ist

$$d\chi_k(\lambda)=d\sum_{w\in W} a(w,\lambda)\,\chi_k'(w.(\lambda))=\sum_{w\in W} a(w,\lambda)\, e(w(\lambda+\rho)).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Ist oben $\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{N}$, aber $\mathfrak{R}\lambda$ nicht in einer Kammer, so folgt eine entsprechende Aussage, wenn man berücksichtigt, daß die $a(w,\lambda)$ nicht eindeutig festgelegt sind.

§ 6. Eine notwendige Bedingung für $a(w,\lambda)\neq 0$

In diesem Paragraphen sei $\mathrm{Char}(k)=p\neq 0$. Ist $\lambda \in P(R)$ und $w\in W_k$, so sagen wir, daß (w,λ) die Bedingung (A) erfüllt, wenn es Reflexionen $s_1, s_2, \ldots, s_m \in W_k$ mit $\lambda > s_1.(\lambda) > s_2 s_1.(\lambda) > \cdots > s_n \ldots s_2 s_1.(\lambda) = w.(\lambda)$ gibt. Gehört λ zu einer Facette F für W_k und ist $\lambda' \in P(R)\cap \bar{F}$, so gilt: Erfüllt (w,λ) die Bedingung (A), so auch (w,λ').

Sei C eine Kammer, F eine obere Wand von C und H der Träger von F sowie s_H die Spiegelung an H. Nehmen wir an, es sei $\lambda \in C\cap P(R)$. Ist $\mu = s_H.(\lambda)$, so ist $\mu>\lambda$. Es sei $w\in W_k$, so daß (w,λ) die Bedingung (A) erfüllt. Natürlich erfüllt dann $(w s_H, \mu)$ die Bedingung (A). Dies gilt aber auch für (w,μ). Sind nämlich $s_1, s_2, \ldots, s_m$ Spiegelungen an Hyperebenen $H_1, H_2, \ldots, H_m$, ist $w_i = s_i s_{i-1} \ldots s_1$ und ist $\lambda > w_1.(\lambda) > w_2.(\lambda) > \cdots > w_m.(\lambda) = w.(\lambda)$, so gibt es zwei Möglichkeiten: Ist $\mu > w_1.(\mu) > w_2.(\mu) > \cdots > w_m.(\mu) = w.(\mu)$, so ist alles klar. Sonst gibt es ein i mit $w_i.(\mu) < w_{i+1}.(\mu)$; nehmen wir i maximal dafür. Nun sind C und $s_H.(C)$ zwei Kammern, die nur durch die Hyperebene H getrennt sind, also sind $w_i.(C)$ und $w_i s_H.(C)$ Kammern, die nur durch $w_i.(H)$ getrennt sind. Nun ist $w_i.(\mu) < s_{i+1} w_i.(\mu)$ und $w_i.(\lambda) > s_{i+1} w_i.(\lambda)$. Also liegen $w_i.(C)$ und $w_i s_H.(C)$ auf verschiedenen Seiten von H_{i+1}, mithin ist $H_{i+1} = w_i.(H)$ und $s_{i+1} = w_i s_H w_i^{-1}$, also $w_i = s_{i+1} w_i s_H = w_{i+1} s_H$ und $w_{i+1}.(\mu) = w_i.(\lambda)$. Also ist:

$$\mu > \lambda > w_1.(\lambda) > \cdots > w_i.(\lambda) = w_{i+1}(\mu) > w_{i+2}(\mu) > \cdots > w_m.(\mu) = w.(\mu).$$

Ist hier $w.(\lambda)$ dominant, aber $w.(\mu)$ nicht, so gibt es $\alpha \in R^+$, so daß $w.(\lambda)$ und $w.(\mu)$ auf verschiedenen Seiten der Hyperebene $\langle x+\rho, \alpha^\vee\rangle = 0$ liegen. Diese Hyperebene muß $w.(H)$ sein, also ist $s_\alpha = w s_H w^{-1}$ und $w.(\lambda) = s_\alpha w.(\mu)$, mithin $\chi(w.(\mu)) = -\chi(w.(\lambda))$.

Theorem 3. *Sei* R *vom Typ* A_n *und* $p>n$. *Sei* λ *ein dominantes Gewicht, das in einer Kammer* C *für* W_k *liegt. Ist* $a(w,\lambda)\neq 0$ *für ein* $w\in W_k$, *so gibt es Spiege-*

lungen $s_1, s_2, \ldots, s_m \in W_k$ *mit:*

$$\lambda > s_1 \cdot (\lambda) > s_2\, s_1 \cdot (\lambda) > \cdots > s_m \ldots s_2\, s_1 \cdot (\lambda) = w \cdot (\lambda).$$

Beweis. Wir benutzen Induktion über λ und nehmen an, das Theorem sei für alle dominanten $\lambda' < \lambda$ wahr, die in Kammern liegen. Mit Hilfe von Induktion sieht man, daß für die $L_k(w \cdot (\lambda'))$, die in einer Jordan-Hölder-Reihe von $V(\lambda')_k$ oder einem Quotienten von $V(\lambda')_k$ vorkommen, das Paar (w, λ') die Bedingung (A) erfüllt. Daher ist der Charakter jedes Quotienten von $V(\lambda')_k$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination gewisser $\chi(w \cdot (\lambda'))$, für die (w, λ') die Bedingung (A) erfüllt.

Haben alle unteren Wände von C einen Träger von der Form $\langle x + \rho, \alpha^\vee \rangle = 0$ mit $\alpha \in R^+$, so muß C die in Satz 10 betrachtete Kammer C_k sein; dann ist $V(\lambda)_k$ irreduzibel und $a(w, \lambda) \neq 0$ nur für $w = 1$. Sei also F eine untere Wand von C mit Träger H, so daß auch $s_H \cdot (C) \cap P(R)$ aus dominanten Gewichten besteht. Nach Satz 10 gibt es Gewichte $\lambda_1 \in C$ und $\lambda_2 \in F$ sowie ein winziges dominantes Gewicht λ_0, so daß $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ Gewicht von $E = L_k(\lambda_0)$ ist. Sei $\alpha \in R^+$ orthogonal zu H. Für alle Wurzeln $\beta \in R^+$, $\beta \neq \alpha$ gibt es $n_\beta \in \mathbb{N}$ mit $n_\beta p < \langle x + \rho, \beta^\vee \rangle < (n_\beta + 1) p$ für alle $x \in C \cup s_H \cdot (C) \cup F$. Dann ist $n_\beta p \leqq \langle \lambda_2 + \rho + \mu', \beta^\vee \rangle \leqq (n_\beta + 1) p$ für alle Gewichte μ' von E, weil $-1 \leqq \langle \mu', \beta^\vee \rangle \leqq 1$ ist. Daher ist $\lambda_2 + \mu' \in \bar{C} \cup s_H \cdot (\bar{C})$ für alle Gewichte μ' von E. Nun ist $s_H \cdot (\lambda_1) = s_H \cdot (\lambda_2 + \mu) = \lambda_2 + s_\alpha(\mu) \in s_H \cdot (C)$. Die Menge der Gewichte μ' von E mit $\lambda_2 + \mu' \in W_k \cdot (\lambda_2 + \mu)$ ist also $\{\mu, s_\alpha(\mu)\}$. (Dies gilt auch für $E = L_k(\alpha_0)$.) Wegen des Theorems 1 können wir $\lambda = \lambda_1$ annehmen. Sei $V = L_k(\lambda_2)$ und betrachten wir $V \otimes E$. Übernehmen wir die Bezeichnungen von § 1 (mit λ_2 anstelle von λ). Das zu μ gehörende M_i werde mit M bezeichnet. Sei $\mu' = s_\alpha(\mu)$ und $\lambda' = \lambda_2 + \mu'$. Nach Theorem 1 ist $\chi_k(\lambda_2) = \sum_{w \in W_k} a(w, \lambda')\, \chi(w \cdot (\lambda_2))$, also ist $\mathrm{ch}(M) = \sum_{w \in W_k} a(w, \lambda') \{\chi(w \cdot (\lambda)) + \chi(w \cdot (\lambda'))\}$ nach Satz 2. Nach Induktion folgt aus unseren Vorbetrachtungen, daß $\mathrm{ch}(M)$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $\chi(w \cdot (\lambda))$ ist, für die (w, λ) Bedingung (A) erfüllt. Sei $E^\mu = k\, e_1$ und $E^{\mu'} = k\, e_2$, sei f_i die orthogonale Projektion von $v \otimes e_i$ in M. Nach Satz 1 ist $M = U_k^- f_1 + U_k^- f_2$; dann ist $M_1 = U_k^- f_1$ ein Modul zum höchsten Gewicht λ und $M_2 = M/M_1$ ein Modul zum höchsten Gewicht λ'. Sei φ: $M \to M_2$ die kanonische Abbildung. Es ist $\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(M_1) + \mathrm{ch}(M_2)$. Sei M_3 der Orthogonalraum für $(\,,\,)$ von M_1 in M und $M_4 = M_1 \cap M_3$. Weil $(\,,\,)$ auf M nicht ausgeartet ist und weil verschiedene Gewichtsräume für $(\,,\,)$ orthogonal sind, ist $\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(M_1) + \mathrm{ch}(M_3)$, also $\mathrm{ch}(M_3) = \mathrm{ch}(M_2)$. Wegen der Kontravarianz von $(\,,\,)$ ist M_3 ein Untermodul von M, und M_4 ist der Kern von $\varphi|_{M_3}$, also ist $\mathrm{ch}(M_3) = \mathrm{ch}(M_4) + \mathrm{ch}(\varphi(M_3)) = \mathrm{ch}(M_2)$, also $\mathrm{ch}(M_4) = \mathrm{ch}(M_2/\varphi(M_3))$ und $\mathrm{ch}(M_1/M_4) = \mathrm{ch}(M) - \mathrm{ch}(M_2) - \mathrm{ch}(M_2/\varphi(M_3))$. Nun ist $M_1 \neq \{0\}$, weil oben in $\mathrm{ch}(M)$ der Koeffizient von $\chi(\lambda)$ gleich 1 ist. Weil M_4 das Radikal der kontravarianten Form auf M_1 ist, ist $M_1/M_4 = L_k(\lambda)$. Wir haben oben also $\chi_k(\lambda)$ angegeben. Da $\mathrm{ch}(M)$ von der gewünschten Form ist, reicht es nach den Bemerkungen zu Anfang des Beweises, zu zeigen, daß M_2 ein Quotient von $V(\lambda')_k$ ist. Das Theorem folgt also aus:

Satz 12. *Ist* $\lambda \in P(R)^+$ *und* R *vom Typ* A_n, *so ist jeder endlichdimensionale* U_k*-Modul* M *zum höchsten Gewicht* λ *ein Quotient von* $V(\lambda)_k$.

Beweis. Sei v ein primitives Erzeugendes von M. Betrachten wir die Abbildung ψ von U_k^- in M mit $u \mapsto u\, v$. Für alle $\alpha \in B$ gehören alle $X_{-\alpha, r}$ mit $r > \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ zum Kern von ψ. Wäre nämlich $X_{-\alpha, r} v \neq 0$ für ein $r > \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ und r minimal dafür, so erzeugte $X_{-\alpha,r}v$ einen Modul zum höchsten Gewicht $\lambda - r\alpha$. Da $\lambda - r\alpha$ nicht dominant ist, wäre dieser Modul unendlich dimensional. Nun erzeugen diese $X_{-\alpha,r}$ nach Satz II6 von [8], den Kern der entsprechenden Abbildung von $U_{\mathbb{Z}}^-$ nach $V(\lambda)_{\mathbb{Z}}$, also auch den derjenigen von U_k^- in $V(\lambda)_k$. Daher faktorisiert ψ durch $V(\lambda)_k$ und induziert einen Homomorphismus von $V(\lambda)_k$ auf M.

Bemerkungen. 1) Nach einer Bemerkung von Verma in [12] (p. 25) können im Satz alle $s_i \dots s_1.(\lambda)$ dominant gewählt werden.

2) Aus Theorem 1 folgt eine entsprechende Aussage für dominante Gewichte, die auf einer Mauer liegen.

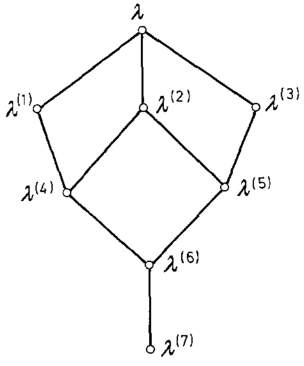
3) Dies Theorem ist ein Spezialfall von Conjecture II von Verma aus [12].

4) Für $\mathrm{Char}(k)=0$ ist die diesem Theorem entsprechende Aussage das Theorem 2 aus [1].

§ 7. Ein Beispiel

Sei R vom Typ A_3 und $\mathrm{Char}(k)=p \geqq 5$. Die Fundamentalgewichte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ seien wie in [2], Planche I numeriert. Statt $r\omega_1 + s\omega_2 + t\omega_3$ schreiben wir kurz (r,s,t). Sei C_0 die Kammer für W_k, zu der alle $\lambda=(r,s,t)-\rho$ mit $0<r,s,t<p$ und $p<r+s$, $s+t<2p$ und $2p<r+s+t<3p$ gehören. Für $\lambda \in \bar{C}_0$, $\lambda+\rho=(r,s,t)$ seien

$$\lambda^{(1)} + \rho = (p-s, p-r, r+s+t-p),$$
$$\lambda^{(2)} + \rho = (2p-s-t, s, 2p-r-s),$$
$$\lambda^{(3)} + \rho = (r+s+t-p, p-t, p-s),$$
$$\lambda^{(4)} + \rho = (p-s, s+t-p, 3p-r-s-t),$$
$$\lambda^{(5)} + \rho = (3p-r-s-t, r+s-p, p-s),$$
$$\lambda^{(6)} + \rho = (2p-r-s, r+s+t-2p, 2p-s-t),$$
$$\lambda^{(7)} + \rho = (p-r, r+s+t-2p, p-t).$$



Ist $\lambda \in C_0 \cap P(R)$, so sind die $\lambda^{(i)}$ neben λ selbst genau die dominanten $w.(\lambda)$, die die Bedingung von Theorem 3 erfüllem. Diese Bedingung induziert eine Ordnungsrelation auf den $\lambda^{(i)}$, die durch das Diagramm oben veranschaulicht wird. Wir wollen zeigen:

$$\chi_k(\lambda^{(7)}) = \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(6)}) = \chi(\lambda^{(6)}) - \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(5)}) = \chi(\lambda^{(5)}) - \chi(\lambda^{(6)}) + \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(4)}) = \chi(\lambda^{(4)}) - \chi(\lambda^{(6)}) + \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(3)}) = \chi(\lambda^{(3)}) - \chi(\lambda^{(5)}) + \chi(\lambda^{(6)}) - \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(2)}) = \chi(\lambda^{(2)}) - \chi(\lambda^{(4)}) - \chi(\lambda^{(5)}) + \chi(\lambda^{(6)}) - 2\chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda^{(1)}) = \chi(\lambda^{(1)}) - \chi(\lambda^{(4)}) + \chi(\lambda^{(6)}) - \chi(\lambda^{(7)}),$$
$$\chi_k(\lambda) \quad = \chi(\lambda) - \chi(\lambda^{(1)}) - \chi(\lambda^{(2)}) - \chi(\lambda^{(3)}) + \chi(\lambda^{(4)}) + \chi(\lambda^{(5)}) - 2\chi(\lambda^{(6)}) + 3\chi\lambda^{(7)}).$$

Für die $\chi_k(\lambda^{(i)})$ mit $1 \leqq i \leqq 7$, $i \neq 2$ folgt dies aus [8], Satz II 11. Betrachten wir nun zunächst $\chi_k(\lambda^{(2)})$. Es gehen $\lambda^{(4)}$ und $\lambda^{(5)}$ aus $\lambda^{(2)}$ durch Spiegelungen an unteren Wänden hervor. Theorem 2 liefert dann die Koeffizienten für $\chi_k(\lambda^{(2)})$ bis auf den von $\chi(\lambda^{(7)})$. Nennen wir diesen zunächst a. Sei λ_1 im oberen Rand von C_0 mit $\lambda_1 + \rho = (r, p, t)$ und $0 < r, t < p$ und $r + t > p$. Dann gehört $\lambda_1^{(2)}$ zum oberen Rand der Kammer von $\lambda^{(2)}$. Nun ist $\chi(\lambda_1^{(5)}) = \chi(\lambda_1^{(4)}) = 0$ und $\chi(\lambda_1^{(6)}) = \chi(\lambda_1^{(7)})$, also nach Theorem 1: $\chi_k(\lambda_1^{(2)}) = \chi(\lambda_1^{(2)}) + (a+1)\chi(\lambda_1^{(6)})$. Nach [8], S. 121 (Fall I 2) ist jedoch $\chi_k(\lambda_1^{(2)}) = \chi(\lambda_1^{(2)}) - \chi(\lambda_1^{(6)})$, also $a+1 = -1$ und $a = -2$.

Betrachten wir $\chi_k(\lambda)$. Nach [8], S. 121 ist der Koeffizient von $\chi(\lambda^{(i)})$ gleich -1 für $i = 1, 2, 3$; aus Theorem 2 folgt, daß er $+1$ für $i = 4, 5$ ist. Sei b (bzw. c) der Koeffizient von $\chi(\lambda^{(6)})$ (bzw. von $\chi(\lambda^{(7)})$). Sei $\lambda_2 + \rho = (p, s, p)$ mit $0 < s < p$; es gehört λ_2 zum oberen Rand von C_0, und es ist $\chi(\lambda_2^{(1)}) = \chi(\lambda_2^{(3)}) = \chi(\lambda_2^{(7)}) = 0$ und $\lambda_2^{(4)} = \lambda_2^{(6)} = \lambda_2^{(2)} = \lambda_2^{(5)}$, also $\chi_k(\lambda_2) = \chi(\lambda_2) + (b+1)\chi(\lambda_2^{(2)})$. Nach [8], S. 121 (Fall II 1 $\cap$ II 3) ist $b+1 = -1$, mithin $b = -2$. Sei schließlich $\lambda_3 + \rho = (r, p, t)$ mit $0 < r, t < p$ und $p > r + t$. Dann gehört λ_3 zum oberen Rand von C_0 und es ist $\chi(\lambda_3^{(1)}) = \chi(\lambda_3^{(3)}) = \chi(\lambda_3^{(4)}) = \chi(\lambda_3^{(5)}) = 0$ und $\lambda_3^{(6)} = \lambda_3^{(7)}$. Also ist $\chi_k(\lambda_3) = \chi(\lambda_3) - \chi(\lambda_3^{(2)}) + (c-2)\chi(\lambda_3^{(6)})$; aus [8], S. 121 (Fall II 2) folgt $c - 2 = +1$, also $c = 3$.

Für $p = 2, 3$ und für $\lambda + \rho = (r, s, t) \in P(R)$ mit $0 < r, s, t \leqq p$ findet sich $\chi_k(\lambda)$ in [8], S. 120f. außer für $p = 3$ und $\lambda + \rho \in \{(3,2,2), (2,2,3)\}$. Definieren wir $\lambda^{(i)}$ wie früher und beschränken wir uns auf $(3,2,2)$, weil sich der andere Fall symmetrisch behandeln läßt. Es ist $\chi(\lambda^{(1)}) = \chi(\lambda^{(7)}) = 0$ und $\lambda^{(2)} = \lambda^{(5)}$ und $\lambda^{(4)} = \lambda^{(6)}$. Setzt man $\lambda' + \rho = (2,2,2)$ und betrachtet man $L_k(\lambda') \otimes L_k(\omega_1)$, so sieht man wie beim Beweis von Theorem 3, daß in $\chi_k(\lambda) - \chi(\lambda)$ nur die $\chi(\lambda^{(i)})$ auftreten. Nach [8], S. 121 (Fall II 1) ist der Koeffizient von $\chi(\lambda^{(3)})$ gleich -1, also gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\chi_k(\lambda) = \chi(\lambda) - \chi(\lambda^{(3)}) + a\chi(\lambda^{(2)}) - b\chi(\lambda^{(4)})$. Zum oberen Rand der Facette von λ gehört λ_1 mit $\lambda_1 + \rho = (3,2,3)$; es ist $\chi(\lambda_1^{(3)}) = 0$ und $\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(4)}$, also $\chi_k(\lambda_1) = \chi(\lambda_1) + (a-b)\chi(\lambda_1^{(2)})$; nach [8], S. 121 (Fall II 1 $\cap$ II 3) ist $a - b = -1$, also $b = a + 1$. Betrachten wir $L_k(\lambda) \otimes L_k(\omega_1)$; $\lambda' = \lambda - \omega_3 = (3,2,1) - \rho$ gehört zum unteren Abschluß der Facette von λ. Der in Satz 1 zu λ' gehörende Summand des Tensorprodukts hat $\chi(\lambda') - \chi(\lambda'^{(3)}) + a\chi(\lambda'^{(2)}) - (a+1)\chi(\lambda'^{(4)}) = a\chi(\lambda')$ als Charakter. Ist $E = L_k(\omega_1)$, so ist $d(E) = 1$ und jedes $D_E(\mu)$ ist 1. Wir können also das Corollar zu Satz 8 anwenden und sehen $a = 0$. Es ist also $\chi_k(\lambda) = \chi(\lambda) - \chi(\lambda^{(3)}) - \chi(\lambda^{(4)})$. Wählt man für $p \geqq 5$ ein λ in der entsprechenden Facette, so erhält man dieselbe Formel. Dies, die Berechnungen oben und (für $p = 2, 3$) die übrigen Fälle von [8], S. 120f. zeigen, daß für den Typ A_3 die Conjecture V von Verma ([12]) immer gilt.

Die Formeln oben zeigen insbesondere: Es gibt im allgemeinen nicht eine exakte Sequenz wie in [4], p. 236 (Formel (64)) vermutet.

Literatur

1. Bernshtein, I.N., Gel'fand, I.M., Gel'fand, S.I.: Structure of representations generated by vectors of highest weight. Functional Analysis Appl. **5**, 1–9 (1971)
2. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V et VI. Paris: Hermann 1968
3. Brauer, R.: Sur la multiplication des caractéristiques des groupes continus et semi-simples. C. r. acad. Sci., Paris, Sér. A, **204**, 1784–1786 (1937)
4. Carter, R.W., Lusztig, G.: On the modular representations of the general linear and symmetric groups. Math. Z. **136**, 193–242 (1974)

5. Conze, N., Dixmier, J.: Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple. Bull. Sci. math. II. Sér. **96**, 339 – 351 (1972)
6. Dixmier, J.: Algébres enveloppantes. Paris: Gauthier-Villars 1974
7. Humphreys, J.E.: Modular representations of classical Lie algebras and semi-simple groups. J. Algebra **19**, 57 – 79 (1971)
8. Jantzen, J.C.: Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen. Bonner math. Schriften **67** (1973)
9. Shapovalov, N.N.: On a bilinear form on the universal enveloping algebra of a complex semisimple Lie algebra. Functional Analysis Appl. **6**, 307 – 312 (1972)
10. Springer, T.A.: Weyl's character formula for algebraic groups. Inventiones math. **5**, 85 – 105 (1968)
11. Tits, J.: Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs. Lecture Notes in Mathematics **386**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
12. Verma, D.N.: Rôle of affine Weyl groups .... Erscheint in: Proceedings of the Budapest Summer School on Group Representations 1971
13. Verma, D.N.: Refinement of a result of Shapovalov ..., Vortrag bei der Tagung über einhüllende Algebren von Lie-Algebren. Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, April 1973
14. Wong, W.J.: Irreducible modular representations of finite Chevalley groups. J. Algebra **20**, 355 – 367 (1972)

Dr. Jens C. Jantzen
Sonderforschungsbereich
Theoretische Mathematik
Mathematisches Institut
der Universität Bonn
D-5300 Bonn
Wegelerstraße 10
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 29. Juli 1974)

Nachtrag bei der Korrektur: Inzwischen hat mir Prof. Humphreys einen allgemeinen Beweis von Satz 12 mitgeteilt, so daß auch Theorem 3 allgemein (für $p > h$) bewiesen werden kann.