Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 1, S. 1—7 (1951).

Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen.

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

1. Inhaltsübersicht.

Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ paarweise vertauschbare Untergruppen einer Gruppe (also $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j \mathfrak{G}_i$), so ist das Produkt $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$ bekanntlich ebenfalls eine Gruppe. Mit der Frage, was über die Struktur von $\mathfrak{G}$ ausgesagt werden kann, wenn über die Faktoren $\mathfrak{G}_i$ Näheres bekannt ist, hat sich im Falle *zweier* Faktoren in den letzten zwei Jahrzehnten eine ganze Reihe von Arbeiten beschäftigt [1]. Dagegen ist im Falle $k > 2$ im wesentlichen nur der grundlegende Satz von HALL [2]) bekannt: Ist die Ordnung jedes Faktors $\mathfrak{G}_i$ eine Primzahlpotenz, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Der Wunsch, die Voraussetzungen dieses Satzes abzuschwächen, hat die vorliegende Arbeit angeregt.

Es genügt sicher nicht, von den $\mathfrak{G}_i$ Auflösbarkeit zu fordern; denn die alternierende Gruppe von fünf Symbolen ist in das Produkt zweier auflösbarer Gruppen der Ordnungen 5 und 12 zerlegbar (die dann von selbst vertauschbar sind) und ist dennoch einfach. Dagegen erscheint es denkbar, daß die folgende Voraussetzung genügt, um die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ zu sichern: Jedes $\mathfrak{G}_i$ ist nilpotent (d. h. direktes Produkt seiner SYLOW-Gruppen). In Richtung auf diese Vermutung wird im folgenden bewiesen: Sie trifft für alle k zu, wenn sie für $k = 2$ richtig ist. Vollständig formuliert lautet unser Hauptergebnis:

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_k$ paarweise vertauschbare, nilpotente Gruppen; alle Produkte $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j$ von je zweien unter ihnen seien auflösbar. Dann ist auch $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$ auflösbar. Bezeichnet ferner $\mathfrak{P}_i$ die p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}_i$ (zu einer von i unabhängigen Primzahl p), so ist das Produkt $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Und ist schließlich $\mathfrak{P}'$ die entsprechend gebildete SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ zu einer anderen Primzahl p', so sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ vertauschbar.*

---

[1]) U. a. I. SCHUR 1933, H. WIELANDT 1935 und 1949, R. KOCHENDÖRFFER 1937, G. ZAPPA 1940/2, G. CASADIO 1941, J. SZÉP 1948—1951, L. RÉDEI 1950, N. ITÔ 1951. Die drei erstgenannten Verfasser benutzen die Sprechweise der Permutationsgruppen und setzen nur die Struktur eines der beiden Faktoren als bekannt voraus.

[2]) P. HALL, A characteristic property of soluble groups. Journal London math. Soc. **12** (1937), 198—200.

Wie der Verfasser einer freundlichen Mitteilung von Herrn Rédei entnimmt, hat Itô in Verschärfung der Ergebnisse von Szép[3]) soeben bewiesen, daß $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sicher dann auflösbar ist, wenn $\mathfrak{G}_1$ nilpotent und $\mathfrak{G}_2$ abelsch oder eine p-Gruppe ist. Zieht man diesen Satz von Itô[4]) heran, so ergibt Satz 1 die folgende Erweiterung des Satzes von Hall:

Satz 2. *Das Produkt paarweise vertauschbarer Gruppen, von denen eine nilpotent ist und die übrigen abelsch sind, soweit sie nicht Primzahlpotenzordnung haben, ist auflösbar.*

Insbesondere ist also das *Produkt mehrerer paarweise vertauschbarer abelscher Gruppen stets auflösbar.* Am Schluß der Arbeit gehen wir ein wenig auf den Sonderfall ein, daß alle Faktoren $\mathfrak{G}_i$ zyklisch sind; derartige Produkte haben eine sehr spezielle Struktur:

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i$ zyklisch, $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j\mathfrak{G}_i$ $(i, j = 1, \ldots, k)$. *Sind* $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ *die sämtlichen Primteiler der Ordnung von* $\mathfrak{G}$, *und ist* $\mathfrak{P}_\varrho$ *eine zu* p_ϱ *gehörige* Sylow-*Gruppe von* $\mathfrak{G}$, *so sind* $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{k-1}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$.

2. Sylow-Gruppen des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

In diesem Abschnitt betrachten wir das Produkt $\mathfrak{G}$ zweier vertauschbarer Gruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ beliebiger Struktur; sie sollen nur endliche Ordnung haben, wie alle Gruppen in dieser Arbeit. Zu den p-Sylow-Gruppen von $\mathfrak{G}$ rechnen wir als Grenzfall auch die nur aus dem Einheitselement E bestehende Gruppe (wenn die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nicht durch p teilbar ist).

Satz 4. $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *seien vertauschbar;* $\mathfrak{P}_1$ *und* $\mathfrak{P}_2$ *seien vertauschbare* Sylow-*Gruppen von* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *zur selben Primzahl p. Dann ist* $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ *eine p-*Sylow-*Gruppe von* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$, *der Durchschnitt* $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ *ist eine p-*Sylow-*Gruppe von* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}$.

Beweis. Für die Ordnung von $\mathfrak{G}$ gilt bekanntlich, wenn wir allgemein die Anzahl der Elemente einer Menge $\mathfrak{M}$ mit $(\mathfrak{M})$ bezeichnen: $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2) = (\mathfrak{G}_1)(\mathfrak{G}_2)/(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2)$. Bezeichnen wir die höchste in der Ordnung von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$ aufgehende Potenz von p mit g_1, g_2, g, d, so folgt $g = g_1 g_2/d$. Andererseits ist

$$(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2) = (\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = g_1 g_2/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2).$$

---

[3]) J. Szép, On factorisable, not simple groups. Acta Sci. math., Szeged, **13** (1950), 239—241.

[4]) N. Itô. Remarks on factorisable groups. Erscheint demnächst in Acta Sci. math., Szeged. — Den gleichen Satz hatte der Verfasser in der ersten Fassung der vorliegenden Note ohne Kenntnis der Arbeiten von Szép und Itô erhalten. Der Beweis wird hier nicht gebracht, da er sich nicht wesentlich von dem Beweis von Itô unterscheidet.

Zusammen mit den trivialen Beziehungen $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) | d$, $(\mathfrak{P}) | g$ ergibt dies $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = d$ und $(\mathfrak{P}) = g$. Das sind die beiden Behauptungen von Satz 4.

Es ist bemerkenswert, daß die zweite Voraussetzung von Satz 4 durch passende Wahl der SYLOW-Gruppen stets erfüllt werden kann, wenn die erste gilt. Um dies zu zeigen, schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 5. *In* $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ *sei* $\mathfrak{G}_1'$ *konjugiert zu* $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2'$ *konjugiert zu* $\mathfrak{G}_2$. *Dann ist* $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' = \mathfrak{G}$, *und es gibt* $G \in \mathfrak{G}$ mit

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = \mathfrak{G}_1', \quad G^{-1} \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}_2'.$$

Beweis. (a) Zunächst werde $\mathfrak{G}_2' = \mathfrak{G}_2$ vorausgesetzt. Es gibt $H \in \mathfrak{G}$ mit $H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}_1'$. Wir zerlegen $H = G_1 G_2$ mit $G_i \in \mathfrak{G}_i$ und setzen $G = G_2$. Dann wird

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = G_2^{-1} \mathfrak{G}_1 G_2 = G_2^{-1} G_1^{-1} \mathfrak{G}_1 G_1 G_2 = H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}_1'$$
$$G^{-1} \mathfrak{G}_2 G = G_2^{-1} \mathfrak{G}_2 G_2 = \mathfrak{G}_2$$
$$\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2' = G^{-1} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}.$$

(b) Im allgemeinen Fall wählen wir gemäß (a) ein $L \in \mathfrak{G}$ mit

$$L^{-1} \mathfrak{G}_1 L = \mathfrak{G}_1', \quad L^{-1} \mathfrak{G}_2 L = \mathfrak{G}_2$$

und haben $\mathfrak{G}_1' \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$. Hieraus folgt, wieder nach (a), die Existenz eines $K \in \mathfrak{G}$ mit $K^{-1} \mathfrak{G}_1' K = \mathfrak{G}_1'$, $K^{-1} \mathfrak{G}_2 K = \mathfrak{G}_2'$. Nun leistet $G = LK$ das Gewünschte.

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$, *so gibt es zu jeder Primzahl p eine* SYLOW-*Gruppe* $\mathfrak{P}_i$ *von* $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ *derart, daß* $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ *eine p-*SYLOW-*Gruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist.*

Beweis. Wir wählen irgendwelche p-SYLOW-Gruppen $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Dann gibt es nach den SYLOWschen Sätzen zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i < \mathfrak{P}^*$ $(i = 1, 2)$. Wir wählen nach Hilfssatz 5 ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i$ und setzen

$$G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G = \mathfrak{P}_i, \quad G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{P}_i < G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i, \quad (\mathfrak{P}_i) = (\mathfrak{P}_i^*), \quad (\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}^*).$$

Daher sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}$ p-SYLOW-Gruppen von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Bezeichnen wieder g_1, g_2, g, d die beim Beweis von Satz 4 eingeführten Potenzen von p, so haben wir zur Abschätzung der Elementezahl von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ die Beziehung

$$7. \qquad (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = \frac{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}{(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)} \geq \frac{g_1 g_2}{d} = (\mathfrak{P}).$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{P}_i = G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G < G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 < \mathfrak{P}.$$

Aus 7. folgt daher $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$, hieraus $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$. Damit ist Satz 6 bewiesen. Besonders einfach ist der Fall, daß sowohl in $\mathfrak{G}_1$ wie in $\mathfrak{G}_2$ nur je eine p-SYLOW-Gruppe vorhanden ist; dann müssen diese beiden miteinander vertauschbar sein. Insbesondere gilt daher:

Satz 8. *Sind $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, so sind die beiden* SYLOW*-Gruppen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar, und ihr Produkt ist eine p-*SYLOW*-Gruppe von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$.*

3. Sylow-Komplemente des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

Unter einem p-SYLOW-Komplement der Gruppe $\mathfrak{G}$ verstehen wir nach HALL eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die als Ordnung den größten zu p fremden Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$ hat. Die Bedeutung dieses Begriffes beruht darauf, daß $\mathfrak{G}$ genau dann auflösbar ist, wenn $\mathfrak{G}$ zu jeder Primzahl p mindestens ein p-SYLOW-Komplement enthält[2]). — In einem gewissen Ausmaß lassen sich die eben für SYLOW-Gruppen bewiesenen Sätze auf SYLOW-Komplemente übertragen.

Satz 9. *$\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien vertauschbar; $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ seien vertauschbare* SYLOW*-Komplemente zur selben Primzahl p. Dann ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein p-*SYLOW*-Komplement von $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$; der Durchschnitt $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ ist ein p-*SYLOW*-Komplement von $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}$.*

Der Beweis verläuft wörtlich wie der von Satz 4; nur hat man jetzt unter g_1, g_2, g, d den *größten p-freien Teiler* der Ordnung von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$ zu verstehen.

Satz 10. *Die Gruppe $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann gibt es zu jeder Primzahl p ein* SYLOW*-Komplement $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ derart, daß $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ ein p-*SYLOW*-Komplement von $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ sind auflösbar, enthalten also p-SYLOW-Komplemente $\mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P}_1^*$, $\mathfrak{P}_2^*$. Nach HALL[5]) gibt es zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1}\mathfrak{P}_i^* A_i < \mathfrak{P}^*$ $(i = 1, 2)$. Nach derselben Vorschrift wie beim Beweis von Satz 6 wählen wir $G \in \mathfrak{G}$ und definieren wir $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}$. Dann sind diese Gruppen p-SYLOW-Komplemente von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}$, und es ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 < \mathfrak{P}$. Da wieder die Abschätzung 7. gilt (mit der beim Beweis von Satz 9 eingeführten Bedeutung von g_1 usw.), folgt $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_1$ und die Behauptung über $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. — Wir heben den Sonderfall nilpotenter Faktoren hervor, in welchem es zu jeder Primzahl nur ein SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_i$ gibt:

Satz 11. *Sind $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, deren Produkt $\mathfrak{G}$ auflösbar ist, so sind die beiden* SYLOW*-Komplemente von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar; ihr Produkt ist ein p-*SYLOW*-Komplemeut von $\mathfrak{G}$.*

---

5) P. HALL, A note on soluble groups. Journal London math. Soc. 3 (1928), 98—105.

4. Beweis von Satz 1.

Es sei $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j \mathfrak{G}_i$ auflösbar, $\mathfrak{G}_i$ nilpotent $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. Für eine beliebige, fest gewählte Primzahl p bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_i$ die p-SYLOW-Gruppe und mit $\mathfrak{Q}_i$ das p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_i$. Wir gehen schrittweise vor.

(a) Wir zeigen zunächst, daß die Gruppen

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}$$

eine p-SYLOW-Gruppe und ein p-SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}$ sind, und daß je zwei Faktoren desselben Produkts miteinander vertauschbar sind. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 8 und 11; nach diesen ist auch der erste Teil der Behauptung richtig für $k = 2$. Wir machen einen Induktionsschluß. $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_{k-1} = \mathfrak{P}'$ ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}_1 \ldots \mathfrak{G}_{k-1} = \mathfrak{G}'$; $\mathfrak{P}_k$ ist eine p-SYLOW-Gruppe der mit $\mathfrak{G}'$ vertauschbaren Gruppe $\mathfrak{G}_k$ und ist selbst mit $\mathfrak{P}'$ vertauschbar; nach Satz 4 ist $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}' \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$. Der Beweis für die SYLOW-Komplemente verläuft ebenso mit Hilfe von Satz 9.

(b) Aus der hiermit bewiesenen Existenz eines p-SYLOW-Komplements in $\mathfrak{G}$ für jede Primzahl p folgt, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist.

(c) Bilden wir zu den verschiedenen Primteilern $p, p', p'', \ldots$ von $(\mathfrak{G})$ nach der unter (a) angegebenen Vorschrift die SYLOW-Komplemente $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \ldots$, so sind die aus ihnen zu bildenden Durchschnitte im Sinn von HALL die Glieder eines SYLOW-Systems $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$; sie sind also paarweise vertauschbar [6]). Zu $\mathfrak{S}$ gehört insbesondere der Durchschnitt $\mathfrak{Q}' \cap \mathfrak{Q}'' \cap \ldots$. Er ist eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ [6]) und enthält offensichtlich $\mathfrak{P}$, stimmt also mit $\mathfrak{P}$ überein. Daher ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{S}$ enthalten.

(d) Ist $\mathfrak{P}'$ in bezug auf eine andere Primzahl p' ebenso gebildet wie $\mathfrak{P}$ in bezug auf p, so gehört auch $\mathfrak{P}'$ zu $\mathfrak{S}$ und ist daher mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet. Wir wenden uns nun zum Sonderfall zyklischer Faktoren und setzen zunächst $k = 2$ voraus.

5. Produkte von zwei zyklischen Faktoren.

In diesem Abschnitt bedeuten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ ständig zwei vertauschbare zyklische Gruppen mit dem Produkt $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 12. *Es sei* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$; $\mathfrak{N}$ *sei ein minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$. *Dann ist* $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$, q *Primzahl*, $1 \leqq \alpha \leqq 2$. *Im Falle* $\alpha = 2$ *ist* $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_i) = q$ $(i = 1, 2)$.

Beweis. Nach allgemeinen Sätzen über minimale Normalteiler auflösbarer Gruppen ist $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$ mit einer Primzahl q. Wir zerlegen alle Elemente $N \in \mathfrak{N}$ in der Form $N = N_1 N_2$ mit $N_i \in \mathfrak{G}_i$. Der Kom-

[6]) P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group. Proceed. London math. Soc. **43** (1937), 316—323.

plex $\mathfrak{N}_i$ aller so entstehenden Elemente N_i ist eine Gruppe, denn offenbar ist z. B. $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{G}_2$. Für die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{N}_1$ gilt wegen $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$

$$(\mathfrak{N}_1) = \frac{(\mathfrak{N}_1 \mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N}\mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N})}{(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_2)}.$$

Daher ist $(\mathfrak{N}_1)$ ein Teiler von $(\mathfrak{N})$ und damit eine Potenz von q. Ebenso ist $\mathfrak{N}_2$ eine q-Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$.

Wir bilden das Produkt $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}^*$. Es ist eine Gruppe, denn wir haben $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{N}_1$. $\mathfrak{N}^*$ ist sogar Normalteiler von $\mathfrak{G}$; denn da $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}$ ist, bleibt $\mathfrak{N}^*$ ungeändert bei Ähnlichkeitstransformation mit Elementen aus $\mathfrak{G}_1$, und wegen der Symmetrie der Definition von $\mathfrak{N}^*$ ist $\mathfrak{N}^*$ auch invariant gegenüber $\mathfrak{G}_2$. Wir haben also in $\mathfrak{N}^*$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gefunden, welcher den Normalteiler $\mathfrak{N}$ umfaßt und eine Ordnung q^β besitzt.

Aus der allgemeinen Theorie der Gruppen von Primzahlpotenzordnung folgt, daß der Durchschnitt $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ mit dem Zentrum von $\mathfrak{N}^*$ nicht nur aus E besteht; $\mathfrak{Z}$ ist, wie $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$, Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{N}$ liegt im Zentrum von $\mathfrak{N}^*$. Insbesondere ist $\mathfrak{N}$ elementweise mit $\mathfrak{N}_1$ vertauschbar. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ elementweise vertauschbar sind, daß also $\mathfrak{N}^*$ das *direkte* Produkt von $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ ist ($\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind nach Voraussetzung fremd zueinander).

Da $\mathfrak{N}$ als minimaler Normalteiler nur Elemente N der Ordnungen q und 1 enthält, haben auch die Komponenten N_1 und N_2 in der direkten Produktzerlegung $N = N_1 N_2$ nur die Ordnungen q oder 1. Andererseits ist $\mathfrak{N}_i$ zyklisch. Daher ist $(\mathfrak{N}_i) \leqq q$. Hieraus folgt $(\mathfrak{N}) \leqq (\mathfrak{N}^*) = (\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2) \leqq q^2$. Der Fall $(\mathfrak{N}) = q^2$ kann nur eintreten, wenn $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ ist; dann ist $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_i) = (\mathfrak{N}_i) = q$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 12 folgt durch einen leichten Induktionsschluß, daß *in dem Produkt zweier vertauschbarer zyklischer Gruppen die Indizes einer Hauptreihe sämtlich Primzahlen oder Primzahlquadrate* sind. Wichtiger ist eine andere Folgerung:

Hilfssatz 13. *Es sei p der größte Primteiler von $(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{P}_i$ die p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$. Dann ist die p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. (a) Wir setzen zunächst voraus, daß $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \neq E$ ist. Dann enthält dieser Durchschnitt eine im Zentrum von $\mathfrak{G}$ gelegene Untergruppe $\mathfrak{N}$ von Primzahlordnung q. Da wir den zu beweisenden Satz 13 für die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ schon als richtig annehmen können (offenbar ist sie das Produkt der zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{N}$), ist $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index in $\mathfrak{G}$ nicht durch p teilbar ist, während der Index von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{H}$ eine Potenz von p ist.

Ist $q = p$, so ist $\mathfrak{H}$ eine p-Gruppe, also mit der Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ dientisch; dann ist $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wie behauptet.

Ist $q \neq p$, so ist $\mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{H}$, und da $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}$ elementweise vertauschbar ist, ist $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Hiernach ist $\mathfrak{P}$ die einzige p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{H}$ und daher gleichzeitig mit $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

(b) Sei jetzt der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$. Nach Hilfssatz 12 ententhält $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ einer Ordnung q^α mit $1 \leqq \alpha \leqq 2$, q Primzahl. Mittels einer Induktionsvoraussetzung können wir wieder annehmen, daß das Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Ist $q = p$, so ist $\mathfrak{H}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Ist $q \neq p$, $\alpha = 1$, so liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{H}$ (wegen $q < p$), und wie unter (a) ergibt sich, daß $\mathfrak{P}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Ist schließlich $q \neq p$. $\alpha = 2$, so enthält $\mathfrak{N}$ genau $q + 1$ Untergruppen der Ordnung q; diese werden bei Ähnlichkeitstransformationen mit den Elementen $P \in \mathfrak{P}$ nur untereinander permutiert. Ist aber speziell $P \in \mathfrak{P}_1$, so bleibt die nach Hilfssatz 12 in $\mathfrak{N}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1$ der Ordnung q fest, also werden die übrigen q Gruppen nur untereinander permutiert; da $q < p$ ist, bleiben sie einzeln fest, und zwar zunächst als Ganze, dann aber sogar elementweise. Demnach ist $\mathfrak{N}$ elementweise mit $\mathfrak{P}_1$ vertauschhar; dasselbe gilt für $\mathfrak{P}_2$, also liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{H}$, und $\mathfrak{P}$ erweist sich wie früher als Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

6. Produkte von mehreren zyklischen Gruppen.

Wir bereiten den Beweis des in der Einleitung formulierten Satzes 3 vor.

Hilfssatz 14. *Es sei* $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_i$ *zyklisch*, $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j\mathfrak{G}_i$; p *sei der größte Primteiler von* $(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{P}_i$ *die p-SYLOW-Gruppe von* $\mathfrak{G}_i$. *Dann ist* $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ *die einzige p-SYLOW-Gruppe von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Daß $\mathfrak{P}$ eine p-SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}$ ist, ist uns schon aus Satz 1 bekannt. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Für $i \neq j$ ist $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j$ stets ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j$ (das ist trivial, wenn p in der Ordnung von $\mathfrak{G}_i\mathfrak{G}_j$ nicht aufgeht, und gilt im andern Fall nach Hilfssatz 13). Da wir $\mathfrak{P}$ wegen $\mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j\mathfrak{P}_i$ auch in der Form

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_i\mathfrak{P}_k$$

schreiben können, ist $\mathfrak{P}$ invariant gegenüber $\mathfrak{G}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), daher auch gegenüber $\mathfrak{G}$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 14 folgt die Behauptung von Satz 3 unmittelbar durch einen Induktionsschluß, da mit $\mathfrak{G}$ auch jede Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ das Produkt paarweise vertauschbarer zyklischer Gruppen ist.

(Eingegangen am 10. Juni 1951.)