KUNZ, E.
Math. Zeitschr. 76, 56—74 (1961)

Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper

Von
ERNST KUNZ

Die folgende Arbeit knüpft an (unveröffentlichte) Untersuchungen von F. K. SCHMIDT über Differentialformen algebraischer Funktionenkörper an. F. K. SCHMIDT wies darauf hin, daß es für die Behandlung inseparabler algebraischer Funktionenkörper K zweckmäßig sein wird, statt der üblicherweise benutzten Differentialformen von K über dem Konstantenkörper k solche von K über k^p zu betrachten, wenn $[k:k^p]$ endlich ist. Es soll also der Körper, über dem differenziert wird (der Differentialkonstantenkörper), verschieden vom arithmetischen Konstantenkörper k gewählt werden. Von dieser Idee wird im folgenden Gebrauch gemacht.

Es wird gezeigt werden, daß die Schwierigkeiten, auf die man stößt, wenn man versucht, die Theorie der Differentialformen algebraischer Funktionenkörper auf den Fall auszudehnen, daß der Konstantenkörper k unvollkommen ist, überwunden werden können, wenn man nur einen geeignet gewählten Differentialkonstantenkörper k_0 verwendet, wobei k_0 im allgemeinen von k verschieden ist. Für die ganze Arbeit wird vorausgesetzt, daß die Charakteristik p von k von Null verschieden ist, da sich neue Resultate im wesentlichen nur für unvollkommenes k ergeben werden. Die verwendeten Differentialkonstantenkörper k_0 sind dann immer Zwischenkörper von k^p und k, für die $[k:k_0]$ endlich ist. Ist k vollkommen, dann ist $k_0=k$. Hier erhält man aus den allgemeinen Sätzen die für vollkommenes k bekannten Sätze als Spezialfälle zurück. Ist $[k:k^p]$ endlich, so kann stets $k_0=k^p$ gewählt werden. Dies bedeutet, daß die verwendete Differentiation von K die absolute Differentiation ist (Differentiation über dem Primkörper), da bei jeder Differentiation von K der Körper k^p in Null abgebildet wird. Auch im allgemeinen Fall, wenn $[k:k^p]$ nicht endlich ist, handelt es sich bei der Differentiation über k_0 im Grunde um die absolute Differentiation, wobei nur noch zusätzlich geeignete Elemente in Null abgebildet werden, damit man zu einem endlichen Differentialmodul gelangt. Dabei ist es weitgehend willkürlich, welche Elemente von K in Null abgebildet werden, weshalb auch der Differentialkonstantenkörper nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Nichteindeutigkeit des Differentialkonstanenkörpers spielt aber keine große Rolle, weil sich die wichtigsten, mit Hilfe der Differentialformen gewonnenen Begriffe, nämlich die kanonische Klasse eines abstrakten Modells V von K und das geometrische Geschlecht von V als unabhängig von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers erweisen.

Bei der Darstellung des Verhaltens der Differentialformen auf abstrakten vollständigen Modellen V von K folge ich dem von ZARISKI in [7] für algebraisch abgeschlossenes k und projektive Varietäten V gegebenen Aufbau. Es zeigt sich, daß sich alle wesentlichen Sätze mühelos auf den Fall eines beliebigen Konstantenkörpers übertragen lassen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Änderung der kanonischen Klasse eines abstrakten vollständigen Modells von K bei algebraischer Erweiterung von K untersucht. Es stellt sich heraus, daß die entsprechenden Verhältnisse vorliegen, wie sie für algebraische Funktionenkörper einer Variablen bekannt sind.

Durch Anwendung auf algebraische Funktionenkörper K einer Variablen ergibt sich, daß die hier definierte kanonische Klasse des singularitätenfreien Modells V von K mit der im Riemann-Rochschen Satz auftretenden kanonischen Klasse übereinstimmt. Das geometrische Geschlecht von V erweist sich als identisch mit dem Geschlecht von K. Hierin hat man die hauptsächliche Rechtfertigung für die Einführung der Differentialkonstantenkörper zu erblicken. Bei Verwendung von Differentialformen über dem arithmetischen Konstantenkörper k gelangt man auf dem hier eingeschlagenen Weg nicht zur richtigen kanonischen Klasse.

In der Arbeit werden die Grundtatsachen über die Differentialmoduln und die Kählerschen Differenten als bekannt vorausgesetzt und oft stillschweigend benutzt. Sie sind z. B. in [4] zusammengestellt. Die Differenten werden je nach Bedarf als Ideale oder Divisoren aufgefaßt, ohne daß dies in der Schreibweise unterschieden wird.

Herrn Prof. F. K. SCHMIDT möchte ich für seine wertvollen Anregungen danken, ebenso den Herren Dr. R. BERGER und Dr. H. J. NASTOLD für ihre freundlichen Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

§ 1. Charakterisierung regulärer geometrischer Stellenringe durch Differentiationen

Es sei k ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$ und $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ eine nullteilerfreie affine k-Algebra. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A sei $A_\mathfrak{p}$ der zugehörige Stellenring, dessen maximales Ideal ebenfalls mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet werde. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

SATZ 1. *$A_\mathfrak{p}$ ist genau dann regulär, wenn sein Differentialmodul $M(A_\mathfrak{p})$ ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul ist.*

Ein Beweis für Ringe $A_\mathfrak{p}$ mit endlichem $M(A_\mathfrak{p})$ wurde in [4], S. 177, gegeben, ebenso das Analogon zu Satz 1 im Fall, daß Char. $k = 0$ ist. Der allgemeine Beweis verläuft im Grunde analog, nur daß einige technische Schwierigkeiten zu überwinden sind. Es müssen zunächst einige Vorbemerkungen vorausgeschickt werden, auf die auch später noch zurückgegriffen wird.

Es sei A als Polynomrestklassenring von der Form $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{n}$ gegeben, wobei der Kern $\mathfrak{n}$ von den m Polynomen $F_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, \ldots, X_n)$ erzeugt werde. Ein Unterkörper k' von k, der sämtliche in den F_i $(i = 1, \ldots, m)$ auftretenden Koeffizienten enthält, heißt ein *Definitionskörper für A*. Bekanntlich gilt

HILFSSATZ 1. *$\mathfrak{n} \cap k'[X_1, \ldots, X_n]$ ist das von $F_1, \ldots, F_m$ in $k'[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugte Ideal. Ist $\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}$ eine Basis von k über k', so ist es auch eine Basis von A über $k'[x_1, \ldots, x_n]$: $A = \bigoplus_{\mu \in M} k'[x_1, \ldots, x_n] \cdot \varkappa_\mu$.*

Es werden später nur noch Definitionskörper k' mit den folgenden beiden Eigenschaften auftreten: 1. $k^p \subseteq k'$, 2. $[k' : k^p]$ ist endlich. Wenn wir in Zukunft von Definitionskörpern sprechen, dann sind immer solche gemeint, welche die Eigenschaften 1. und 2. besitzen.

HILFSSATZ 2. *k' sei ein Definitionskörper von $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ eine p-Basis von k über k' und es sei $k_0 = k^p[\{\alpha_i\}_{i \in I}]$. $\beta_1, \ldots, \beta_s$ sei eine p-Basis von k' über k^p. Dann gilt für den Differentialmodul $M(A)$ von A eine Zerlegung:*

$$M(A) = E \oplus F,$$

wobei E ein endlicher Untermodul von $M(A)$ ist, erzeugt von den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_n$, $d\beta_1, \ldots, d\beta_s$, F ein freier Untermodul von $M(A)$ mit der Basis $\{d\alpha_i\}_{i \in I}$. E ist isomorph zum Differentialmodul $M(A/k_0)$ und F ist isomorph zu $A \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$, wo $M(k_0/k^p)$ den Differentialmodul von k_0 über k^p bedeutet.

BEWEIS. $\beta_1, \ldots, \beta_s$, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ ist eine p-Basis von k über k^p. Wir schreiben $A = k^p[\beta_1, \ldots, \beta_s, x_1, \ldots, x_n, \{\alpha_i\}_{i \in I}]$ als Polynomrestklassenring über k^p in der Form $A = k^p[Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n, \{Z_i\}_{i \in I}]/\mathfrak{m}$. Im Kern $\mathfrak{m}$ kommen sicher die Polynome $Y_j^p - \beta_j^p$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $Z_i^p - \alpha_i^p$ $(i \in I)$ vor, ferner die Polynome $F_k(Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$, die man erhält, wenn man in den $F_k(X_1, \ldots, X_n)$ sämtliche Koeffizienten mit Hilfe der p-Basis $\beta_1, \ldots, \beta_s$ von k' über k^p ausdrückt und überall β_j durch Y_j ersetzt. Die genannten Polynome erzeugen aber auch $\mathfrak{m}$: Denn rechnet man zunächst modulo dem von den $Y_j^p - \beta_j^p$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $Z_i^p - \alpha_i^p$ $(i \in I)$ erzeugten Ideal, so geht $k^p[Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n, \{Z_i\}]$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$ über, die $F_k(Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n)$ dabei in $F_k(X_1, \ldots, X_n)$.

Für den Differentialmodul $M(A) = M(A/k^p)$ ergibt sich hieraus:

$$M(A) = \Big[\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i \oplus \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i\Big] \Big/ M_0,$$

wo M_0 der von den Elementen $\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial \beta_j}\, dY_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\, dX_i$ $(k = 1, \ldots, m)$ erzeugte Untermodul von $\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i \oplus \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i$ ist. Da die Erzeugenden von M_0 von dZ_i frei sind, findet man

$$M(A) = E \oplus F$$

mit

$$E = \Big[\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i\Big] \Big/ M_0 = \sum_{j=1}^{s} A\, d\beta_j + \sum_{i=1}^{n} A\, dx_i$$

und

$$F = \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i = \bigoplus_{i \in I} A\, d\alpha_i.$$

Wegen $M(k_0/k^p) = \bigoplus_{i \in I} k_0\, d\alpha_i$ ist F isomorph zu $A \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$. Ferner ist $M(A/k_0) \cong M(A)/A\, dk_0 = M(A)/F \cong E$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Folgerung. *Für jedes $A_\mathfrak{p}$ ist $M(A_\mathfrak{p}) = E_\mathfrak{p} \oplus F_\mathfrak{p}$, wo $E_\mathfrak{p}$ ein endlicher Modul isomorph zu $M(A_\mathfrak{p}/k_0)$ ist und $F_\mathfrak{p}$ der freie Modul $F_\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \in I} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i \cong A_\mathfrak{p} \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$.*

Wir benötigen schließlich noch den körpertheoretischen

Hilfssatz 3. *Es sei $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ ein endlicher Erweiterungskörper von k mit $\dim \frac{K}{k} = r$. $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sei eine p-Basis von k über k^p. Dann gibt es eine p-Basis von K über K^p von folgender Art: Sie besteht aus allen Elementen y_λ $(\lambda \in \Lambda)$ mit $t \leqq n$ Ausnahmen und $t + r$ weiteren Elementen aus K.*

Beweis. Es genügt, den Beweis für $n = 1$ zu führen.

1. Fall: Es sei $K = k(x)$ und x sei transzendent über k. Dann ist $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, x eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$.

2. Fall: x sei separabel algebraisch über k. Dann ist $k(x) = k(x^p)$ und daher ist $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ auch eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$.

3. Fall: x genüge einer irreduziblen Gleichung $x^{p^e} - \varkappa = 0$ $(\varkappa \in k)$. Wir betrachten zunächst den Fall $e = 1$: $x \notin k$, $x^p \in k$. Dann gilt auch $x^p \notin k^p$, $x^{p^2} \in k^p$. Es sei $x^p \in k^p[y_{\lambda_1}, \ldots, y_{\lambda_s}]$. Wegen $x^p \notin k^p$ kann ein geeignetes der p-Basiselemente, etwa y_{λ_1}, gegen x^p ausgetauscht werden, so daß $k^p[y_{\lambda_1}, \ldots, y_{\lambda_s}] = k^p[x^p, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_s}]$ wird. Es folgt, daß das System $\{y_\lambda\}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_1}}$, x^p ebenfalls eine p-Basis von k über k^p bildet. Da $1, x, \ldots, x^{p-1}$ eine Basis von $k(x)$ über k bilden, ergibt sich, daß das System $\{y_\lambda\}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_1}}$, x eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$ ist. Für beliebiges e ergibt sich nun die Behauptung sofort durch vollständige Induktion, indem man sukzessive die Elemente $x^{p^{e-1}}, x^{p^{e-2}}, \ldots, x$ zu k adjungiert.

Für eine beliebige algebraische Erweiterung $k(x)$ von k ergibt sich die Behauptung aus dem 2. und 3. Fall.

Wir sind jetzt in der Lage, Satz 1 zu beweisen. Wir wenden Hilfssatz 3 an auf den Quotientenkörper $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ von $A_\mathfrak{p}$ und den Restklassenkörper $\mathfrak{K} = k(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ von $A_\mathfrak{p}$. Als p-Basis von k über k^p verwenden wir das System $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ aus Hilfssatz 2. Nach Hilfssatz 3 dürfen wir annehmen, daß fast alle α_i sowohl in einer p-Basis von K über K^p als auch in einer p-Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^p$ auftreten, etwa alle α_i mit $i \neq i_1, \ldots, i_t$. Setzt man $k_0' = k^p[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t}]$, so ist der p-Grad von k über k_0' gleich $s + t$. In der p-Basis von K über K^p treten daher außer den α_i mit $i \neq i_1, \ldots, i_t$ noch $s + t + r$ weitere Elemente auf, in der p-Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^p$ noch $s + t + r'$ weitere Elemente $\left(r = \dim \frac{K}{k},\ r' = \dim \frac{\mathfrak{K}}{k}\right)$.

Nach der Folgerung aus Hilfssatz 2 ist $M(A_\mathfrak{p}) = \left[E_\mathfrak{p} \oplus \bigoplus_{i = i_1, \ldots, i_t} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i\right] \oplus \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1, \ldots, i_t}} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i$, woraus unmittelbar $E_\mathfrak{p} \oplus \bigoplus_{i = i_1, \ldots, i_t} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i \cong M(A_\mathfrak{p}/k_0')$ folgt. $M(A_\mathfrak{p})$ ist daher genau dann ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul, wenn $M(A_\mathfrak{p}/k_0')$ es ist. $M(A_\mathfrak{p}/k_0')$

ist genau dann frei, wenn sein Rang (= minimale Erzeugendenanzahl) mit dem Rang von $M(K/k'_0)$ übereinstimmt. Nach dem Rangsatz aus [4], S. 171, gilt

$$\operatorname{Rang} M\left(\frac{A_{\mathfrak{p}}}{k'_0}\right) = \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{K}}{k'_0}\right) + \operatorname{Rang}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}+\mathfrak{p}^2) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{q} = (\mathfrak{p} \cap k'_0[A^p_{\mathfrak{p}}])\, A_{\mathfrak{p}}.$$

$M(A_{\mathfrak{p}})$ ist somit genau dann frei, wenn

$$(1) \qquad \operatorname{Rang}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}+\mathfrak{p}^2) = \operatorname{Rang} M\left(\frac{K}{k'_0}\right) - \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{K}}{k'_0}\right)$$

gilt.

Es sei nun π ein Element von $\mathfrak{p} \cap k'_0[A^p_{\mathfrak{p}}]$. Dann ist wegen $k'_0[A^p_{\mathfrak{p}}] = A^p_{\mathfrak{p}}[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1,\ldots,i_t}]$ sicher $\pi = f(\{\alpha_i\}_{i \neq i_1,\ldots,i_t})$, wo f ein Polynom mit Koeffizienten aus $A^p_{\mathfrak{p}}$ ist, das in allen Variablen höchstens vom Grad $p-1$ ist. Modulo $\mathfrak{p}$ erhält man $0 = \dot{f}(\{\dot{\alpha}_i\}_{i \neq i_1,\ldots,i_t})$, wo $\dot{f}$ aus f entsteht, indem man sämtliche Koeffizienten durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{p}$ ersetzt. $A^p_{\mathfrak{p}}$ geht modulo $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}^p$ über, $\dot{f}$ hat daher Koeffizienten aus $\mathfrak{K}^p$. Nun sind die $\dot{\alpha}_i\,(i \neq i_1, \ldots, i_t)$ aber nach Voraussetzung über $\mathfrak{K}^p$ p-unabhängig, mithin ist $\dot{f} \equiv 0$. Alle Koeffizienten von f liegen daher in $\mathfrak{p} \cap A^p_{\mathfrak{p}} \subseteqq \mathfrak{p}^p$. Folglich ist $\pi \in \mathfrak{p}^p$ und daher $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}^p$. $\mathfrak{q}$ kann also in Formel (1) weggelassen werden.

Wegen $k'_0(K^p) = K^p[k'_0] = K^p[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1,\ldots,i_t}]$ ergibt sich nach dem weiter oben Gesagten $\operatorname{Rang} M\left(\frac{K}{k'_0}\right) = p\text{-Grad}\,\frac{K}{k'_0(K^p)} = s+t+r$. Die entsprechende Gleichung gilt auch mit $\mathfrak{K}$ anstelle von K und r' anstelle von r. Trägt man in (1) ein, so erhält man die gleichwertige Beziehung

$$(2) \qquad \operatorname{Rang} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 = r - r' = \dim \frac{K}{k} - \dim \frac{\mathfrak{K}}{k}.$$

Diese ist aber mit der Regularität von $A_{\mathfrak{p}}$ gleichbedeutend. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Differentialkonstantenkörper

Der Modul $M(A_{\mathfrak{p}})$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn $[k:k^p]$ endlich ist. Bei unendlich erzeugtem $M(A_{\mathfrak{p}})$ wird es für das Folgende notwendig sein, dadurch zu einem endlichen Modul überzugehen, daß man einen uninteressanten direkten Summanden von $M(A_{\mathfrak{p}})$ abspaltet. Wir definieren daher:

DEFINITION. Ein Körper k_0 mit $k^p \subseteqq k_0 \subseteqq k$ heißt *Differentialkonstantenkörper für* $A_{\mathfrak{p}}$, wenn

1. $\langle A_{\mathfrak{p}}\, d k_0\rangle$ ein direkter Summand von $M(A_{\mathfrak{p}})$ ist und $\langle A_{\mathfrak{p}}\, d k_0\rangle \cong A_{\mathfrak{p}} \otimes_k M(k_0/k^p)$,
2. $M(A_{\mathfrak{p}}/k_0) = M(A_{\mathfrak{p}})/\langle A_{\mathfrak{p}}\, d k_0\rangle$ endlich ist.

k_0 heißt *Differentialkonstantenkörper für die affine* k*-Algebra* A, wenn k_0 Differentialkonstantenkörper für jeden lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$ von A ist.

Hilfssatz 2 und seine Folgerung zeigen, daß es für jede affine k-Algebra A einen Differentialkonstantenkörper gibt. Da nach 1. $\langle A_{\mathfrak{p}}\, d k_0\rangle$ frei ist und direkter Summand von $M(A_{\mathfrak{p}})$ ergibt sich aus Satz 1 nun sofort

SATZ 2. *Ist k_0 ein Differentialkonstantenkörper für $A_\mathfrak{p}$, so ist $A_\mathfrak{p}$ dann und nur dann regulär, wenn $M(A_\mathfrak{p}/k_0)$ frei ist.*

Wir zeigen noch zwei Hilfssätze über Differentialkonstantenkörper:

HILFSSATZ 4. *Ist k_0 ein Differentialkonstantenkörper eines Stellenringes $A_\mathfrak{p}$, so ist $[k:k_0]$ endlich.*

BEWEIS. Für den Quotientenkörper $K=k(x_1, \ldots, x_n)$ von $A_\mathfrak{p}$ ergibt sich nach 2., daß $M(K/k_0)$ endlich ist, daher ist K über $k_0(K^p)$ endlich erzeugt. Wegen $K^p=k^p(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ ist $k_0(K^p)=k_0(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ und daher ist K über k_0 endlich erzeugt, folglich erst recht k über k_0.

HILFSSATZ 5. *Gegeben seien endlich viele nullteilerfreie affine k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ und ein Körper $\hat{k}$ mit $k^p \subseteqq \hat{k} \subseteqq k$ und $[k:\hat{k}]<\infty$. Dann gibt es stets einen gemeinsamen Differentialkonstantenkörper k_0 für $A_1, \ldots, A_s$ mit $k_0 \subseteqq \hat{k}$.*

BEWEIS. Es sei $\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine p-Basis von $\hat{k}$ über k^p und es sei $k=\hat{k}[\beta_1, \ldots, \beta_t]$. k' sei ein gemeinsamer Definitionskörper für $A_1, \ldots, A_s$, der außerdem noch $\beta_1, \ldots, \beta_t$ enthalte. Dann ist $k'[\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]=k$. Aus dem System $\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ kann eine p-Basis $\{\varkappa_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ von k über k' ausgewählt werden. Der Körper $k_0= k^p[\{\varkappa_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}]$ hat dann nach Hilfssatz 2 alle gewünschten Eigenschaften.

§ 3. Differentialformen auf abstrakten Varietäten

Es sei $K=k(x_1, \ldots, x_n)$ ein algebraischer Funktionenkörper der Dimension r über k und V ein *vollständiges abstraktes Modell* von K/k, d.h. 1. V besteht aus allen lokalen Ringen von Primidealen von endlich vielen affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ mit $Q(A_i)=K (i=1, \ldots, s)$; 2. Ist R ein beliebiger Bewertungsring von K/k mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$, so gibt es genau einen lokalen Ring $\mathfrak{o}$ aus V, der von R dominiert wird, d.h. für genau ein $\mathfrak{o}\in V$ gilt $\mathfrak{o}\subseteqq R$ und $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}$ bedeutet. Der Ring $\mathfrak{o}$ heißt dann das Zentrum von R auf V.

DEFINITION. Es sei R ein Bewertungsring von K/k und $\mathfrak{p}$ sein maximales Ideal. $\mathfrak{p}$ heißt *Primdivisor 1. Art auf V*, wenn das Zentrum von R auf V die Restklassendimension $r-1$ hat*). Unter der *Divisorengruppe von V* verstehen wir die freie multiplikative Gruppe, die von den Primdivisoren 1. Art auf V erzeugt wird.

Das Zentrum $\mathfrak{o}$ von R auf V ist der lokale Ring eines minimalen Primideals eines Ringes A_i. Es sei A_i' die ganze Abschließung von A_i in K. Dann folgt: R ist der lokale Ring eines minimalen Primideals von A_i', also ein diskreter Bewertungsring.

DEFINITION. Ein Unterkörper k_0 von k heißt ein *Differentialkonstantenkörper für V*, wenn k_0 Differentialkonstantenkörper für alle lokalen Ringe von V und für alle Bewertungsringe von Primdivisoren 1. Art auf V ist.

Aus Hilfssatz 5 folgt sofort, daß V immer einen Differentialkonstantenkörper besitzt, weil alle in der Definition genannten Ringe aus endlich vielen

*) d.h. der Restklassenkörper des Zentrums soll über k den Transzendenzgrad $r-1$ haben.

affinen k-Algebren hervorgehen. Die Differentialmoduln $M(R/k_0)$ und $M(\mathfrak{o}/k_0)$ der Bewertungsringe R von Primdivisoren 1. Art auf V und der regulären lokalen Ringe $\mathfrak{o} \in V$ sind dann endliche freie Moduln. Der Differentialmodul $M(K/k_0)$ des Körpers K entsteht aus diesen Moduln, indem man sie tensoriell über R bzw. $\mathfrak{o}$ mit K multipliziert. Bezeichnet d die Differentiation von K über k_0, so kann also $M(R/k_0)$ mit dem Modul $\langle R\,dR\rangle \subseteq M(K/k_0)$ identifiziert werden, entsprechend $M(\mathfrak{o}/k_0)$ mit $\langle \mathfrak{o}\, d\, \mathfrak{o}\rangle$. Anders ausgedrückt: Die Differentiation von R über k_0 bzw. von $\mathfrak{o}$ über k_0 ist die Einschränkung der Differentiation von K über k_0 auf R bzw. $\mathfrak{o}$.

Es sei $du_1, \ldots, du_t$ eine Basis von $M(K/k_0)$ über K. $A(K/k_0)$ bezeichne die äußere Algebra von $M(K/k_0)$. Ihre Elemente ω lassen sich eindeutig in der Form

$$\omega = \varkappa_0 + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varkappa_{i_1 \ldots i_s}\, du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_s} \qquad (\varkappa_0, \varkappa_{i_1 \ldots i_s} \in K) \tag{1}$$

schreiben. Wir nennen ω eine *Differentialform von K über k_0*. Ist ω in $du_1, \ldots, du_t$ homogen vom Grad q, dann heißt ω eine Differentialform q-ter Stufe. Die Elemente von K sind die Differentialformen 0-ter Stufe, die Elemente des Differentialmoduls $M(K/k_0)$ die Differentialformen 1. Stufe. Unter den *Differentialformen höchster Stufe* verstehen wir die t-ter Stufe, die alle von der Form $\varkappa \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_t$ $(\varkappa \in K)$ sind. Für $q > t$ ist jede Differentialform q-ter Stufe gleich 0.

Wir wollen die Differentialformen auf V untersuchen. Zu diesem Zweck ordnen wir jeder Differentialform ω zunächst für jeden Primdivisor 1. Art auf V einen Wert zu.

DEFINITION. Es sei R der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V. Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_t$ aus R heißen ein *System uniformisierender Parameter von R über k_0*, wenn $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_0)$ bilden.

Ein solches System uniformisierender Parameter gibt es offenbar immer. $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ bilden dann auch eine Basis von $M(K/k_0)$ über K, weshalb jedes Element $\omega \in A(K/k_0)$ auch eine Darstellung (1) mit π anstelle von u besitzt.

DEFINITION. $\omega \in A(K/k_0)$ sei mit Hilfe der uniformisierenden Parameter $\pi_1, \ldots, \pi_t$ für R über k_0 in der Form (1) dargestellt. ν sei die zu R gehörige Bewertung. Dann ist

$$\nu(\omega) = \operatorname*{Min}_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \{\nu(\varkappa_0), \nu(\varkappa_{i_1 \ldots i_s})\}.$$

Es ist zu zeigen, daß diese Definition unabhängig ist von der Wahl der uniformisierenden Parameter von R über k_0. Es sei $\pi'_1, \ldots, \pi'_t$ ein weiteres solches System. Dann gilt

$$\{d\pi'_1, \ldots, d\pi'_t\} = \{d\pi_1, \ldots, d\pi_t\} \cdot P$$

mit einer t-reihigen unimodularen Matrix P mit Koeffizienten aus R. Es sei

$$\omega = \varkappa'_0 + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varkappa'_{i_1 \ldots i_s}\, d\pi'_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\pi'_{i_s} \qquad (\varkappa'_0, \varkappa'_{i_1 \ldots i_s} \in K).$$

Man sieht sofort, daß sich $\varkappa_0$ und die $\varkappa_{i_1\ldots i_s}$ linear durch $\varkappa_0'$ und die $\varkappa_{i_1\ldots i_s}'$ mit Koeffizienten aus R ausdrücken lassen. Mithin ist

$$\underset{\substack{i_1<\cdots<i_s\\ 1\leqq s\leqq t}}{\operatorname{Min}}\{\nu(\varkappa_0),\nu(\varkappa_{i_1\ldots i_s})\}\geqq \underset{\substack{i_1<\cdots<i_s\\ 1\leqq s\leqq t}}{\operatorname{Min}}\{\nu(\varkappa_0'),\nu(\varkappa_{i_1\ldots i_s}')\}.$$

Aus Symmetriegründen gilt auch die umgekehrte Ungleichung. Damit ist bewiesen, daß die Definition sinnvoll ist.

Satz 3. *ν durchlaufe alle Bewertungen, die zu Primdivisoren 1. Art auf V gehören. $\omega \neq 0$ sei eine Differentialform von K über k_0. Dann gilt $\nu(\omega)=0$ für fast alle ν.*

Beweis. Wir betrachten zunächst alle Primdivisoren 1. Art auf V, deren Bewertungsringe lokale Ringe eines minimalen Primideals aus einem festen A_i' sind. A_i' ist ein endlicher Erweiterungsring von k_0: $A_i'=k_0[y_1,\ldots,y_m]$. Für die genannten Bewertungsringe R gilt daher: $M(R/k_0)$ wird von $dy_1,\ldots,dy_m$ erzeugt. Nun kann man aus einem Erzeugendensystem von $M(R/k_0)$ immer eine Basis von $M(R/k_0)$ auswählen, also aus $y_1,\ldots,y_m$ ein System uniformisierender Parameter von R über k_0. Dazu gibt es nur endlich viele Möglichkeiten. Um die Werte von ω für die Primdivisoren 1. Art auf V zu bestimmen, genügt es also, endlich viele Darstellungen (1) von ω zu betrachten. Für Elemente $\varkappa$ aus K ist bekannt, daß $\nu(\varkappa)=0$ ist für fast alle ν. Daraus folgt nun die Behauptung von Satz 3.

Wegen Satz 3 kann jeder Differentialform $\omega\in A(K/k_0)$ ein Divisor (ω) zugeordnet werden: Durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren 1. Art auf V, $\nu_{\mathfrak{p}}$ die zugehörigen Bewertungen von K über k, so ist $(\omega)=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\omega)}$.

Definition. Eine Differentialform ω von K über k_0 heißt von *1. Gattung auf V*, wenn (ω) ein ganzer Divisor ist, d.h. $\nu(\omega)\geqq 0$ für alle ν.

Gleichbedeutend damit ist: Für jeden Bewertungsring R eines Primdivisors 1. Art auf V ist ω ein Element der äußeren Algebra $A(R/k_0)$ von $M(R/k_0)$.

Ist R ein beliebiger Unterring von K, so bezeichnen wir mit $A^*(R/k_0)$ den R-Untermodul aus $A(K/k_0)$, der von 1 und allen Differentialformen $dr_{i_1}\wedge\cdots\wedge dr_{i_s}$ mit $r_{i_1},\ldots,r_{i_s}\in R$ $(i_1<\cdots<i_s,\ 1\leqq s\leqq t)$ erzeugt wird. Ist R Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V oder ein regulärer lokaler Ring von V, so ist $A^*(R/k_0)=A(R/k_0)$.

Definition. Ist ω eine Differentialform von K über k_0 und R ein Bewertungsring von K über k oder $R=\mathfrak{o}\in V$, so heißt ω *regulär für R*, wenn $\omega\in A^*(R/k_0)$ ist. ω heißt *reguläre Differentialform von K/k_0*, wenn ω regulär ist für jeden Bewertungsring R von K/k. ω heißt *regulär auf V*, wenn ω für jedes $\mathfrak{o}\in V$ regulär ist.

Ist ω regulär auf V, so ist ω auch eine reguläre Differentialform von K/k_0, weil es zu jedem Bewertungsring R von K/k ein $\mathfrak{o}\in V$ mit $\mathfrak{o}\subseteqq R$ gibt. Eine reguläre Differentialform von K/k_0 ist auch von 1. Gattung auf V. Daher ist „regulär auf V“ der stärkste, „von 1. Gattung auf V“ der schwächste unter den drei Begriffen.

DEFINITION. Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_t \in \mathfrak{o} \in V$ heißen ein *System uniformisierender Parameter für* $\mathfrak{o}$ bezüglich k_0, wenn $\langle \mathfrak{o}\, d\mathfrak{o} \rangle$ ein freier $\mathfrak{o}$-Modul mit der Basis $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ ist.

SATZ 4. *Ist* $\mathfrak{o}$ *ein regulärer Ring von* V, *dann besitzt er ein System uniformisierender Parameter bezüglich* k_0.

Denn in diesem Fall ist $\langle \mathfrak{o}\, d\mathfrak{o} \rangle = M(\mathfrak{o}/k_0)$ ein freier Modul, der dann auch eine aus Differentialen bestehende Basis besitzt.

SATZ 5. V *sei singularitätenfrei (d.h. jedes* $\mathfrak{o} \in V$ *sei regulär). Dann ist jede Differentialform 1. Gattung auf* V *auch regulär auf* V.

BEWEIS. Da jedes $\mathfrak{o} \in V$ regulär ist, ist es insbesondere ganz abgeschlossen. Die Bewertungsringe R von Primdivisoren 1. Art auf V, die $\mathfrak{o}$ umfassen, entsprechen daher umkehrbar eindeutig den minimalen Primidealen von $\mathfrak{o}$ und sind die Quotientenringe von $\mathfrak{o}$ nach diesen Idealen. Ferner gilt $\mathfrak{o} = \bigcap_{\mathfrak{o} \leqq R} R$. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter für $\mathfrak{o}$ bezüglich k_0. Dann ist es auch ein System uniformisierender Parameter für jedes R mit $\mathfrak{o} \leqq R$, da R ein Quotientenring von $\mathfrak{o}$ ist. Es sei

$$\omega = \varrho_0 + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varrho_{i_1 \ldots i_s}\, d\pi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\pi_{i_s} \quad (\varrho_0, \varrho_{i_1 \ldots i_s} \in K)$$

von 1. Gattung auf V. Dann ist $\varrho_0, \varrho_{i_1 \ldots i_s} \in R$ für alle R, mithin auch ϱ_0, $\varrho_{i_1 \ldots s_s} \in \mathfrak{o} = \bigcap_{\mathfrak{o} \leqq R} R$, womit ω als regulär auf V erkannt ist.

FOLGERUNGEN. 1. *Besitzt der Funktionenkörper* K/k *ein singularitätenfreies vollständiges Modell und ist* k_0 *ein Differentialkonstantenkörper von* V, *so sind die Begriffe „reguläre Differentialform auf* V *über* k_0", *„reguläre Differentialform von* K/k_0", *und „Differentialform 1. Gattung auf* V" *äquivalent.*

2. *Ist* V *ein singularitätenfreies,* V' *ein beliebiges vollständiges Modell von* K/k *und* k_0 *ein gemeinsamer Differentialkonstantenkörper von* V *und* V', *so ist eine Differentialform von* K/k_0, *die von 1. Gattung auf* V *ist, auch von 1. Gattung auf* V'.

Es sei V ein beliebiges vollständiges Modell von K/k und k_0 ein Differentialkonstantenkörper von V. Wir betrachten die Differentialformen höchster Stufe von K/k_0. Da sie einen zyklischen K-Modul bilden, bestehen ihre Divisoren auf V aus allen Divisoren einer Divisorenklasse. Wir zeigen

SATZ 6. *Die Klasse der Divisoren auf* V *der Differentialformen höchster Stufe von* K *über* k_0 *hängt nicht vom Differentialkonstantenkörper* k_0 *ab.*

BEWEIS. Es seien k_0 und k_1 zwei Differentialkonstantenkörper für V. Nach Hilfssatz 4 ist $[k:k_0]$ und $[k:k_1]$ endlich. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sei eine p-Basis von k über k_0, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ eine p-Basis von k über k_1. V sei die Menge aller lokalen Ringe der Primideale der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_m$, deren ganze Abschließungen mit $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$ bezeichnet seien. Dann gibt es einen gemeinsamen Definitionskörper k' von $A_1, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$, der überdies $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ enthält. Es folgt $k' k_0 = k' k_1 = k$. Aus jeder p-Basis von k_0 bzw. k_1 über k^p läßt sich daher eine p-Basis $\{\varkappa^{(0)}\}$ bzw. $\{\varkappa^{(1)}\}$ von k über k' auswählen.

Nach Hilfssatz 2 sind dann die Körper $k'_0 = k^p[\{\varkappa^{(0)}\}]$ und $k'_1 = k^p[\{\varkappa^{(1)}\}]$ selbst Differentialkonstantenkörper von V und es ist $k'_0 \subseteqq k_0$ und $k'_1 \subseteqq k_1$. Es genügt daher, den Beweis für die folgenden beiden Fälle zu führen:

a) k_0 ist in k_1 enthalten,

b) k_0 und k_1 sind zwei Differentialkonstantenkörper der Art, wie sie in Hilfssatz 2 auftreten, die zum gleichen Definitionskörper k' gehören.

a) Es sei $\eta_1, \ldots, \eta_s$ eine p-Basis von k_1 über k_0 und R der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V. d sei die Differentiation von K, d_0 die von K über k_0, d_1 die von K über k_1. Aus der Definition des Differentialkonstantenkörpers und Satz 1 folgt dann

$$M(R) = \langle R\, dR\rangle = E \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} R\, d\eta_i \oplus \langle R\, dk_0\rangle,$$

wo E ein endlicher, freier R-Modul ist, der isomorph zu $M(R/k_1)$ ist, während $M(R/k_0) \cong E \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} R\, d\eta_i$ ist. Bildet $d_1\pi_1, \ldots, d_1\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_1)$, dann ist $d_0\pi_1, \ldots, d_0\pi_t$, $d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s$ eine Basis von $M(R/k_0)$. Ist $d_1x_1, \ldots, d_1x_t$ eine Basis von $M(K/k_1)$, so ist $d_0x_1, \ldots, d_0x_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s$ eine Basis von $M(K/k_0)$. Die Determinante der Übergangsmatrix von der Basis $\{d_0x_1, \ldots, d_0x_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s\}$ zur Basis $\{d_0\pi_1, \ldots, d_0\pi_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s\}$ von $M(K/k_0)$ stimmt mit der Determinante der Übergangsmatrix von $\{d_1x_1, \ldots, d_1x_t\}$ zu $\{d_1\pi_1, \ldots, d_1\pi_t\}$ überein. Hieraus ergibt sich, daß die Divisoren der Differentialformen $d_0x_1 \wedge \cdots \wedge d_0x_t \wedge d_0\eta_1 \wedge \cdots \wedge d_0\eta_s$ und $d_1x_1 \wedge \cdots \wedge d_1x_t$ übereinstimmen.

b) Hier ergibt sich aus Hilfssatz 2 sowie Satz 1

$$M(R) = \langle R\, dR\rangle = E_R \oplus \langle R\, dk_0\rangle = E_R \oplus \langle R\, dk_1\rangle$$

mit einem endlichen, freien R-Modul E_R, der nach Hilfssatz 2 eine aus Differentialen bestehende Basis besitzt. Wir zeigen zunächst: Die Moduln E_R aller Bewertungsringe R der Primdivisoren 1. Art auf V erzeugen in $M(K)$ alle denselben K-Modul $K \cdot E_R = E$. Dies ist auf Grund von Hilfssatz 2 klar für zwei Bewertungsringe, die Quotientenringe derselben affinen k-Algebra sind. Es seien nun R und R' zwei beliebige Bewertungsringe von Primdivisoren 1. Art auf V und $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}'$ ihre Zentren auf V. Dann liegt $\mathfrak{o}$ in einem affinen Modell V_a von V und $\mathfrak{o}'$ in einem affinen Modell V'_a von V. Der Durchschnitt $V_a \cap V'_a$ ist nicht leer (weil $K \in V_a$, V'_a) und daher selbst ein abstraktes Modell von K/k (vgl. [2], II, Satz 1). Es gibt daher einen Primdivisor 1. Art auf V, dessen Zentrum auf $V_a \cap V'_a$ liegt. Sein Bewertungsring sei R''. Dann sind R und R'' sowie R' und R'' jeweils Quotientenringe einer affinen k-Algebra. Es folgt $K \cdot E_R = K \cdot E_{R''}$ und $K \cdot E_{R'} = K \cdot E_{R''}$, also $K \cdot E_R = K \cdot E_{R'}$ q.e.d.

d_0 sei die Differentiation von K über k_0, d_1 die von K über k_1. Ist $dx_1, \ldots, dx_t$ eine Basis von E, dann ist $d_ix_1, \ldots, d_ix_t$ eine Basis von $M(K/k_i)$ $(i=0, 1)$. Ist $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ eine Basis von E_R, so ist $d\pi_t, \ldots, d_i\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_i)$ $(i=0, 1)$. Aus $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t = \varkappa \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$ folgt $d_ix_1 \wedge \cdots \wedge d_ix_t = \varkappa \cdot d_i\pi_1 \wedge \cdots \wedge d_i\pi_t$ $(i=0, 1)$. Daher stimmen die Divisoren von $d_0x_1 \wedge \cdots \wedge d_0x_t$ und $d_1x_1 \wedge \cdots \wedge d_1x_t$ überein.

DEFINITION. Die nach Satz 6 von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers k_0 von V unabhängige Klasse der Divisoren der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0 heißt *die kanonische Klasse von* V.

Es sei $\bar{k}$ die algebraische Abschließung von k in K. Die Differentialformen höchster Stufe von K über k_0, die von 1. Gattung auf V sind, bilden einen $\bar{k}$-Modul, der isomorph ist zum $\bar{k}$-Modul aller Vielfachen eines Divisors aus der kanonischen Klasse. Von letzterem ist bekannt, daß seine Dimension über $\bar{k}$ endlich ist.

DEFINITION. Die Dimension des $\bar{k}$-Moduls der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0, die von 1. Gattung auf V sind, heißt das *geometrische Geschlecht von* V. Es wird mit $p_g(V)$ bezeichnet.

Nach Satz 6 hängt $p_g(V)$ nicht vom Differentialkonstantenkörper k_0 von V ab. Ist V ein singularitätenfreies, V' ein beliebiges vollständiges Modell von K/k so folgt $p_g(V) \leqq p_g(V')$ nach Satz 5, Folgerung 2. Zwei singularitätenfreie vollständige Modelle von K/k haben also immer das gleiche geometrische Geschlecht.

DEFINITION. Unter dem *geometrischen Geschlecht* $p_g(K/k)$ *von* K *über* k werde das Minimum aller $p_g(V)$ verstanden, wo V alle vollständigen abstrakten Modelle von K/k durchläuft.

Existiert ein singularitätenfreies vollständiges Modell V von K/k, so ist $p_g(K/k) = p_g(V)$. Es wird sich später zeigen, daß das hier eingeführte geometrische Geschlecht $p_g(K/k)$ für einen Funktionenkörper K einer Variablen über k mit dem im Riemann-Rochschen Satz auftretenden Geschlecht von K übereinstimmt.

§ 4. Verallgemeinerungen der Riemannschen Formel

Ist K ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und x ein separierendes transzendentes Element von K/k, dann gilt für den Divisor des exakten Differentials dx bekanntlich $(dx) = \mathfrak{d}\left(\frac{K}{k(x)}\right) \cdot \mathfrak{n}_x^{-2}$, wo $\mathfrak{d}$ die (Dedekindsche) Differente bedeutet und $\mathfrak{n}_x$ den Nennerdivisor von x (vgl. [3], S. 110). Im folgenden Satz wird eine Verallgemeinerung dieser nach RIEMANN benannten Formel gegeben.

SATZ 7. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper über k und V ein vollständiges abstraktes Modell von K/k. k_0 sei ein Differentialkonstantenkörper von V und $dx_1, \ldots, dx_t$ eine Basis von $M(K/k_0)$. $\mathfrak{p}$ durchlaufe alle Primdivisoren 1. Art auf V, $R_\mathfrak{p}$ die zugehörigen Bewertungsringe. Für jedes $\mathfrak{p}$ sei $\varepsilon_{i\mathfrak{p}} = \pm 1$ so bestimmt, daß $x_i^{\varepsilon_{i\mathfrak{p}}} \in R_\mathfrak{p}$ ist $(i = 1, \ldots, t)$. Ferner sei $\mathfrak{n}_{x_i}$ der Nennerdivisor von x_i $(i = 1, \ldots, t)$ und $\mathfrak{d}_j$ bezeichne die j-te Kählersche Differente. Dann gilt für den Divisor der Differentialform $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_s,\ 1 \leqq s \leqq t)$ die Formel*

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}) = \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_{t-s}\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0\left[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}\right]}\right)}{\mathfrak{n}_{x_{i_1}}^2 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{n}_{x_{i_s}}^2}$$

Beweis. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter von $R_\mathfrak{p}$ bezüglich k_0. Wegen $d x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, d x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}} \in d R_\mathfrak{p}$ gilt dann

$$\{d x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, d x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}\} = \{d\pi_1, \ldots, d\pi_t\} \cdot P$$

mit einer t-reihigen quadratischen Matrix P mit Koeffizienten aus $R_\mathfrak{p}$. Drückt man nun $d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ durch die $d\pi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\pi_{j_s}$ aus, so erhält man als Koeffizienten bis aufs Vorzeichen gerade alle s-reihigen Unterdeterminanten, die sich aus den i_1-ten, $\ldots$, i_s-ten Spalten der Matrix P bilden lassen. Es ist dann $v_\mathfrak{p}(d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}})$ gleich dem Minimum der Werte dieser Unterdeterminanten.

Andererseits gilt $M\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]}\right) \cong M\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0}\right) / \langle d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}\rangle$ und $M\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0}\right)$ ist ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul mit der Basis $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$. Die Kählerschen Differenten von $R_\mathfrak{p}$ über $k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]$ berechnen sich daher nach ihrer Definition aus den Unterdeterminanten der Koeffizientenmatrix, mit der man $d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ durch $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ ausdrückt. Die s-reihigen Unterdeterminanten liefern die Differente $\mathfrak{d}_{t-s}$. Damit ist gezeigt, daß die $\mathfrak{p}$-Komponente des Divisors von $d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{d}_{t-s}\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]}\right)$ übereinstimmt.

Wegen $d x^{-1} = -x^{-2} d x$ folgt nun sofort

$$d x_{i_1} \wedge \cdots \wedge d x_{i_s} = \pm x_{i_1}^{1-\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \cdot \cdots \cdot x_{i_s}^{1-\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}} \cdot d x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge d x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung von Satz 7.

Bemerkung. Satz 7 gilt natürlich auch für Char. $k = 0$ mit $k_0 = k$.

Man kann auch den Differentialformen von K über dem arithmetischen Konstantenkörper k in analoger Weise wie den Differentialformen von K über einem Differentialkonstantenkörper k_0 für jeden Primdivisor 1. Art auf V einen Wert zuordnen. Ist $d x_1, \ldots, d x_t$ eine Basis von $M(K/k)$, so wird $-v_\mathfrak{p}(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)$ definiert als das Minimum aller v mit $\mathfrak{p}^v \cdot (d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t) \subseteqq R_\mathfrak{p} d R_\mathfrak{p} \wedge \cdots \wedge d R_\mathfrak{p}$. Für den hierdurch gegebenen Divisor der Differentialform $d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t$ bewies F. K. Schmidt die Formel (unveröffentlicht)

$$(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t) = \frac{\prod\limits_\mathfrak{p} \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right)}{\prod\limits_\mathfrak{p} \mathfrak{d}_t\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k}\right) \cdot \mathfrak{n}_{x_1}^2 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{n}_{x_t}^2},$$

wobei die Bezeichnungen sinngemäß wie in Satz 7 zu wählen sind. Die durch diese Differentialformen gegebene „kanonische Klasse" erweist sich jedoch im Fall algebraischer Funktionenkörper einer Variablen als nicht identisch mit der kanonischen Klasse des Riemann-Rochschen Satzes.

F. K. Schmidt weist mich noch darauf hin, daß die Differente $\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right)$ eine Schachtelung der folgenden Form gestattet:

$$\mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right) = \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{P_\mathfrak{p}}\right) \cdot \mathfrak{d}_0\left(\frac{P_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right).$$

Hierbei ist $P_{\mathfrak{p}}$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertungsring von $k_0(x_1, \ldots, x_t)$. Der Beweis für diese Tatsache ergibt sich aus der Fortsetzungstheorie der Derivationen. Die Formel liefert eine genauere Einteilung der Primdivisoren, die in $(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)$ aufgehen, als es nach Satz 7 möglich ist.

§ 5. Änderung der kanonischen Klasse bei endlich algebraischer Erweiterung des Funktionenkörpers

Es sei K/k ein algebraischer Funktionenkörper, V ein vollständiges Modell von K/k. L sei ein endlicher algebraischer Oberkörper von K und V' das abgeleitete normale Modell von V in L, d.h. ist V die Menge aller lokalen Ringe von Primidealen der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$, so ist V' die Menge aller lokalen Ringe von Primidealen der ganzen Abschließungen $A'_1, \ldots, A'_s$ der A_i in L (vgl. [*1*]). Das Ziel dieses Paragraphen ist die Herleitung eines Zusammenhangs der kanonischen Klassen von V und V'.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor 1. Art auf V, so erhält man durch die Fortsetzungen seiner Bewertung auf L Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ 1. Art auf V'. Auf diese Weise bekommt man auch alle Primdivisoren 1. Art auf V'. Sind $e_1, \ldots, e_k$ die Verzweigungsexponenten der $\mathfrak{P}_i$ über $\mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{p}$ auf V' der Erweiterungsdivisor $\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{P}_k^{e_k}$ zugeordnet. Es ist klar, was unter dem Erweiterungsdivisor $\mathfrak{A}$ auf V' eines beliebigen Divisors $\mathfrak{a}$ von V zu verstehen ist.

Wir führen die Untersuchung in zwei Schritten durch, indem wir zuerst separabel algebraische Erweiterungen studieren, dann rein inseparable Erweiterungen.

a) Separable algebraische Erweiterungen

Es sei k_0 ein gemeinsamer Differentialkonstantenkörper von V und V'. Ferner sei $M(K/k_0) = K\, d x_1 \oplus \cdots \oplus K\, d x_t$. Ist L separabel algebraisch über K, dann ist $M(L/k_0) = L\, d x_1 \oplus \cdots \oplus L\, d x_t$, wobei die Differentiation $d: L \to M(L/k_0)$ Fortsetzung der Differentiation $d: K \to M(K/k_0)$ ist. Um die Änderung der kanonischen Klasse zu überblicken, genügt es daher, den Divisor von $d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t$ auf V mit dem von $d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t$ auf V' zu vergleichen. Es sei $S_{\mathfrak{P}}$ der Bewertungsring eines Primdivisors $\mathfrak{P}$ 1. Art auf V' und $R_{\mathfrak{p}} = S_{\mathfrak{P}} \cap K$. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter von $S_{\mathfrak{P}}$ über k_0, $\varrho_1, \ldots, \varrho_t$ ein System uniformisierender Parameter von $R_{\mathfrak{p}}$ über k_0 und es gelte $d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t = s \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$. Dann ist s die Determinante der Matrix mit Koeffizienten aus $S_{\mathfrak{P}}$, mit der man $d\varrho_1, \ldots, d\varrho_t$ durch $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ darstellt. Wegen $M(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}}) \cong M(S_{\mathfrak{P}}/k_0)/\langle S_{\mathfrak{P}} d R_{\mathfrak{p}} \rangle = M(S_{\mathfrak{P}}/k_0)/\langle d\varrho_1, \ldots, d\varrho_t \rangle$ erzeugt s auch die 0-te Kählersche Differente $\mathfrak{d}_0(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$. Für die $\mathfrak{P}$-Komponenten der Divisoren von $d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t$ und $d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$ auf V' ergibt sich

$$(d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t)_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d}_0\left(\frac{S_{\mathfrak{P}}}{R_{\mathfrak{p}}}\right)(d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t)_{\mathfrak{P}}.$$

Aus

$$d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t = \varkappa \cdot d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t = \varkappa \cdot s \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$$

folgt

$$v_{\mathfrak{P}}(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t) = v_{\mathfrak{P}}(\varkappa) + v_{\mathfrak{P}}\left(\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_{\mathfrak{P}}}{R_{\mathfrak{p}}}\right)\right).$$

Hieraus folgt nun sofort

SATZ 8. *L sei separabel algebraisch über K. Ist* $\mathfrak{k}$ *ein Divisor aus der kanonischen Klasse von V,* $\mathfrak{K}$ *sein Erweiterungsdivisor auf V', so ist* $\mathfrak{K}\cdot\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{d}_0(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$ *ein Divisor der kanonischen Klasse von V'. Dabei ist das Produkt über alle Primdivisoren 1. Art auf V' zu erstrecken.*

Wir schreiben $\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{d}_0(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})=\mathfrak{d}_0(V'/V)$ und nennen $\mathfrak{d}_0(V'/V)$ die 0-te Kählersche Differente von V' über V.

b) Differentialformen und Tatesche Spur

Bevor wir zu inseparablen Körpererweiterungen übergehen, leiten wir einen Zusammenhang zwischen den Differentialformen und der sog. Tateschen Spur her.

Wegen $M(K/k_0)=K\,d\,x_1\oplus\cdots\oplus K\,d\,x_t$ bilden $x_1,\ldots,x_t$ eine p-Basis von K über $K'=k_0(K^p)$. Wir setzen $K_0=K'$, $K_1=K'[x_1]$, $\ldots$, $K_t=K'[x_1,\ldots,x_t]=K$. R sei der Bewertungsring eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ 1. Art auf V, R_i sei der Bewertungsring von $\mathfrak{p}$ in K_i $(i=0,\ldots,t)$. Wegen $[K_i:K_{i-1}]=p$ ist K_i über K_{i-1} bei $\nu_{\mathfrak{p}}$ entweder unverzweigt oder reinverzweigt. In jedem Fall folgt, daß R_i über R_{i-1} von einem Element y_i erzeugt wird: $R_i=R_{i-1}[y_i]$ $(i=1,\ldots,t)$. Da $R=R_0[y_1,\ldots,y_t]$ ist, bilden $y_1,\ldots,y_t$ ein System uniformisierender Parameter von R über k_0.

Es sei $x_i=\varrho_{0i}+\varrho_{1i}y_i+\cdots+\varrho_{p-1,i}y_i^{p-1}$ mit $\varrho_{ji}\in K_{i-1}$ $(i=1,\ldots,t)$. Dann gilt

$$d\,x_i=\left(\varrho_{1i}+2\varrho_{2i}y_i+\cdots+(p-1)\,\varrho_{p-1,i}y_i^{p-2}\right)d\,y_i+$$
$$+d\,\varrho_{0i}+y_i d\,\varrho_{1i}+\cdots+y_i^{p-1}d\,\varrho_{p-1,i}.$$

Wir setzen

$$\varrho_{1i}+2\varrho_{2i}y_i+\cdots+(p-1)\,\varrho_{p-1,i}\,y_i^{p-2}=D_{y_i}x_i.$$

Da $d\,y_1,\ldots,d\,y_{i-1}$ eine Basis von $K_{i-1}\,d\,K_{i-1}$ bilden, ergibt sich

$$d\,x_i=(D_{y_i}x_i)\cdot d\,y_i+\varkappa_{1i}\,d\,y_1+\cdots+\varkappa_{i-1,i}\,d\,y_{i-1}\quad\text{mit}\quad\varkappa_{ji}\in K\quad(i=1,\ldots,t).$$

Es folgt

$$d\,x_1\wedge\cdots\wedge d\,x_t=\prod_{i=1}^{t}(D_{y_i}x_i)\cdot d\,y_1\wedge\cdots\wedge d\,y_t. \tag{1}$$

Die Elemente $1, x_i, \ldots, x_i^{p-1}$ bilden eine Basis von K_i über K_{i-1}. Unter der *Tateschen Spur* σ_{x_i} von K_i über K_{i-1} versteht man die lineare Abbildung $\sigma_{x_i}:K_i\to K_{i-1}$, die jedem Element $\varkappa=\varkappa_0+\varkappa_1x_i+\cdots+\varkappa_{p-1}x_i^{p-1}\in K_i$ $(\varkappa_0,\ldots,\varkappa_{p-1}\in K_{i-1})$ das Element $\sigma_{x_i}(\varkappa)=\varkappa_{p-1}\in K_{i-1}$ zuordnet. Wir bestimmen die σ_{x_i}-Differente von R_i über R_{i-1}. Dazu haben wir zunächst den Komplementärmodul E_i von R_i zu bestimmen. Da $1, y_i, \ldots, y_i^{p-1}$ eine Basis von R_i über R_{i-1} bilden, findet man eine Basis $z_0,\ldots,z_{p-1}$ von E_i über R_{i-1} durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sigma_{x_i}(z_j\cdot y_i^k)=\delta_{jk}.$$

Wenden wir die Transformationsformel von TATE an (vgl. [6], Satz 1), so erhalten wir

$$\sigma_{x_i}(z_j \cdot y_i^k) = \sigma_{y_i}(z_j \cdot y_i^k \cdot (D_{y_i} x_i)^{1-p}).$$

Aus der Definition der Tateschen Spur ergibt sich nun sofort, daß

$$z_j = (D_{y_i} x_i)^{p-1} y_i^{p-j-1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

eine Lösung des Gleichungssystems ist. Daher ist $E_i = (D_{y_i} x_i)^{p-1} \cdot R_i$. Für die σ_{x_i}-Differente $\mathfrak{d}_i$ von R_i über R_{i-1} folgt hieraus

(2) $$\mathfrak{d}_i = (D_{y_i} x_i)^{1-p} \cdot R_i .$$

Es sei nun $\sigma : K \to K'$ die lineare Funktion, die durch

$$\sigma(\varkappa) = \sigma_{x_1} \circ \sigma_{x_2} \circ \cdots \circ \sigma_{x_t}(\varkappa) \quad \text{für alle } \varkappa \in K$$

definiert wird. Für die mit Hilfe dieser Linearform gebildete Differente $\mathfrak{d}$ von R über R_0 gilt der Schachtelungssatz (vgl. [5], Satz 1)

$$\mathfrak{d} = \prod_{i=1}^{t} \mathfrak{d}_i .$$

Aus (2) folgt

(3) $$\mathfrak{d} = \prod_{i=1}^{t} (D_{y_i} x_i)^{1-p} \cdot R .$$

(3) und (1) ergeben zusammen

SATZ 9. *$\mathfrak{d}$ sei die mit Hilfe der Linearform $\sigma = \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_t}$ gebildete Differente von R über R_0. Dann ist $\mathfrak{d} = (d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)_{\mathfrak{p}}^{1-p}$, wo $(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)_{\mathfrak{p}}$ die $\mathfrak{p}$-Komponente des Divisors $(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)$ bedeutet.*

c) Inseparable Erweiterungen vom Grad p

Es sei $L = K(x)$ mit $x^p \in K$, $x \notin K$. k' sei ein gemeinsamer Definitionskörper der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ und $A'_1, \ldots, A'_s$, deren lokale Ringe gerade V und V' ausmachen. $\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}$ sei eine p-Basis von k über k'. Wir wählen als gemeinsamen Differentialkonstantenkörper von V und V' den Körper $k_0 = k^p[\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}]$. Wegen $L^p \subseteqq K$ gilt $K^p[\{\varkappa_\mu\}] = k_0(K^p) \subseteqq L^p[\{\varkappa_\mu\}] = k_0(L^p) \subseteqq K \subseteqq L$. Wir zeigen zunächst, daß die $\varkappa_\mu$ über L^p p-unabhängig sind (dann natürlich auch über K^p). Es sei $A' = k[x'_1, \ldots, x_n]$ einer der Ringe A'_i. Nach Hilfssatz 1 sind die $\varkappa_\mu$ $(\mu \in M)$ über $k'[x_1, \ldots, x_n]$ p-unabhängig. Dann sind sie aber auch über $L' = k'(x_1, \ldots, x_n)$ p-unabhängig und wegen $L^p = k^p(x_1^p, \ldots, x_t^p) \subseteqq L'$ auch über L^p. Es folgt

$$L^p[\{\varkappa_\mu\}] = K^p[\{\varkappa_\mu\}][x^p] \quad \text{mit} \quad x^p \notin K^p[\{\varkappa_\mu\}].$$

HILFSSATZ 6. *Es sei S der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V' und $R = S \cap K$. Dann ist $S \cap L^p[\{\varkappa_\mu\}] = S^p[\{\varkappa_\mu\}]$ und $R \cap K^p[\{\varkappa_\mu\}] = R^p[\varkappa_\mu\}]$.*

BEWEIS. Wir zeigen die erste Gleichung, die zweite ergibt sich genau so. S sei Quotientenring von $A' = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $S' = S \cap L'$ mit $L' = k'(x_1, \ldots, x_n)$. Wir zeigen zuerst: $S = S'[\{\varkappa_\mu\}]$. Da S^p und k' in S' enthalten sind, gilt

$S^p[k, x_1, \ldots, x_n] = S^p[k', x_1, \ldots, x_n][\{\varkappa_\mu\}] \leqq S'[\{\varkappa_\mu\}]$. $s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sei ein Element der Nennermenge von S. Dann ist $\frac{1}{s^p} \in S^p$. Wegen $s^{p-1} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ergibt sich $\frac{1}{s} \in S^p[k, x_1, \ldots, x_n]$. Es gilt daher $S \leqq S'[\{\varkappa_\mu\}]$ und da die umgekehrte Inklusion trivial ist, folgt $S = S'[\{\varkappa_\mu\}]$. Die $\varkappa_\mu$ $(\mu \in M)$ sind über S' p-unabhängig, da sie über L' p-unabhängig sind.

Als nächstes zeigen wir, daß es Elemente $y_1, \ldots, y_t \in S'$ gibt, die über S^p p-unabhängig sind, so daß $S' = S^p[y_1, \ldots, y_t]$ gilt. Es ist nämlich L' eine endliche, rein inseparable Erweiterung des algebraischen Funktionenkörpers L^p, weshalb für S' und S^p wie in b) für R und R_0 geschlossen werden kann.

Es ergibt sich $S = S^p[\{\varkappa_\mu\}, y_1, \ldots, y_t]$, wobei die Elemente des Systems $\{\varkappa_\mu\}, y_1, \ldots, y_t$ p-unabhängig über S^p sind und daher auch eine p-Basis von L über L^p bilden. Es sei nun $s \in S \cap L^p[\{\varkappa_\mu\}]$. Dann besitzt s als Element von $L^p[\{\varkappa_\mu\}]$ eine Darstellung $s = f(\{\varkappa_\mu\})$, wobei f ein Polynom mit Koeffizienten aus L^p ist, das in allen Variablen vom Grad $\leqq p-1$ ist. Als Element von S besitzt s eine Darstellung $s = g(y_1, \ldots, y_t, \{\varkappa_\mu\})$, wo g ein Polynom mit Koeffizienten aus S^p ist, das in allen Variablen vom Grad $\leqq p-1$ ist. Durch Koeffizientenvergleich folgt hieraus sofort, daß alle Koeffizienten von f in S^p liegen. Also ist $S \cap L^p[\{\varkappa_\mu\}] \leqq S^p[\{\varkappa_\mu\}]$. Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, folgt die im Hilfssatz behauptete Gleichheit.

Es sei $x_1, \ldots, x_{t-1}$ eine p-Basis von K über $k_0(L^p) = L^p[\{\varkappa_\mu\}]$. Dann ist $x, x_1, \ldots, x_{t-1}$ eine p-Basis von L über $k_0(L^p)$ und $x_1, \ldots, x_{t-1}, x^p$ eine p-Basis von K über $k_0(K^p)$. d' sei die Differentiation von L über k_0, d die von K über k_0. Wir vergleichen die Divisoren der Differentialformen $d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p$ auf V und $d'\,x \wedge d'\,x_1 \wedge \cdots \wedge d'\,x_{t-1}$ auf V'.

Zu diesem Zweck betrachten wir die mit Hilfe der nichttrivialen Linearform $\sigma_{x^p} \circ \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}} \circ \sigma_x$ gebildete Differente von S über $S \cap K^p[\{\varkappa_\mu\}] = R^p[\{\varkappa_\mu\}]$, wobei die σ jeweils Tatesche Spuren sind. Den beiden Zerlegungen

$$\sigma_{x^p} \circ (\sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}} \circ \sigma_x) = (\sigma_{x^p} \circ \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}}) \circ \sigma_x$$

entsprechen nach dem Schachtelungssatz Zerlegungen der Differente von folgender Form

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S}{S^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right) \cdot \mathfrak{d}\left(\frac{S^p[\{\varkappa_\mu\}]}{R^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right) = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right) \cdot \mathfrak{d}\left(\frac{R}{R^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right). \tag{4}$$

Es sei $\mathfrak{P}$ der Primdivisor von S, $\mathfrak{p}$ der von R. Dann gilt nach Satz 9:

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S}{S^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right) = (d'\,x \wedge d'\,x_1 \wedge \cdots \wedge d'\,x_{t-1})_{\mathfrak{P}}^{1-p},$$

$$\mathfrak{d}\left(\frac{R}{R^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right) = (d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p)_{\mathfrak{p}}^{1-p}.$$

Wir beweisen jetzt, daß $\mathfrak{d}\left(\frac{S^p[\{\varkappa_\mu\}]}{R^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right) \cdot S = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^p$ ist. Wie unter b) gezeigt, gilt $S = R[y] = R \oplus R \cdot y \oplus \cdots \oplus R \cdot y^{p-}$ und $\mathfrak{d}(S/R) = (D_y\,x)^{1-p} \cdot S$. Es folgt $S^p[\{\varkappa_\mu\}] = R^p[\{\varkappa_\mu\}][y^p]$, wo $1, y^p, \ldots, (y^p)^{p-1}$ eine Basis von $S^p[\{\varkappa_\mu\}]$ über

$R^p[\{\varkappa_\mu\}]$ bilden. Folglich ist

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S^p[\{\varkappa_\mu\}]}{R^p[\{\varkappa_\mu\}]}\right)\cdot S = (D_{y^p}\, x^p)^{1-p}\cdot S = [(D_y\, x)^{1-p}]^p \cdot S = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^p .$$

Aus (4) folgt somit:

$$(d'\,x \wedge d'\,x_1 \wedge \cdots \wedge d'\,x_{t-1})_{\mathfrak{P}}^{1-p}\, \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^p = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)(d\,x_1\wedge\cdots\wedge d\,x_{t-1}\wedge d\,x^p)_{\mathfrak{P}}^{1-p},$$

wo unter $(d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p)_{\mathfrak{P}}$ die $\mathfrak{P}$-Komponente des Erweiterungsdivisors von $(d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p)$ zu verstehen ist. Es folgt

$$(d'\,x \wedge d'\,x_1 \wedge \cdots \wedge d'\,x_{t-1})_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)\cdot (d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p)_{\mathfrak{P}}.$$

Daher unterscheiden sich der Divisor von $d'\,x \wedge d'\,x_1 \wedge \cdots \wedge d'\,x_{t-1}$ auf V' und der Erweiterungsdivisor von $d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{t-1} \wedge d\,x^p$ auf V' nur um $\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$, wo $\mathfrak{P}$ alle Primdivisoren 1. Art auf V' durchläuft und $S_{\mathfrak{P}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ die zugehörigen Bewertungsringe in L und K bedeuten. Wir setzen $\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{d}(V'/V)$ und nennen diesen Divisor die σ_x-Differente von V' über V. Bildet man eine σ-Differente $\mathfrak{d}(V'/V)$ bezüglich einer beliebigen nichttrivialen Linearform σ von L über K, so unterscheidet sie sich von der mit Hilfe der Tateschen Spur σ_x gebildeten Differente nur um den Divisor eines Elements aus L (vgl. [5], S. 421). Ist daher $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Divisor der kanonischen Klasse von V, $\mathfrak{K}$ sein Erweiterungsdivisor auf V' und $\mathfrak{d}(V'/V)$ die bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente von V' über V, so ist $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{d}(V'/V)$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V'.

d) Beliebige endlich algebraische Erweiterungen

Im Fall einer endlichen separablen algebraischen Erweiterung L von K ist bekannt, daß die 0-te Kählersche Differente $\mathfrak{d}_0(V'/V)$ mit der Dedekindschen Differente $\mathfrak{d}(V'/V)$ übereinstimmt. Diese ist die mit Hilfe der gewöhnlichen Spur σ gebildete σ-Differente. In Satz 8 darf daher $\mathfrak{d}_0$ durch eine beliebige σ-Differente $\mathfrak{d}$ ersetzt werden. Zusammen mit c) und dem Schachtelungssatz der σ-Differenten folgt dann sofort

SATZ 10. *L sei eine beliebige endliche algebraische Erweiterung von K, $\mathfrak{k}$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V, $\mathfrak{K}$ sein Erweiterungsdivisor auf V' und $\mathfrak{d}(V'/V)$ die bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente von V' über V. Dann ist $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{d}(V'/V)$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V'.*

e) Anwendung auf einen Spezialfall

Es sei $K = k(x_1, \ldots, x_r)$ ein rationaler Funktionenkörper und L eine endliche algebraische Erweiterung von K. V sei das projektive Modell von $k(x_1, \ldots, x_r)$, welches aus allen lokalen Ringen der Primideale der affinen k-Algebren $k[x_1, \ldots, x_r]$, $k[x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_r], \ldots, k[x_r^{-1}, x_r^{-1}x_1, \ldots, x_r^{-1}x_{r-1}]$ besteht, V' sei das abgeleitete normale Modell von V in L.

Die affinen k-Algebren von V sind ganz abgeschlossen, daher sind die Bewertungsringe der Primdivisoren 1. Art auf V die lokalen Ringe dieser k-Algebren nach ihren minimalen Primidealen. Wir zeigen

HILFSSATZ 7. *Außer den lokalen Ringen der minimalen Primideale von $k[x_1, \dots, x_r]$ gibt es nur noch einen Bewertungsring, der zu einem Primdivisor 1. Art auf V gehört, nämlich den lokalen Ring des Primideals (x_1^{-1}) in $k[x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \dots, x_1^{-1}x_r]$. Ist $\mathfrak{n}_{x_i}$ der Nennerdivisor von x_i auf V $(i=1, \dots, r)$, dann ist $\mathfrak{n}_{x_1} = \cdots = \mathfrak{n}_{x_r}$.*

BEWEIS. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor 1. Art auf V mit $k[x_i^{-1}, x_i^{-1}x_1, \dots, x_i^{-1}x_r] < R_{\mathfrak{p}}$, dem Bewertungsring von $\mathfrak{p}$. Ist dann $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i^{-1}) = 0$, so folgt sofort $\nu_{\mathfrak{p}}(x_1), \dots, \nu_{\mathfrak{p}}(x_r) \geqq 0$, also $k[x_1, \dots, x_r] < R_{\mathfrak{p}}$. Ist $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i^{-1}) > 0$, so kann, weil x_i^{-1} ein Primelement von $k[x_i^{-1}, x_i^{-1}x_1, \dots, x_i^{-1}x_r]$ ist, nur $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i^{-1}) = 1$ gelten. Dann muß aber $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i^{-1}x_j) = 0$ sein $(j=1, \dots, r)$, weil der Restklassenkörper von $R_{\mathfrak{p}}$ den Transzendenzgrad $r-1$ hat. Es folgt somit $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i^{-1}) = 1$ für $j = 1, \dots, r$. $R_{\mathfrak{p}}$ ist daher der lokale Ring von (x_1^{-1}) in $k[x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \dots, x_1^{-1}x_r]$.

Außerdem haben wir gesehen, daß stets gleichzeitig $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i) \geqq 0$ ist $(i=1, \dots, r)$ oder $\nu_{\mathfrak{p}}(x_i) = -1$ $(i=1, \dots, r)$, was $\mathfrak{n}_{x_1} = \cdots = \mathfrak{n}_{x_r}$ beweist.

Wir bezeichnen den gemeinsamen Nennerdivisor von $x_1, \dots, x_r$ mit $\mathfrak{n}_x$. Er ist, wie aus dem Beweis von Hilfssatz 7 hervorgeht, ein Primdivisor 1. Art auf V. $k_0 = k$ ist ein Differentialkonstantenkörper von V. Wir bestimmen den Divisor von $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r$ auf V. Es ergibt sich

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r) = \frac{1}{\mathfrak{n}_x^{r+1}}.$$

Für alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$, die von $\mathfrak{n}_x$ verschieden sind, ist $x_1, \dots, x_r$ ein System uniformisierender Parameter, daher $(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r)_{\mathfrak{p}} = 1$. Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_x$ ist $x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \dots, x_1^{-1}x_r$ ein System uniformisierender Parameter. Wegen

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r = -x_1^{r+1} \cdot dx_1^{-1} \wedge d(x_1^{-1}x_2) \wedge \cdots \wedge d(x_1^{-1}x_r)$$

folgt nun sofort die Behauptung. Zusammen mit Satz 10 ergibt sich

SATZ 11. *Der Erweiterungsdivisor von $\mathfrak{n}_x$ auf V' sei ebenfalls mit $\mathfrak{n}_x$ bezeichnet. Dann besteht die kanonische Klasse von V' aus allen Divisoren*

$$\frac{\mathfrak{d}\left(\frac{V'}{V}\right)}{\mathfrak{n}_x^{r+1}},$$

wo $\mathfrak{d}$ eine bezüglich einer nichttrivialen Linearform σ von L über K gebildete σ-Differente von V' über V ist.

§ 6. Anwendungen auf algebraische Funktionenkörper einer Variablen

Es sei L ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und $K = k(x)$, wo x ein transzendentes Element von L über k ist. Wir wenden Satz 11 auf die singularitätenfreien vollständigen Modelle V von K und V' von L an, d.h. auf die aus allen Bewertungsringen von K über k bzw. von L über k bestehenden Modelle. Da die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt sind, folgt, daß die kanonische Klasse von V' aus allen Divisoren $\mathfrak{d}(V'/V) \cdot \mathfrak{n}_x^{-2}$

besteht, wo $\mathfrak{d}$ eine bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente ist. Da in $\mathfrak{d}(V'/V)=\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$ alle Bewertungsringe $S_{\mathfrak{P}}$ von L über k auftreten, stimmt diese Klasse bekanntlich mit der kanonischen Klasse von L überein, die im Riemann-Rochschen Satz auftritt.

Satz 12. *Ist K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und V das singularitätenfreie vollständige Modell von K/k, so stimmt die kanonische Klasse von V mit der kanonischen Klasse von K/k, die im Riemann-Rochschen Satz auftritt, überein. Das Geschlecht von K ist das geometrische Geschlecht von V.*

Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß man bei Verwendung von Differentialformen von K/k statt von K über einem Differentialkonstantenkörper k_0 nicht zur kanonischen Klasse von K/k zu gelangen braucht, wenn man die in § 4 angegebene „natürliche“ Divisordefinition verwendet. Man kann dies schon für separabel erzeugbare Funktionenkörper K einer Variablen über k zeigen, vorausgesetzt, daß k unvollkommen ist. Es sei x ein separierendes transzendentes Element von K/k. Dann ist $M(K/k)=K\,dx$. Nach der Formel von F. K. Schmidt aus § 4 ergibt sich für den Divisor von dx

$$(dx)=\frac{\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{d}_0\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k[x^{e_{\mathfrak{p}}}]}\right)}{\mathfrak{n}_x^2\cdot\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)}.$$

$\mathfrak{p}$ durchläuft alle Primdivisoren von K über k. Aus der Separabilität von K über $k(x)$ folgt, daß $\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{d}_0\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k[x^{e_{\mathfrak{p}}}]}\right)$ gleich der Dedekindschen Differente $\mathfrak{d}_x$ von K über $k(x)$ ist, also $(dx)=\frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\cdot\frac{1}{\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)}$. Da der Faktor $\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)$ von 1 verschieden sein kann, sobald k unvollkommen ist (vgl. [4], Satz 3), folgt, daß (dx) kein Divisor der kanonischen Klasse von K zu sein braucht.

Literatur

[1] Cartan, H., u. C. Chevalley: Schémas normaux; Morphismes; Ensembles constructibles. Sem. Cartan-Chevalley 8 (1955/56).

[2] Chevalley, C.: Les schémas (I, II). Sem. Cartan-Chevalley 8 (1955/56).

[3] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable. New York 1951.

[4] Kunz, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. reine angew. Math. **204**, 165—182 (1960).

[5] Lamprecht, E.: Über s-Differenten und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Variablen. Arch. Math. **4**, 412—424 (1953).

[6] Tate, J.: Genus Change in inseparable Extensions of Function Fields. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 400—406 (1952).

[7] Zariski, O.: Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces. Vorlesungsausarbeitung, Harvard Univ. 1957/58.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. Oktober 1960)