Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen. II.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen.

Es sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine quadratische Form mit m Variabeln und rationalen Koeffizienten, die durch eine reelle lineare Substitution in

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \ldots + y_m^2) \qquad (1 \leqq n \leqq m-1)$$

transformiert werden kann. Im ersten Teile dieser Abhandlung ist die zugehörige Zetafunktion für den speziellen Fall $n = 1$ untersucht worden. Zur Behandlung des allgemeinen Falles eines beliebigen n sind weitere Hilfsmittel nötig, die im folgenden besprochen werden sollen.

Zur Definition der Zetafunktion hat man wie im Falle $n = 1$ die Einheitentheorie heranzuziehen. Es sei $\Gamma(\mathfrak{S})$ die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$, also die multiplikative Gruppe der unimodularen Matrizen $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$. Identifiziert man $\mathfrak{U}$ mit $-\mathfrak{U}$, so erhält man eine Faktorgruppe von $\Gamma(\mathfrak{S})$, die als gekürzte Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ bezeichnet werden soll. Im Falle $n = 1$ oder $n = m-1$ wird durch die Abbildungen $\mathfrak{x} \to \pm\,\mathfrak{U}\mathfrak{x}$ eine mit $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ isomorphe diskontinuierliche Gruppe von Kollineationen des $(m-1)$-dimensionalen projektiven $\mathfrak{x}$-Raumes erklärt, deren Fundamentalbereich in diesem Raume ein endliches nicht-euklidisches Volumen besitzt, wenn nicht $m = 2$ und $-|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Ist aber $1 < n < m-1$, so ist jene Gruppe nicht diskontinuierlich im $\mathfrak{x}$-Raume. Man betrachte dann an Stelle von $\mathfrak{x}$ reelle Matrizen $\mathfrak{X}$ von m Zeilen und n Spalten. Sieht man zwei solche Matrizen nicht als verschieden an, wenn sie durch rechtsseitige Multiplikation mit einer n-reihigen Matrix ineinander übergeführt werden können, so liefern sie die Punkte eines Raumes R von $n(m-n)$ Dimensionen, der eine Verallgemeinerung des projektiven Raumes ist. Durch die Abbildungen $\mathfrak{X} \to \pm\,\mathfrak{U}\mathfrak{X}$ erhält man jetzt eine mit $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ isomorphe Gruppe von gebrochenen linearen Transformationen des Raumes R. Die Reduktionstheorie zeigt, daß diese Gruppe in R diskontinuierlich ist und dort einen Fundamentalbereich besitzt, dessen Volumen in einer gegenüber den Abbildungen invarianten Maßbestimmung eine endliche Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ ist. Diese Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ möge das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S})$ heißen.

Ist $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = t$ eine Darstellung einer von 0 verschiedenen Zahl t durch $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ eine ganzzahlige Lösung von $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = t$, so gehört zu ihr eine Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S})$, nämlich die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Einheiten von $\mathfrak{S}$

mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$. Auch für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ läßt sich ein endliches Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ erklären, wenn nicht $m = 3$ und $-t|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Die genaue Definition der Gruppenmaße $\mu(\mathfrak{S})$ und $\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ findet man in den Paragraphen 2 und 3.

Zwei Darstellungen $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_1 = t$ und $\mathfrak{a}_2'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_2 = t$ heißen assoziiert, wenn es eine Einheit $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ gibt, so daß $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{U}\mathfrak{a}_1$ ist. Unter dem Maß der Darstellungen von t durch $\mathfrak{S}$ versteht man den Ausdruck

$$M(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = t} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}),$$

in welchem über ein volles System nicht-assoziierter Darstellungen von t durch $\mathfrak{S}$ summiert wird. Wie die Reduktionstheorie lehrt, ist dabei die Anzahl der Summanden stets endlich. Die Zetafunktion von $\mathfrak{S}$ wird nun in der Halbebene $\sigma > \frac{m}{2}$ durch die dort konvergente Dirichletsche Reihe

$$\zeta(\mathfrak{S}, s) = \sum_{t > 0} M(\mathfrak{S}, t)\, t^{-s}$$

erklärt, in der t alle positiven durch $\mathfrak{S}$ darstellbaren Zahlen durchläuft. Dabei ist der Fall auszuschließen, daß $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine ternäre Nullform mit negativer Determinante ist.

Das Ziel unserer Untersuchung ist der Beweis der Fortsetzbarkeit von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ in die ganze endliche s-Ebene und die Auffindung einer Funktionalgleichung. Wir können uns auf den Fall $m > 2$ beschränken, da der Fall $m = 2$ in allgemeineren Ergebnissen von Hecke enthalten ist. Es stellt sich heraus, daß $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ für alle endlichen s regulär ist bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$ und einen etwaigen Pol erster Ordnung bei $s = 1$. In letzterem Punkte liegt nur dann ein Pol vor, wenn entweder $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform mit negativer Determinante oder eine ternäre Nullform (mit positiver Determinante) oder eine quaternäre Nullform mit quadratischer Determinante ist. Die Gestalt der Funktionalgleichung ist von der Restklasse abhängig, welcher die Differenz $m - n$ nach dem Modul 4 angehört. Setzt man zur Abkürzung

$$\pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

und bezeichnet mit S den absoluten Betrag der Determinante $|\mathfrak{S}|$, so lautet nämlich die Funktionalgleichung

(1) $$\varphi(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{m-n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) \qquad (m - n \quad \text{gerade}),$$

(2) $$\sin(\pi s)\, \varphi(\mathfrak{S}, s)$$
$$= (-1)^{\frac{m-n+1}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \left\{\cos(\pi s)\, \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) - \varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right)\right\}$$
$$(m - n \quad \text{ungerade}).$$

Die Aussage ist für den Fall einer ternären Nullform zu modifizieren; da aber dieser Fall bereits ausführlich im ersten Teil der Abhandlung untersucht worden ist, so soll er weiterhin ausgeschlossen werden.

Der Beweis der Fortsetzbarkeit und der Funktionalgleichung erfolgt vermittels einer Darstellung von $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ durch ein Integral über eine Thetareihe und bildet also eine Übertragung der im definiten Fall üblichen Methode. Die Schwierigkeit liegt aber jetzt vorwiegend in der Gewinnung jener Integraldarstellung. Die Moduln der dabei benötigten Thetareihe hängen von den $n(m-n)$ Koordinaten der Punkte des oben erklärten Raumes R ab, und die Thetareihe wird eine Invariante der Einheitengruppe. Im Laufe der Untersuchung treten die hypergeometrischen Funktionen auf, deren Monodromiegruppe bei der Herleitung der Funktionalgleichung benutzt wird.

Durch die Mellinsche Integraltransformation entsteht aus $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ die analytische Klasseninvariante $f(\mathfrak{S}, x)$. Die Ergebnisse der analytischen Theorie der quadratischen Formen legen die Vermutung nahe, daß $f(\mathfrak{S}, x)$ für gerades $m-n$ eine Modulform ist. Aus der Funktionalgleichung von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ergibt sich nun zunächst das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der Modulsubstitution $x \to -x^{-1}$. Zur Untersuchung von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei einer beliebigen Modulsubstitution hat man an Stelle von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ allgemeinere Zetafunktionen mit Charakteren zu betrachten. Die Durchführung der Rechnung liefert die vollständige Transformationstheorie von $f(\mathfrak{S}, x)$ und damit die Bestätigung jener Vermutung. Es läßt sich also das Ergebnis der im ersten Teil genannten Arbeit von B. Schoeneberg, das sich auf die zu nullteilerfreien indefiniten Quaternionenringen gehörigen Thetareihen bezieht, auf beliebige Klasseninvarianten mit geradem $m-n$ übertragen.

Der Begriff der Zetafunktion einer quadratischen Form ist noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig, die ebenfalls durch die Sätze der analytischen Theorie der quadratischen Formen nahegelegt wird und für die Theorie der analytischen Klasseninvarianten von Bedeutung ist. Diese allgemeinen Zetafunktionen stehen zu den oben definierten in analogem Verhältnis, wie die Darstellungen einer symmetrischen r-reihigen Matrix $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}$ zu den Darstellungen einer Zahl t durch $\mathfrak{S}$. Ist z. B. $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ positiv-definit, so wird jene Zetafunktion erklärt durch die Reihe

$$\zeta_r(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\mathfrak{T}} A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) |\mathfrak{T}|^{-s} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ die Anzahl der Darstellungen von $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{S}$ bedeutet und $\mathfrak{T}$ ein volles System von darstellbaren Klassen durchläuft. Auch hier kann man sinngemäß indefinite Formen zugrunde legen und noch Restklassencharaktere einfügen. Da unsere Methode ohne Hinzunahme neuer Ideen auch zur Untersuchung dieser allgemeinen Funktionen ausreicht, so soll im Interesse einfacher Ausdrucksweise nur der Fall $r = 1$ für den Hauptcharakter behandelt werden.

Bezüglich der Abkürzungen sei noch folgendes bemerkt. Durch die Gleichung $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(a,b)}$ wird angedeutet, daß $\mathfrak{M}$ eine Matrix mit a Zeilen und b Spalten ist; dabei kann für $\mathfrak{M}^{(a,a)}$ auch $\mathfrak{M}^{(a)}$ geschrieben werden. Mit kleinen deutschen Buchstaben werden nur Spalten bezeichnet. Stets ist $\mathfrak{E}$ eine Einheitsmatrix, $\mathfrak{N}$ eine Nullmatrix, $\mathfrak{n}$ eine Nullspalte. Der absolute Betrag der Determinante einer mit einem großen deutschen Buchstaben bezeichneten Matrix wird immer durch den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben ausgedrückt. Läßt sich die quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ von m Variabeln durch eine reelle lineare Substitution in die Form

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \dots + y_m^2)$$

transformieren, so sagen wir, $\mathfrak{S}$ habe die Signatur $n, m-n$. Im Falle $m = n$ heißt $\mathfrak{S}$ positiv, wofür auch $\mathfrak{S} > 0$ geschrieben werden soll.

§ 1.

Die invariante Thetafunktion.

Es seien $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{(n)}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(r)}$ symmetrisch und umkehrbar. Definiert man mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^{(n,r)}$ die Matrizen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{T} - \mathfrak{Q}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{Q}', \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q},$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Q} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{Q}' & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

so wird

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}' & \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}' \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}' \begin{pmatrix} \mathfrak{G} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \mathfrak{B}.$$

Also gilt die Determinantengleichung

$$(4) \qquad |\mathfrak{T}|\,|\mathfrak{H}| = |\mathfrak{G}|\,|\mathfrak{B}|.$$

Hat die symmetrische Matrix $\mathfrak{S}$ die Signatur $n, m-n$, so kann man eine reelle Matrix $\mathfrak{X}^{(m,n)}$ derart wählen, daß $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ positiv ist. Setzt man nun insbesondere

$$r = m, \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{X}'\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{S}\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'\mathfrak{S},$$

wobei

$$0 < \lambda < 1$$

ist, so wird

$$\mathfrak{G} = (1 - \lambda^{-1})\,\mathfrak{T}, \qquad \mathfrak{H} = \lambda\mathfrak{S} - \mathfrak{R}.$$

Da $\mathfrak{T} > 0$ ist, so hat $\mathfrak{G}$ die Signatur $0, n$. Aus (3) folgt, daß $\mathfrak{H}$ die Signatur $0, m$ besitzt, also $-\mathfrak{H}$ positiv ist. Nach (4) ist ferner

$$(5) \qquad |\mathfrak{H}| = \lambda^m (1 - \lambda^{-1})^n |\mathfrak{S}|.$$

Um $\mathfrak{H}^{-1}$ zu berechnen, bilde man die Matrix

$$\mathfrak{H}_1 = (1-\lambda)\,\mathfrak{S}^{-1} - \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} \tag{6}$$

Wegen $\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ wird dann

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1 = \lambda(1-\lambda)\,\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} - (1-\lambda)\,\mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} + \mathfrak{R}\mathfrak{S}^{-1} = \lambda(1-\lambda)\,\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{H}_1 = \lambda(1-\lambda)\,\mathfrak{H}^{-1}. \tag{7}$$

Man erhält also den Ausdruck $\lambda(1-\lambda)\,\mathfrak{H}^{-1}$, indem man in der Definition von $\mathfrak{H}$ die Symbole λ, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$ durch $1-\lambda$, $\mathfrak{S}^{-1}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ ersetzt.

Mit der Abkürzung

$$\{\lambda(1-\lambda)\}^{-\frac{1}{2}} = \gamma \tag{8}$$

bilde man für $u > 0$ die Funktion

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi\gamma u\,\mathfrak{c}'\mathfrak{H}\mathfrak{c}},$$

wo $\mathfrak{c}$ alle Spalten aus m ganzen Zahlen durchläuft. Ist nun $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{U}$ ganz und $\mathfrak{U}'\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}$, so wird

$$\mathfrak{T} = (\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X})'\mathfrak{S}(\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X}), \quad \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}(\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X})\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X})'\mathfrak{S},$$
$$\mathfrak{U}'\mathfrak{H}\mathfrak{U} = \lambda\mathfrak{S} - \mathfrak{U}'\mathfrak{R}\mathfrak{U}$$

und folglich, da $\mathfrak{U}\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}$ alle ganzen Spalten durchläuft,

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{U}\mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}).$$

Unsere Thetafunktion behält also ihren Wert, wenn $\mathfrak{X}$ durch eine beliebige, in bezug auf die Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ assoziierte Matrix $\mathfrak{U}\mathfrak{X}$ ersetzt wird.

Die Transformationsformel

$$\sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi\gamma u\,\mathfrak{c}'\mathfrak{H}\mathfrak{c}} = |-\gamma u\,\mathfrak{H}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{c}} e^{\pi(\gamma u)^{-1}\mathfrak{c}'\mathfrak{H}^{-1}\mathfrak{c}}$$

liefert vermöge (5), (6), (7), (8) die Beziehung

$$\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = S^{-\frac{1}{2}}(\lambda^{-1}-1)^{\frac{m}{4}-\frac{n}{2}}\,u^{-\frac{m}{2}}\,\vartheta(u^{-1}, 1-\lambda, \mathfrak{S}\mathfrak{X}, \mathfrak{S}^{-1}). \tag{9}$$

Aus dieser wird sich die Funktionalgleichung der Zetafunktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ergeben, wenn es uns gelungen sein wird, $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ in einfacher Weise unter Benutzung der Thetafunktion auszudrücken. Dazu sind verschiedene Hilfsbetrachtungen notwendig.

§ 2.

Das Gruppenmaß.

Es sei $\mathfrak{S}$ reell. Durch die Gleichung $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ wird der m^2-dimensionale reelle $\mathfrak{X}^{(m)}$-Raum auf den $\frac{m(m+1)}{2}$-dimensionalen Raum der symmetrischen

$\mathfrak{T}^{(m)}$ abgebildet. Zunächst sei $\mathfrak{S} > 0$. Es bedeute g ein Gebiet im $\mathfrak{T}$-Raum, das ein Volumen besitzt, und g_1 das entsprechende Gebiet im $\mathfrak{X}$-Raum. Bezeichnet man die Volumenelemente in diesen Räumen mit $d\mathfrak{T}$ und $d\mathfrak{X}$, so wird das Verhältnis der Volumina von g_1 und g durch den Quotienten

$$v(g_1) : v(g) = \int_{g_1} d\,\mathfrak{X} : \int_{g} d\,\mathfrak{T}$$

gegeben. Läßt man jetzt g auf einen Punkt $\mathfrak{T}_0$ zusammenschrumpfen, so erhält man in dem Grenzwert

$$\lim_{g \to \mathfrak{T}_0} \int_{g_1} d\,\mathfrak{X} : \int_{g} d\,\mathfrak{T} = \alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_0) \tag{10}$$

eine gewisse Funktion von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}_0$. Um diese näher zu bestimmen, setze man $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{B}'\mathfrak{B}$ und mache die linearen Substitutionen $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{X}_1\mathfrak{B}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}'\mathfrak{T}_1\mathfrak{B}$. An die Stelle von $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}_0$ tritt dann die Relation $\mathfrak{X}_1'\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{T}_1 \to \mathfrak{E}$, und aus

$$\int d\,\mathfrak{X} = A^{-m} B^{m} \int d\,\mathfrak{X}_1, \quad \int d\,\mathfrak{T} = B^{m+1} \int d\,\mathfrak{T}_1$$

folgt

$$\alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_0) = A^{-m} B^{-1} \alpha(\mathfrak{E}, \mathfrak{E})$$

oder

$$\alpha(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}_0) = \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

wobei

$$\varrho_m = \alpha(\mathfrak{E}^{(m)}, \mathfrak{E}^{(m)})$$

zu setzen ist. Also gilt

$$\int_{g_1} d\,\mathfrak{X} = \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} \int_{g} T^{-\frac{1}{2}} d\,\mathfrak{T}. \tag{12}$$

Nunmehr sei $\mathfrak{S}$ rational und von beliebiger Signatur. Zwei Punkte $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ mögen assoziiert heißen, wenn es eine Einheit $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{U}\mathfrak{X}_1$ gibt. Wie in der Reduktionstheorie bewiesen wird, läßt sich für jedes $\mathfrak{X}$ aus dem System aller mit $\mathfrak{X}$ assoziierten Punkte ein reduzierter Punkt derart auswählen, daß für jedes Gebiet g des $\mathfrak{T}$-Raumes, welches ein endliches Volumen hat, das ihm vermöge der Gleichung $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ zugeordnete, aus lauter reduzierten Punkten bestehende $\mathfrak{X}$-Gebiet g^* wieder ein Volumen besitzt. Dieses Volumen ist ebenfalls endlich, wenn nicht $m = 2$ und $-|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Nach Analogie von (10) und (11) definieren wir jetzt

$$\lim_{g \to \mathfrak{T}_0} \int_{g^*} d\,\mathfrak{X} : \int_{g} d\,\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \varrho_m S^{-\frac{m}{2}} T_0^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S})$$

und nennen die nur von $\mathfrak{S}$ und nicht von $\mathfrak{T}_0$ abhängige Zahl $\mu(\mathfrak{S})$ das Maß der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$. Offenbar ist $\mu(\mathfrak{S})$ für positives $\mathfrak{S}$ der reziproke Wert der Ordnung von $\Gamma^*(\mathfrak{S})$. Es wird

$$\int_{g^*} d\,\mathfrak{X} = \frac{1}{2}\,\varrho_m\,\mu(\mathfrak{S})\,S^{-\frac{m}{2}} \int_g T^{-\frac{1}{2}}\,d\,\mathfrak{T}. \tag{13}$$

Der durch g^* gebildete Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S})$ ist m^2-dimensional. Ist $\mathfrak{S}$ von der Signatur $n,\ m-n$ und $0 < n < m$, so können wir, wie jetzt gezeigt werden soll, einen Fundamentalbereich in einem geeigneten Raum nur $n\,(m-n)$ Dimensionen finden. Dieser wird in Analogie zu dem Diskontinuitätsbereich der im Falle $n = 1$ auftretenden nicht-euklidischen Bewegungsgruppe definiert werden.

Zuerst soll die Dimension m^2 auf mr verkleinert werden, wobei $n \leqq r < m$ ist. Es bedeute $\mathfrak{X}_1$ die aus den ersten r Spalten von $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2)$ gebildete Matrix. Man setze

$$\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2)'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2) = \begin{pmatrix}\mathfrak{T}_1 & \mathfrak{T}_2\\ \mathfrak{T}_2' & \mathfrak{T}_3\end{pmatrix} = \mathfrak{T}$$

und betrachte nur solche $\mathfrak{X}_1$, für welche $\mathfrak{X}_1'\mathfrak{S}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{T}_1$ die Signatur $n,\ r-n$ besitzt. Vermöge der linearen Substitution

$$(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2) = (\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_0)\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & \mathfrak{F}\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{W}\end{pmatrix}$$

mit festem $\mathfrak{X}_0$ wird

$$\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_1\mathfrak{F} + \mathfrak{X}_0\mathfrak{W}$$

$$\int d\,\mathfrak{X} = \int |(\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{X}_0)|^{m-r}\,d\,\mathfrak{F}\,d\,\mathfrak{W}\,d\,\mathfrak{X}_1.$$

Setzt man noch

$$(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_0)'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_0) = \begin{pmatrix}\mathfrak{T}_1 & \mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{B}_2' & \mathfrak{B}_3\end{pmatrix} = \mathfrak{T}_0,$$

so erhält man

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{F} + \mathfrak{B}_2\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_2, \tag{14}$$

$$\mathfrak{W}'\,(\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2'\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{B}_2)\,\mathfrak{W} = \mathfrak{T}_3 - \mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{T}_2. \tag{15}$$

Zufolge (3) hat die letzte Matrix die Signatur $0,\ m-r$ und es gilt

$$|(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_0)| = T_0^{\frac{1}{2}}\,S^{-\frac{1}{2}}, \quad |\mathfrak{B}_3 - \mathfrak{B}_2'\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{B}_2| = T_1^{-1}\,|\mathfrak{T}_0|,$$
$$|\mathfrak{T}_3 - \mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{T}_2| = T_1^{-1}\,|\mathfrak{T}|.$$

Führt man nun durch (14) die Variable $\mathfrak{T}_2$ statt $\mathfrak{F}$ ein und benutzt für die Integration über $\mathfrak{W}$ die Formeln (12), (15), so wird

$$\int_{g^*} d\,\mathfrak{X} = \int T_0^{\frac{m-r}{2}}\,S^{\frac{r-m}{2}}\,T_1^{r-m}\,\varrho_{m-r}\,(T_0\,T_1^{-1})^{\frac{r-m}{2}}\,(T\,T_1^{-1})^{-\frac{1}{2}}\,d\,\mathfrak{T}_2\,d\,\mathfrak{T}_3\,d\,\mathfrak{X}_1$$
$$= \varrho_{m-r}\,S^{\frac{r-m}{2}} \int T_1^{\frac{r-m+1}{2}}\,T^{-\frac{1}{2}}\,d\,\mathfrak{T}_2\,d\,\mathfrak{T}_3\,d\,\mathfrak{X}_1.$$

Nach (13) ergibt sich also

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\varrho_m\,\mu(\mathfrak{S})\int\limits_{g_1} d\,\mathfrak{T}_1 = \varrho_{m-r}\,S^{\frac{r}{2}}\int\limits_{g_1^*} T_1^{\frac{r-m+1}{2}}\,d\,\mathfrak{X}_1;$$

dabei bedeutet g_1 einen beliebigen Bereich im Raume der $\mathfrak{T}_1$ vom Typus $n, r-n$, und g_1^* ist der durch die Gleichung $\mathfrak{X}_1'\mathfrak{S}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{T}_1$ definierte reduzierte $\mathfrak{X}_1$-Bereich.

Speziell folgt aus (16) für $\mathfrak{S} = \mathfrak{E}$, $r = 1$ die Rekursionsformel

$$\varrho_m\int\limits_0^1 d\,t = \varrho_{m-1}\int\limits_{x_1^2+\dots+x_m^2\leqq 1}\cdots\int (x_1^2+\dots+x_m^2)^{1-\frac{m}{2}}\,d\,x_1\dots d\,x_m = \varrho_{m-1}\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

$$(m = 2, 3, \dots)$$

Da nach (12) die Größe ϱ_1 den Wert 1 besitzt, so gilt also

$$(17)\qquad \varrho_m = \prod_{k=1}^{m}\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$$

Das in (16) auftretende Gebiet g_1^* ist mr-dimensional, mit $r \geqq n$. Jetzt soll das Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{S})$ durch ein $n(m-n)$-faches Integral ausgedrückt werden. Es sei $r = n$, also $\mathfrak{T}_1^{(n)} > 0$. Bedeutet nun $\mathfrak{Y}^{(n)}$ die aus den letzten n Zeilen von $\mathfrak{X}_1$ gebildete Matrix, so setze man

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}^{-1} = \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix},$$

wobei also die ersten $m-n$ Zeilen von $\mathfrak{Z}$ die Matrix $\mathfrak{P}$ und die letzten n Zeilen von $\mathfrak{Z}$ die Einheitsmatrix bilden. Es ist dann

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}$$

und man erhält nach (12) die Formel

$$(18)\quad \int\limits_{g_1^*} T_1^{\frac{n-m+1}{2}}\,d\,\mathfrak{X}_1 = \int |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{\frac{n-m+1}{2}}\,Y\,d\mathfrak{P}\,d\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}\varrho_n\int |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}}\,d\mathfrak{P}\,d\mathfrak{T}_1.$$

Zufolge (16) ergibt sich daher endlich

$$(19)\qquad \varrho_m\,\mu(\mathfrak{S}) = \varrho_n\,\varrho_{m-n}\,S^{\frac{n}{2}}\int\limits_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}}\,d\,\mathfrak{P},$$

und hierbei ist der $n(m-n)$-dimensionale $\mathfrak{P}$-Bereich $g(\mathfrak{S})$ folgendermaßen erklärt. Ist

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix}\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{U}_2\\ \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4\end{pmatrix}$$

eine Einheit von $\mathfrak{S}$ und

$$\mathfrak{U}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Y}_1 = \begin{pmatrix}\mathfrak{P}_1\\ \mathfrak{E}\end{pmatrix} \mathfrak{Y}_1,$$

so wird

$$(\mathfrak{U}_1 \mathfrak{P} + \mathfrak{U}_2)\mathfrak{Y} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{Y}_1, \quad (\mathfrak{U}_3 \mathfrak{P} + \mathfrak{U}_4)\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1,$$

also

$$\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{U}_1 \mathfrak{P} + \mathfrak{U}_2)(\mathfrak{U}_3 \mathfrak{P} + \mathfrak{U}_4)^{-1} \tag{20}$$

Da die beiden Einheiten $\mathfrak{U}$ und $-\mathfrak{U}$ dieselbe gebrochene lineare Substitution (20) ergeben, so erhält man durch diese verallgemeinerten projektiven Abbildungen eine treue Darstellung der gekürzten Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ im $n(m-n)$-dimensionalen $\mathfrak{P}$-Raume. Das Gebiet $g(\mathfrak{S})$ ist nun erklärt als ein Fundamentalbereich für $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ in dem durch $\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z} > 0$ ausgezeichneten Teile des $\mathfrak{P}$-Raumes

Mit der Abkürzung

$$\sigma_{mn} = \prod_{k=1}^{m-n} \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

erhält man nach (17) und (19) für das Gruppenmaß den gesuchten Ausdruck

$$\mu(\mathfrak{S}) = \sigma_{mn} S^{\frac{n}{2}} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}}\, d\mathfrak{P}. \tag{21}$$

Man hätte natürlich auch von dem Volumenelement $S^{\frac{n}{2}}\,|\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}}\, d\mathfrak{P}$ ausgehen können, um analog wie in § 1 des ersten Teiles das nicht-euklidische Volumen von $g(\mathfrak{S})$ zu definieren. Der jetzt gewählte Ausgangspunkt ist aber für unsere Zwecke geeigneter.

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß der Fall einer rational zerlegbaren binären Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ im vorhergehenden auszuschließen ist, da dann das Integral in (21) divergiert.

§ 3.

Das Darstellungsmaß.

Weiterhin sei dauernd $\mathfrak{S}$ rational und von der Signatur $n, m-n$. Für irgendein rationales $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$ betrachte man alle Einheiten $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$, für die also $\mathfrak{U}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist. Sie liefern eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$. Für rationales $r \neq 0$ ist offenbar $\Gamma(\mathfrak{S}, r\mathfrak{a}) = \Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Wählt man für r^{-1} den größten gemeinsamen Teiler aller Elemente von $\mathfrak{a}$, so ist $r\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ primitiv.

Zunächst sei $\mathfrak{a}_0' \mathfrak{S} \mathfrak{a}_0 = t_0 \neq 0$. Ergänzt man die Spalte $\mathfrak{a}_0$ zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0 \mathfrak{B})$ und setzt

$$\mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{B}' \mathfrak{S} \mathfrak{B} - t_0^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{b}' = \mathfrak{K}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t_0^{-1} \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G},$$

so wird

$$\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{K} + t_0^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{b}' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{K} \end{pmatrix} \mathfrak{G}.$$

Ist nun $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, so ist

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A} \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{W} \end{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1} \tag{22}$$

mit ganzen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{W}$ und

$$\mathfrak{W}' \mathfrak{K} \mathfrak{W} = \mathfrak{K}, \quad t_0 \mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}') \mathfrak{b}. \tag{23}$$

Ist umgekehrt (23) mit ganzen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{W}$ erfüllt, so gehört die durch (22) definierte Matrix $\mathfrak{U}$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Folglich ist $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph zu der durch die Kongruenz

$$\mathfrak{W}' \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \pmod{t_0}$$

erklärten Untergruppe in der Gruppe aller Einheiten $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{K}$. Offenbar ist der Index dieser Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{K})$ eine endliche Zahl $j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Die Signatur von $\mathfrak{K}$ ist $n-1$, $m-n$ oder n, $m-n-1$, je nachdem, ob die Zahl t_0 positiv oder negativ ist. Ferner ist die Determinante $|\mathfrak{K}| = t_0^{-1} |\mathfrak{S}|$. Es existiert also ein endliches Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{K})$, wenn nicht $m = 3$ und $-t_0 |\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Wir definieren jetzt das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ durch den Ausdruck

$$\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, \mu(\mathfrak{K}). \tag{24}$$

Dabei ist der eben genannte Fall auszuschließen, daß $m = 3$ und $-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \, |\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Läßt man nun $\mathfrak{a}$ bei festgehaltenem $t \neq 0$ ein volles System nicht-assoziierter ganzer Lösungen von $\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = t$ durchlaufen, so nennt man die endliche Summe

$$M(\mathfrak{S}, t) = \sum_{\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = t} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \tag{25}$$

das Darstellungsmaß von t.

Um das Darstellungsmaß auch für $t = 0$ zu definieren, betrachten wir die primitiven Lösungen $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} = 0$, wenn es solche gibt, wenn also $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Man kann dann $\mathfrak{a}$ zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a} \mathfrak{B})$ so ergänzen, daß die Matrix $\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{K} \end{pmatrix}$$

mit positivem p bekommt, und zwar ist p der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$. Damit $\mathfrak{U}$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ gehört, ist jetzt notwendig und hinreichend, daß

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A}\begin{pmatrix} 1 & c & \mathfrak{c}' \\ 0 & 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{q} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}\mathfrak{A}^{-1} \tag{26}$$

mit ganzen c, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{W}$ und

$$\mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{W} = \mathfrak{K},\quad p\mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} - \mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{q},\quad 2pc = -\mathfrak{q}'(2\mathfrak{b} + \mathfrak{K}\mathfrak{q}) \tag{27}$$

gilt. Bedeutet $\mathfrak{z}$ eine Spalte aus $m-2$ Elementen, so ist also $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph mit der durch

$$\mathfrak{z} \to \mathfrak{W}\mathfrak{z} + \mathfrak{q},\quad \mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{W} = \mathfrak{K}, \tag{28}$$

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{q} \pmod{p},\quad \mathfrak{q}'(2\mathfrak{b} + \mathfrak{K}\mathfrak{q}) \equiv 0 \pmod{p} \tag{29}$$

bei ganzen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{W}$ definierten Gruppe von affinen Abbildungen des $\mathfrak{z}$-Raumes auf sich selbst. Diese Gruppe ist aber von endlichem Index $j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der durch Fortlassung der Kongruenzbedingungen (29) entstehenden Gruppe (28). Letztere Gruppe enthält als Normalteiler die ganzzahlige Translationsgruppe $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z} + \mathfrak{q}$ mit der Faktorgruppe $\Gamma(\mathfrak{K})$. Nun ist $\mathfrak{K}$ von der Signatur $n-1$, $m-n-1$ und $|\mathfrak{K}| = -p^{-2}|\mathfrak{S}|$. Folglich existiert das Gruppenmaß $\mu(\mathfrak{K})$, wenn nicht $m = 4$ und $|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. In dem auszuschließenden Falle soll $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ kurz eine Quaternionen-Nullform heißen. Wir erklären jetzt das Gruppenmaß von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ durch den Ausdruck

$$\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = p^{-1} j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, \mu(\mathfrak{K}), \tag{30}$$

wobei also p den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ bedeutet. Läßt man $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziierter primitiver Lösungen von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$ durchlaufen, so soll die endliche Summe

$$M(\mathfrak{S}, 0) = \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \tag{31}$$

das Darstellungsmaß von 0 genannt werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform ist, aber keine Quaternionen-Nullform.

Zwischen $\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ und $\mu(\mathfrak{S}^{-1}, p^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{a})$ besteht ein einfacher Zusammenhang. Es sei $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{a}$ primitiv und $\mathfrak{S}\mathfrak{a} = p\mathfrak{r}$ mit primitivem $\mathfrak{r}$. Dann ist offenbar $\mathfrak{r}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r} = 0$, $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r} = p^{-1}\mathfrak{a}$. Ist ferner $\mathfrak{U}$ ein Element von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, so gehört $\mathfrak{U}'$ zu $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r})$, und umgekehrt. An die Stelle der oben betrachteten Gruppe $\mathfrak{z} \to \mathfrak{W}\mathfrak{z} + \mathfrak{q}$ tritt bei $\mathfrak{S}^{-1}$ die Gruppe $\mathfrak{z} \to \mathfrak{W}'\mathfrak{z} + \mathfrak{c}$, wobei wieder die Bedingungen (27) erfüllt sein müssen. Aus der Gleichung

$$p\mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} - \mathfrak{W}'\mathfrak{K}\mathfrak{q}$$

folgt nun

$$p^{m-2} j(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}) = K j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}).$$

Andererseits erhalten wir aus (13) die Formel $\mu(\mathfrak{K}^{-1}) = \mu(\mathfrak{K})$. Da $K = p^{-2}S$ ist und der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ den Wert p^{-1} hat, so wird

$$\mu(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}) = pj(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r})\,\mu(\mathfrak{K}^{-1}) = p^{1-m} Sj(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{K}),$$

$$S\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = p^{m-2}\,\mu(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{r}). \tag{32}$$

§ 4.

Die Zetafunktion.

Es sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine indefinite quadratische Form mit der Signatur $n, m-n$ und s eine komplexe Variable, deren Realteil $\sigma > \frac{m}{2}$ ist. Die zu $\mathfrak{S}$ gehörige Zetafunktion definieren wir durch die Dirichletsche Reihe

$$\zeta(\mathfrak{S}, s) = \sum_{t>0} M(\mathfrak{S}, t)\, t^{-s}, \tag{33}$$

in der t alle durch $\mathfrak{S}$ ganzzahlig darstellbaren positiven Zahlen durchläuft und $M(\mathfrak{S}, t)$ das im vorigen Paragraphen erklärte Darstellungsmaß bedeutet. Die Konvergenz der Reihe entnimmt man der Reduktionstheorie. Auszuschließen ist hierbei der Fall einer ternären Nullform mit der Signatur 2, 1, da dann die $M(\mathfrak{S}, t)$ nicht sämtlich endliche Werte haben.

Im ersten Teil wurden unter der Annahme $n = 1$ die Funktionen $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_2(\mathfrak{S}, s) = \zeta(-\mathfrak{S}, s)$ studiert. Für die Untersuchung von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei beliebigem n wollen wir im folgenden voraussetzen, daß $m \geqq 3$ und $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist. Der Fall $m = 2$ ist bereits in allgemeineren Resultaten von Hecke enthalten, und der Fall der ternären Nullform wurde im ersten Teil eingehend behandelt

Die weiterhin zu beweisenden Sätze über $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ lauten dann folgendermaßen.

Satz 1. *Die Funktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ ist in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$ mit dem Residuum*

$$\varrho(\mathfrak{S}) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S})$$

und einen etwaigen Pol erster Ordnung bei $s = 1$.

Satz 2. *Für*

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s) \tag{34}$$

gilt die Funktionalgleichung

$$\sin(\pi s)\,\varphi(-\mathfrak{S}, s) = S^{-\frac{1}{2}}\left\{\sin\left(\pi s - \frac{\pi n}{2}\right)\varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) + \sin\frac{\pi n}{2}\,\varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right)\right\}. \tag{35}$$

Hieraus entstehen die Formeln (1) und (2) der Einleitung durch Spezialisierung

Satz 3. *Die Funktion $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ hat bei $s = 1$ nur dann einen Pol, wenn entweder $m - n$ ungerade und $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform oder aber $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Quaternionen-Nullform ist. Im ersteren Falle hat das Residuum bei $s = 1$ den Wert*

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} (2\pi)^{2-m} \Gamma(m-2)\, \zeta(m-2)\, M(\mathfrak{S}, 0).$$

Für den Fall einer Quaternionen-Nullform ist in Satz 3 keine Aussage über den Wert des Residuums von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ enthalten. Dieses Residuum läßt sich in folgender Weise berechnen. Man transformiere die Quaternionen-Nullform $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ durch eine lineare rationalzahlige Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{R}\mathfrak{y}$ in die spezielle Nullform $2(y_1 y_4 - y_2 y_3)$ mit der Matrix $\mathfrak{S}_0$ und setze

$$\begin{pmatrix} y_4 & y_2 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Y}.$$

Es bedeute jetzt q eine natürliche Zahl > 2, die durch das Produkt der Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^{-1}$ teilbar ist. Durch die Substitutionen

$$\mathfrak{Y} \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q} \tag{36}$$

mit unimodularen zweireihigen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird eine Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S}_0)$ geliefert. Ist $\mathfrak{U}_0$ die durch (36) festgelegte Einheit von $\mathfrak{S}_0$, so ist $\mathfrak{U}_0 \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ und folglich $\mathfrak{R}\mathfrak{U}_0\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Die in dieser Art erzeugten Einheiten von $\mathfrak{S}$ bilden eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ von endlichem Index j in der Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$. Man lasse nun $\mathfrak{a}$ ein volles System solcher primitiver Lösungen von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$ durchlaufen, die in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ nicht-assoziiert sind, und verstehe unter $\delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a}$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

Satz 4. *Die Zetafunktion einer Quaternionen-Nullform hat bei $s = 1$ das Residuum*

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = -\frac{q^2}{12j} \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=0} \{\delta(\mathfrak{a})\}^{-2}.$$

Der Ansatz zum Beweis unserer vier Sätze wird durch eine Integralformel geliefert, welche die Zetafunktion mit der in § 1 erklärten Thetafunktion verknüpft.

§ 5.

Integraldarstellung der Zetafunktion.

Es sei $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(m,n)}$ variabel und $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T} > 0$. Wie in § 2 setze man

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}^{-1} = \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{C} \end{pmatrix},$$

wobei also $\mathfrak{Y}$ die aus den letzten n Zeilen von $\mathfrak{X}$ gebildete Matrix bedeutet. Es sei $g(\mathfrak{S})$ der in § 2 erklärte Fundamentalbereich für $\Gamma^*(\mathfrak{S})$, der im Teile $\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z} > 0$ des $\mathfrak{P}$-Raumes gelegen ist. Wie in § 1 sei ferner

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{H} = \lambda\mathfrak{S} - \mathfrak{R}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Ist nun $\mathfrak{a}$ ganz, so lassen wir $\mathfrak{a}_1$ alle mit $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ assoziierten Spalten durchlaufen und bilden für $u > 0$ die Reihe

$$\psi(\mathfrak{a}, u) = \sum_{\mathfrak{a}_1} \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}_1'\mathfrak{H}\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{P}. \tag{37}$$

Nach (21) ist insbesondere

$$\psi(\mathfrak{n}, u) = \sigma_{m\,n}^{-1} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}). \tag{38}$$

Weiterhin sei in diesem Paragraphen $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$. Es sei g ein Gebiet im positiven $\mathfrak{T}$-Raume und g^* das durch $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ definierte in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ reduzierte $\mathfrak{X}$ Gebiet. Da $\mathfrak{H}$ nicht von $\mathfrak{Y}$ abhängt, so ergibt (18) die Formel

$$\int_g \psi(\mathfrak{a}, u)\, d\mathfrak{T} = 2\varrho_n^{-1} \sum_{\mathfrak{a}_1} \int_{g^*} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}_1'\mathfrak{H}\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{X} = 2\varrho_n^{-1} \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} d\mathfrak{X}, \tag{39}$$

wobei das Gebiet $g^*(\mathfrak{a})$ aus g^* dadurch hervorgeht, daß $\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{X}$ ersetzt wird und $\mathfrak{U}$ ein volles System von Repräsentanten linksseitiger Nebengruppen zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ durchläuft. Es ist demnach $g^*(\mathfrak{a})$ ein durch die Gleichung $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$ dem $\mathfrak{T}$-Gebiete g zugeordnetes, in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ reduziertes $\mathfrak{X}$-Gebiet.

Fortan sei in diesem Paragraphen auch noch die Zahl $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = t \neq 0$. Wie in § 3 sei $r\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ primitiv, $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0 = t_0$, $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{B})$ unimodular, $\mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & t_0^{-1}\mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t_0 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{K} \end{pmatrix} \mathfrak{G}.$$

Man setze noch

$$\mathfrak{G}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1' \\ \mathfrak{X}_2 \end{pmatrix},$$

wobei also $\mathfrak{x}_1' = t_0^{-1}\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}\mathfrak{X}$ die erste Zeile von $\mathfrak{X}_1$ bedeutet. Mit

$$\alpha = 1 - t_0\,\mathfrak{x}_1'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_1$$

wird

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a} = \lambda t - t\,t_0\,\mathfrak{x}_1'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_1 = t(\lambda - 1 + \alpha).$$

Bedeutet $\mathfrak{U}$ eine zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ gehörige Einheit von $\mathfrak{S}$, so bleibt bei der Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}\mathfrak{X}$ die Spalte $\mathfrak{x}_1$ fest, während $\mathfrak{X}_2$ in $\mathfrak{W}\mathfrak{X}_2$ übergeht, mit der in (23) erklärten Bedeutung von $\mathfrak{W}$.

Für die Matrix

$$\mathfrak{X}_2' \mathfrak{K} \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{T}_1 \tag{40}$$

gilt nun

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} - t_0 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_1'.$$

Wendet man (3) an mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{B} = t_0^{-1}$ und berücksichtigt, daß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_1' & t_0^{-1} \end{pmatrix} = (\mathfrak{X}, t^{-1}\mathfrak{a})' \mathfrak{S} (\mathfrak{X}, t^{-1}\mathfrak{a})$$

die Signatur n, 1 haben muß, so folgt, daß $t_0^{-1}\alpha < 0$ ist; ferner ist bei $\mathfrak{T}_1$ die Signatur $n-1$, 1 oder n, 0, je nachdem, ob t_0 positiv oder negativ ist Entsprechend ist die Signatur von $\mathfrak{K}$ entweder $n-1$, $m-n$ oder n, $m-n-1$.

Setzt man $\varepsilon = 1$ für $t > 0$, $\varepsilon = -1$ für $t < 0$, so wird

$$|\mathfrak{T}_1| = (1 - t_0 \mathfrak{x}_1' \mathfrak{T}^{-1} \mathfrak{x}_1) |\mathfrak{T}| = \alpha |\mathfrak{T}|$$

$$\int T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} d\mathfrak{X} = \int (\varepsilon \alpha^{-1} T_1)^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u t(\lambda - 1 + \alpha)} d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{X}_2,$$

und zufolge (16), (24), (40) erhält man

$$2 \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} d\mathfrak{X}$$

$$= \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{m-n-1}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) K^{-\frac{n}{2}} \int (\varepsilon\alpha)^{\frac{m-n}{2}-1} T^{-\frac{1}{2}} e^{u t(\lambda - 1 + \alpha)} d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{T}_1$$

$$= \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{m-n-1}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) (\varepsilon t_0 S^{-1})^{\frac{n}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\int_{r > 0,\, t_0^{1}} \{\varepsilon(1 - t_0 r)\}^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} e^{u t(\lambda - t_0 r)} dr \int_g d\mathfrak{T}.$$

Nach (39) ist also

$$\psi(\mathfrak{a}, u) = \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \int_{r > 0,\, \varepsilon} (r - \varepsilon)^{\frac{m-n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}-1} e^{-u\varepsilon t(r - \varepsilon\lambda)} dr.$$

In dieser Gleichung ersetze man u durch $\pi\gamma u$, wobei γ die durch (8) gegebene Bedeutung hat, multipliziere mit u^{s-1} und integriere über alle positiven u. Mit Hilfe von (37) ergibt sich dann

$$\sum_{\mathfrak{a}_1} \int_0^\infty u^{s-1} \Big(\int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}' \mathfrak{S} \mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} e^{\pi\gamma u\,\mathfrak{a}_1'\mathfrak{H}\mathfrak{a}_1} d\mathfrak{P} \Big) du \tag{41}$$

$$= \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \Gamma(s) (\pi\gamma\varepsilon t)^{-s} \omega(\varepsilon)$$

mit

$$\omega(\varepsilon) = \int\limits_{r > 0, \varepsilon} (r - \varepsilon)^{\frac{m-n}{2} - 1} r^{\frac{n}{2} - 1} (r - \varepsilon\lambda)^{-s} \, d\, r.$$

Die Größe $\omega(\varepsilon)$ hängt in einfacher Weise mit den hypergeometrischen Funktionen zusammen. Setzt man

$$\int\limits_0^1 y^a (1 - y)^b (1 + xy)^c \, dy = f(a, b, c, x) \tag{42}$$

für positives x, wobei die reellen Teile von a und b größer als -1 seien, so wird

$$\begin{aligned} \omega(1) &= \int\limits_1^\infty (r - 1)^{\frac{m-n}{2} - 1} r^{\frac{n}{2} - 1} (r - \lambda)^{-s} \, dr \\ &= (1 - \lambda)^{\frac{m}{2} - 1 - s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, \frac{\lambda}{1 - \lambda}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(-1) &= \int\limits_0^\infty (r + 1)^{\frac{m-n}{2} - 1} r^{\frac{n}{2} - 1} (r + \lambda)^{-s} \, dr \\ &= \lambda^{\frac{m}{2} - 1 - s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{1 - \lambda}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Man schreibe nun noch zur Abkürzung

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} = x,$$

$$\begin{cases} f\left(s - \frac{m}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, x\right) = f_1(s, x) = f_1, \\ x^{\frac{m}{2} - 1 - s} f\left(s - \frac{m}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{m-n}{2} - 1, x^{-1}\right) = f_2(s, x) = f_2 \end{cases} \tag{43}$$

und summiere (41) über ein volles System nicht-assoziierter ganzer $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} \neq 0$. Nach (25), (33), (34) erhält man so die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} (44) \quad & \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} (1 + x)^{1 - \frac{m}{2}} x^{\frac{s}{2}} \{f_1(s, x)\, \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x)\, \varphi(-\mathfrak{S}, s)\} \\ & = \int\limits_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \Big(\int\limits_0^\infty u^{s-1} \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} \neq 0} e^{\pi\gamma u \mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}} \, du\Big) \, d\,\mathfrak{P}, \end{aligned}$$

gültig in der Halbebene $\sigma > \frac{m}{2}$.

§ 6.

Analytische Fortsetzung.

In üblicher Weise zerlege man das in (44) auftretende u-Intervall in die beiden Teile $0 \leqq u \leqq 1$, $1 \leqq u$ und führe bei dem ersten von diesen die Thetareihe $\vartheta(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S})$ aus § 1 ein. Setzt man

$$\vartheta_0(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0} e^{\pi\gamma u \mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}}, \quad \vartheta_1(u, \lambda, \mathfrak{X}, \mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} \neq 0} e^{\pi\gamma u \mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}},$$

wobei unter den angegebenen Bedingungen über die ganzen $\mathfrak{a}$ summiert wird, so ist $\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$. Nach der Transformationsformel (9) gilt nun

$$\int u^{s-1}\vartheta_1(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,du$$

$$= (\lambda^{-1}-1)^{\frac{m}{4}-\frac{n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2}-s-1}\vartheta(u,1-\lambda,\mathfrak{S}\mathfrak{X},\mathfrak{S}^{-1})\,du$$

$$- \int_0^1 u^{s-1}\vartheta_0(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,du$$

$$= x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2}-s-1}\vartheta_1(u,1-\lambda,\mathfrak{S}\mathfrak{X},\mathfrak{S}^{-1})\,du$$

$$+ x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2}-s-1}\vartheta_0(u,1-\lambda,\mathfrak{S}\mathfrak{X},\mathfrak{S}^{-1})\,du$$

$$- \int_0^1 u^{s-1}\vartheta_0(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,du.$$

Mit der Abkürzung

$$(45)\quad \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \Big\{x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}} S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{\frac{m}{2}-s-1}\vartheta_0(u,1-\lambda,\mathfrak{S}\mathfrak{X},\mathfrak{S}^{-1})\,du$$

$$- \int_0^1 u^{s-1}\vartheta_0(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,du\Big\}\,d\mathfrak{P} = \varDelta$$

geht dann (44) über in

$$(46)\quad \frac{\varrho_{m-1}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}} S^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{1-\frac{m}{2}} x^{\frac{s}{2}} \{f_1\varphi(\mathfrak{S},s) + f_2\varphi(-\mathfrak{S},s)\} - \varDelta$$

$$= \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \Big\{\int_1^\infty u^{s-1}\vartheta_1(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,du\Big\}\,d\mathfrak{P}$$

$$+ x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}} S^{-n-\frac{1}{2}} \int_{g(\mathfrak{S}^{-1})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \Big\{\int_1^\infty u^{\frac{m}{2}-s-1}\vartheta_1(u,1-\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S}^{-1})\,du\Big\}\,d\mathfrak{P}$$

In dieser Relation ist die rechte Seite eine ganze Funktion von s. Zwecks Feststellung der Fortsetzbarkeit der Zetafunktion hat man jetzt den Ausdruck $\varDelta$ näher zu untersuchen. Dabei werde vorläufig vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine Quaternionen-Nullform sei. Für diesen Ausnahmefall selbst, der im letzten Paragraphen behandelt werden soll, ist die Untersuchung von $\varDelta$ auf besondere Art zu führen.

Nach (21), (37) und (38) ist

$$(47)\quad \int_{g(\mathfrak{S})} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}\mathfrak{Z}|^{-\frac{m}{2}} \vartheta_0(u,\lambda,\mathfrak{X},\mathfrak{S})\,d\mathfrak{P} = \sigma_{mn}^{-1} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}) + \sum_{\mathfrak{a}}{}' \psi(\mathfrak{a},\pi\gamma u).$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziierter ganzer Lösungen $\neq \mathfrak{n}$ von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$ durchläuft. Andererseits gilt nach (39) die Formel

$$\int_g \psi(\mathfrak{a}, u)\, d\mathfrak{T} = 2\,\varrho_n^{-1} \int_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}}\, e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}}\, d\mathfrak{X}. \tag{48}$$

Es sei $\mathfrak{a} = l\mathfrak{a}_0$ mit primitivem $\mathfrak{a}_0$. Wie in § 3 wähle man ein unimodulares $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{B})$, so daß

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{K} \end{pmatrix}$$

wird, mit positivem p, das der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0$ ist. Setzt man

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{q}{2p} & p^{-1}\mathfrak{b}' \\ 0 & 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{G}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_1' \\ \mathfrak{x}_2' \\ \mathfrak{X}_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{G}'\begin{pmatrix} \mathfrak{F} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{K} \end{pmatrix}\mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}\mathfrak{X} = p\,\mathfrak{x}_2', \qquad \mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a} = -(lp)^2\,\mathfrak{x}_2'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_2.$$

Die Matrix

$$(\mathfrak{a}_0\mathfrak{X})'\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_0\mathfrak{X}) = \begin{pmatrix} 0 & p\,\mathfrak{x}_2' \\ p\,\mathfrak{x}_2 & \mathfrak{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}^{(2)} & \mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}' & \mathfrak{T}_1^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

besitzt die Signatur $n, 1$, da nach Voraussetzung $\mathfrak{T} > 0$ ist. Da $\mathfrak{R}$ die Signatur 1, 1 hat, so wird nach (3) die Matrix

$$\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{Q}'\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}_2$$

positiv. Ferner ist

$$|\mathfrak{R}|\,|\mathfrak{T}_2| = -p^2\mathfrak{x}_2'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_2\,|\mathfrak{T}|.$$

Bedeutet nun ξ das erste Element von $\mathfrak{x}_2$, so wird $|\mathfrak{R}| = -(p\xi)^2$ und folglich

$$T_2 = \xi^{-2}\,T\,\mathfrak{x}_2'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_2. \tag{49}$$

Endlich sei noch $\xi\mathfrak{v}$ die erste Spalte von $\mathfrak{X}_3$ und

$$\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{v}\,\mathfrak{x}_2' = (\mathfrak{n}\,\mathfrak{V}).$$

Dann gilt

$$\mathfrak{V}'\mathfrak{K}\mathfrak{V} = \mathfrak{T}_2. \tag{50}$$

Jede zu $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ gehörige Einheit $\mathfrak{U}$ hat die in (26) angegebene Gestalt. Bei der Abbildung $\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}\mathfrak{X}$ bleibt dann $\mathfrak{x}_2$ fest, während $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{W}\mathfrak{v} + \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$ übergehen, mit der in (27) festgelegten Bedeutung von $\mathfrak{q}, \mathfrak{W}$.

In (48) führe man jetzt statt $\mathfrak{X}$ zuerst die Integrationsvariablen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{X}_3$ ein und dann statt $\mathfrak{x}_1$ die erste Spalte $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{T}$, statt $\mathfrak{X}_3$ die Variablen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$. Bedeutet x_1 das erste Element von $\mathfrak{x}_1$, so wird $\mathfrak{t} = p(\xi\mathfrak{x}_1 + x_1\mathfrak{x}_2) + \ldots$, und demnach hat die Funktionaldeterminante unserer Transformation den Wert $\frac{1}{2}(p\xi)^{-n}\xi^{m-2}$. Nach § 3 erhält man wegen (16), (30), (49), (50) die Formel

$$
\begin{aligned}
&2 \int\limits_{g^*(\mathfrak{a})} T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}}\, d\mathfrak{X} \\
&= \frac{\varrho_{m-2}}{2\,\varrho_{m-n-1}}\, p^{1-n}\mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a}_0) K^{-\frac{n-1}{2}} \int \xi^{m-n-2}\, T_2^{\frac{m-n}{2}-1}\, T^{\frac{n-m+1}{2}} e^{u\,\mathfrak{a}'\mathfrak{H}\mathfrak{a}}\, d\mathfrak{t}\, d\mathfrak{x}_2\, d\mathfrak{T}_2 \\
&= \frac{\varrho_{m-2}}{2\,\varrho_{m-n-1}} S^{\frac{1-n}{2}} \mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a}_0) \int\limits_{g} T^{-\frac{1}{2}} \Big\{ \int (\mathfrak{x}_2'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_2)^{\frac{m-n}{2}-1} e^{-(lp)^2 u\,\mathfrak{x}_2'\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}_2}\, d\mathfrak{x}_2 \Big\}\, d\mathfrak{T} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,\varrho_{m-2}}{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\varrho_{m-n-1}} S^{\frac{1-n}{2}} \mu(\mathfrak{S},\mathfrak{a}_0) \int\limits_0^\infty r^{\frac{m}{2}-2} e^{-(lp)^2 u r}\, dr \int\limits_{g} d\mathfrak{T}.
\end{aligned}
$$

In Verbindung mit (48) und (32) ergibt sich also

$$
\psi(\mathfrak{a}, u) = \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right) S^{-\frac{n+1}{2}} \mu(\mathfrak{S}^{-1},\mathfrak{r}_0)\,(u l^2)^{1-\frac{m}{2}},
$$

wobei $\mathfrak{r}_0 = p^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0$ ist. Summiert man noch über ein volles System nicht-assoziierter primitiver $\mathfrak{a}_0$ mit $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0 = 0$ und über alle ganzen $l > 0$, so wird nach (31)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mathfrak{a}}{}' \psi(\mathfrak{a}, \pi\gamma u) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1}\varrho_{m-n-1}}\,\pi^{1-\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)\zeta(m-2)\, S^{-\frac{n+1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0)\,(\gamma u)^{1-\frac{m}{2}}
\end{aligned}
$$

Vermöge (45) und (47) erhalten wir den expliziten Ausdruck

$$
\begin{aligned}
(51)\quad \Delta = {}& \frac{\varrho_m}{\varrho_n\,\varrho_{m-n}} S^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathfrak{S}) \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2}-\frac{m}{4}}}{s-\frac{m}{2}} - \frac{1}{s} \right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{\varrho_{m-2}}{\varrho_{n-1}\,\varrho_{m-n-1}}\,\pi^{1-\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)\zeta(m-2)\, S^{-\frac{n}{2}} (1+x)^{1-\frac{m}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \Bigg(\frac{M(\mathfrak{S},0)}{s-1} \\
&\qquad - \frac{S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{4}-\frac{n}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1},0)}{s-\frac{m}{2}+1} \Bigg)
\end{aligned}
$$

und damit ist auf Grund von (46) die Funktion $f_1\varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ in die ganze s-Ebene fortgesetzt. Sie ist überall regulär bis auf zwei Pole erster Ordnung bei $s = \frac{m}{2}$, $s = 0$ und zwei etwaige Pole erster Ordnung bei $s = 1$, $s = \frac{m}{2} - 1$. Die letzteren treten nur dann auf, wenn $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Um nun zu Aussagen über $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ selbst zu gelangen, hat man die Abhängigkeit der Koeffizienten f_1 und f_2 von x zu benutzen.

§ 7.

Die Funktionalgleichung.

Wir multiplizieren (46) mit $x^{\frac{m}{4} - \frac{n}{2}} S^{n + \frac{1}{2}}$ und ersetzen in der entstehenden Formel die Symbole λ, x, $\mathfrak{S}$, s durch $1 - \lambda$, x^{-1}, $\mathfrak{S}^{-1}$, $\frac{m}{2} - s$. Es ergibt sich dann rechts wieder genau die rechte Seite von (46). Da das Entsprechende für das durch (51) ausgedrückte Δ gilt, so folgt

$$(52) \quad \begin{aligned} &f_1(s, x)\, \varphi(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x)\, \varphi(-\mathfrak{S}, s) \\ &= S^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{n}{2} - 1} \Big\{ f_1\Big(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\Big)\, \varphi\Big(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\Big) \\ &\qquad + f_2\Big(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\Big)\, \varphi\Big(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Um hieraus die Funktionalgleichung in der Form (35) zu gewinnen, hat man die hypergeometrischen Funktionen f_1 und f_2 zu eliminieren. Benutzt man aus der Theorie dieser Funktionen die Beziehungen

$$x^{\frac{n}{2} - 1} \sin(\pi s)\, f_1\Big(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\Big) = \sin\Big(\pi s - \pi\frac{m - n}{2}\Big) f_1(s, x) + \sin\frac{\pi n}{2} f_2(s, x),$$

$$x^{\frac{n}{2} - 1} \sin(\pi s)\, f_2\Big(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\Big) = \sin\frac{\pi(m - n)}{2} f_1(s, x) + \sin\Big(\pi s - \frac{\pi n}{2}\Big) f_2(s, x)$$

und die lineare Unabhängigkeit von $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$, so erhält man (35).

Ohne explizite Benutzung der Theorie der hypergeometrischen Funktionen kann man auch folgendermaßen schließen. Es sei x beliebig komplex, aber $\neq 0, -1, \infty$. Bedeutet C eine von $+1$ nach $+1$ gehende einfach geschlossene Kurve, die den Nullpunkt der y-Ebene positiv umläuft und nicht den Punkt $-x^{-1}$ enthält, so ist

$$(53) \qquad (e^{2\pi i a} - 1)\, f(a, b, c, x) = \int_C y^a (1 - y)^b (1 + x y)^c\, dy,$$

und hier steht für $R(b) > -1$ auf der rechten Seite eine ganze Funktion von a. Zufolge (43) sind also $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ meromorphe Funktionen von s. Ferner ist der Quotient $f_1(s, x) : f_2(s, x)$ als Funktion des positiven x nicht konstant; es gilt nämlich

$$\lim_{x \to 0} x^{\frac{n}{2}-s} \frac{f_1(s, x)}{f_2(s, x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{m}{2}+1\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(s-\frac{n}{2}\right)}.$$

Nach (46) und (51) sind also $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ meromorphe Funktionen von s.

Die Darstellung (53) zeigt ferner, daß $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ als Funktionen von x regulär sind in der ganzen x-Ebene mit Ausnahme der Punkte $0, -1, \infty$ Die Funktionalgleichung (52) gilt also auch für komplexe x. Es sei nun $\sigma > \frac{m}{2} - 1$. Wir setzen $x = -1 \pm \delta i$ und lassen δ durch positive Werte gegen 0 streben. Nach (43) ergibt sich

$$f_1(s, x) \to \int_0^1 y^{s-\frac{m}{2}}(1-y)^{\frac{m}{2}-2}\, dy = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)\Gamma\left(s-\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(s)} = c_1$$

$$f_2(s, x) \to c_1 e^{\pm \pi i\left(\frac{m}{2}-1-s\right)}.$$

Andererseits folgt aus (53) durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes

$$e^{-2\pi i s} - 1) f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \to (e^{-\pi i \frac{m}{2}} - e^{-2\pi i s + \pi i \frac{m}{2}}) \int_1^\infty y^{-s}(y-1)^{\frac{m}{2}-2}\, dy$$

$$f_1\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \to c_1 \frac{\sin\left(\pi \frac{m}{2} - \pi s\right)}{\sin(\pi s)} = c_2$$

$$f_2\left(\frac{m}{2} - s, x^{-1}\right) \to c_2 e^{\pm \pi i (1-s)}.$$

Dies liefert als Spezialfall von (52) die Formel

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) - e^{\mp \pi i\left(s - \frac{m}{2}\right)} \varphi(-\mathfrak{S}, s)$$

$$= e^{\pm \pi i \frac{n}{2}} S^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\pi s - \frac{\pi m}{2}\right)}{\sin(\pi s)} \left\{\varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right) - e^{\mp \pi i s} \varphi\left(-\mathfrak{S}^{-1}, \frac{m}{2} - s\right)\right\}$$

und damit wieder Satz 2.

§ 8.

Die Residuen.

Es sei jetzt wieder $x > 0$. Zur Bestimmung der Residuen von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ hat man die Beziehungen (46) und (51) zu benutzen.

Als Funktionen von x genügen $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x(x+1)\frac{d^2 y}{d x^2}+\left\{\left(s-\frac{m+n}{2}+3\right)x+s-\frac{n}{2}+1\right\}\frac{d y}{d x}$$
$$+\left(\frac{m}{2}-s-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)y=0.$$

Hieraus folgt in üblicher Weise die Formel

$$(54)\qquad f_2\frac{d f_1}{d x}-f_1\frac{d f_2}{d x}=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\frac{\Gamma\left(s-\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma(s)}x^{\frac{n}{2}-s-1}(x+1)^{\frac{m}{2}-s}$$

Ferner lehrt (53), daß $f_1, f_2, \frac{d f_1}{d x}, \frac{d f_2}{d x}$ nach Division durch $\Gamma\left(s-\frac{m}{2}+1\right)$ ganze Funktionen von s werden. Differentiiert man nun (46) nach x und benutzt (54), so erkennt man, daß die beiden Funktionen

$$\pi^s\frac{\varphi(\mathfrak{S}, s)}{\Gamma(s)}=\zeta(\mathfrak{S}, s),\qquad \pi^s\frac{\varphi(-\mathfrak{S}, s)}{\Gamma(s)}=\zeta(-\mathfrak{S}, s)$$

höchstens vier Pole haben können, und zwar von erster Ordnung bei $s=\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}-1$, 1, 0. Zum Beweise der Sätze 1 und 3 hat man also nur noch jene Stellen zu untersuchen und dort die Residuen zu berechnen.

Es seien α und β die Residuen von $\varphi(\mathfrak{S}, s)$ und $\varphi(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s=\frac{m}{2}$. Nach (46) und (51) gilt dann

$$(55)\qquad \alpha f_1\left(\frac{m}{2}, x\right)+\beta f_2\left(\frac{m}{2}, x\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}S^{-\frac{1}{2}}\mu(\mathfrak{S})\,x^{\frac{n-m}{2}}(1+x)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Andererseits ist

$$(56)\qquad f_1\left(\frac{m}{2}, x\right)+f_2\left(\frac{m}{2}, x\right)$$
$$=\int_{-x^{-1}}^{1}(1-y)^{\frac{m-n}{2}-1}(1+x y)^{\frac{n}{2}-1}\,d y=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{\frac{n-m}{2}}(1+x)^{\frac{m}{2}-1}$$

und $f_1\left(\frac{m}{2}, 0\right)=\frac{2}{m-n}$, also der Quotient $f_1\left(\frac{m}{2}, x\right):f_2\left(\frac{m}{2}, x\right)$ nicht konstant. Aus (55) und (56) folgt jetzt

$$\alpha=\beta=S^{-\frac{1}{2}}\mu(\mathfrak{S}),$$

und die Residuen von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{m}{2}$ haben den gemeinsamen Wert

$$\varrho(\mathfrak{S}) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} S^{-\frac{1}{2}} \mu(\mathfrak{S}).$$

Aus der Funktionalgleichung (35) entnehmen wir jetzt, daß die Funktionen $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 0$ regulär sind. Für gerades $m - n$ ergibt sich noch die einfache Wertbestimmung

$$\zeta(\mathfrak{S}, 0) = (-1)^{\frac{m-n}{2}-1} \mu(\mathfrak{S}).$$

Nunmehr werde das Verhalten bei $s = \frac{m}{2} - 1$ untersucht. Aus (46) und (51) folgt, daß der Ausdruck

$$(57) \qquad f_1(s, x)\,\zeta(\mathfrak{S}, s) + f_2(s, x)\,\zeta(-\mathfrak{S}, s)$$
$$+ \frac{1}{2}\pi^{\frac{1-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2) \left(\frac{S^{-\frac{1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0)}{s - \frac{m}{2} + 1} - \frac{x^{\frac{n}{2} - \frac{m}{4}} M(\mathfrak{S}, 0)}{s - 1} \right)$$

und seine Ableitung nach x bei $s = \frac{m}{2} - 1$ regulär ist. Ferner haben nach (42) die Funktionen $f_1(s, x)$ und $f_2(s, x)$ bei $s = \frac{m}{2} - 1$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum 1, während ihre Ableitungen nach x dort regulär sind. Vermöge (54) erkennen wir, daß die Funktion

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)} \zeta(\mathfrak{S}, s)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{m}{4} - \frac{n}{2}\right) \pi^{\frac{1-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2)\, x^{\frac{m}{4}-1} (x+1)^{\frac{m}{2}-2} \frac{M(\mathfrak{S}, 0)}{s-1}$$

bei $s = \frac{m}{2} - 1$ regulär ist. Liegt nicht der Fall $m = 4$, $n \neq 2$ vor, so ist also $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ regulär bei $s = \frac{m}{2} - 1$, und ebenfalls $\zeta(-\mathfrak{S}, s)$. Ist aber $m = 4$, $n \neq 2$, so hat $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{m}{2} - 1 = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $(-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{24} M(\mathfrak{S}, 0)$.

Endlich ist noch die Stelle $s = 1$ zu untersuchen. Dabei kann man $m \neq 4$ voraussetzen, da man sonst auf den soeben behandelten Fall

$s = \frac{m}{2} - 1$ zurückkäme. Wegen der Regularität des Ausdrucks (57) bei $s = \frac{m}{2} - 1$ ist nun

$$(58)\ \zeta\left(\mathfrak{S}, \frac{m}{2} - 1\right) + \zeta\left(-\mathfrak{S}, \frac{m}{2} - 1\right) = -\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1-m}{2}}\, \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \zeta(m-2) S^{-\frac{1}{2}} M(\mathfrak{S}^{-1}, 0).$$

Für gerades $m - n$ folgt aus (1) die Regularität von $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$. Für ungerades $m - n$ folgt aus (2) und (58), daß $\zeta(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} (2\pi)^{2-m}\, \Gamma(m-2)\, \zeta(m-2)\, M(\mathfrak{S}, 0)$$

besitzt. Nach dem im vorigen Absatz Bewiesenen gilt diese Formel auch für $m = 4$. Im Falle eines geraden m läßt sich auf Grund der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion für $\varrho_1(\mathfrak{S})$ der einfachere Ausdruck

$$\varrho_1(\mathfrak{S}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, \tfrac{1}{2}\, \zeta(3-m)\, M(\mathfrak{S}, 0)$$

angeben.

Damit sind die Sätze 1, 2, 3 bewiesen, wenn von dem bisher ausgeschlossenen Fall einer Quaternionen-Nullform $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ abgesehen wird. Dieser Fall ist nun noch zu untersuchen.

§ 9.

Die Quaternionen-Nullform.

Es sei fortan $m = 4$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform und $|\mathfrak{S}|$ das Quadrat einer rationalen Zahl, also $n = 2$. Da $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform ist, so läßt sie sich durch eine lineare rationalzahlige Substitution in $2\, y_1 y_4 + Q$ transformieren, wobei Q eine quadratische Form in y_2, y_3 mit rationalen Koeffizienten bedeutet. Die Determinante $|\mathfrak{S}|$ ist das Quadrat einer rationalen Zahl und folglich die binäre Form Q rational zerlegbar; man kann also $Q = -2\, y_2 y_3$ voraussetzen. Die gegebene Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ geht demnach durch eine geeignete lineare rationalzahlige Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{R}\mathfrak{y}$ in $2\,(y_1 y_4 - y_2 y_3)$ über, und dabei ist $|\mathfrak{R}| = S^{-\frac{1}{2}}$. Man bezeichne die Matrix der Form $2\,(y_1 y_4 - y_2 y_3)$ mit $\mathfrak{S}_0$ und setze noch

$$\begin{pmatrix} y_4 & y_2 \\ y_3 & y_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Y}.$$

Man wähle nun eine natürliche Zahl $q > 2$, die durch das Produkt der Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^{-1}$ teilbar ist. Ist dann $\mathfrak{U}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, die $\equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ ist, so ist $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{U}\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_0$ eine Einheit von $\mathfrak{S}_0$. Ist umgekehrt $\mathfrak{U}_0$ eine Einheit von $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{U}_0 \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$, so ist $\mathfrak{R}\mathfrak{U}_0\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{U}$

eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Folglich gibt es in $\Gamma(\mathfrak{S})$ eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ mit endlichem Index j und in $\Gamma(\mathfrak{S}_0)$ eine Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ mit endlichem Index, so daß $\Gamma_1(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)\mathfrak{R}^{-1}$ ist. Eine zulässige Wahl von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ ist die folgende. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unimodulare zweireihige Matrizen, so wird durch die Substitution

$$\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{A}'\mathfrak{Y}\mathfrak{B} \tag{59}$$

eine Einheit $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{S}_0$ definiert, die kurz mit $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ bezeichnet werde. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$, so ist auch $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$. Wir wählen für $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ die Gruppe dieser $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$.

Es sei $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$ eine ganzzahlige Lösung von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a} = 0$. Dann ist $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ eine rationale Lösung von $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$, also $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$, wenn a_1, a_2, a_3, a_4 die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ bedeuten. Setzt man noch

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_0,$$

so kann man zwei unimodulare Matrizen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ derart finden, daß

$$\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \tag{60}$$

wird, wobei $\delta = \delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a}$ bedeutet. Ist nun $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ eine Einheit der Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$, welche $\mathfrak{a}_0$ als Fixpunkt hat, also ein Element von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{a}_0)$, so gilt

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_0\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0,$$

und hieraus folgt vermöge (60), daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathfrak{A}_1^{-1}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathfrak{B}_1^{-1}$$

besitzen, wobei α und β beide durch q teilbar sind. Umgekehrt liefert jedes solche Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wieder ein Element $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} = \mathfrak{U}_0$ von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0, \mathfrak{a}_0)$.

Wir haben jetzt den durch (45) erklärten Ausdruck Δ zu berechnen. Aus dem Fundamentalbereiche $g(\mathfrak{S})$ für die gekürzte Einheitengruppe $\Gamma^*(\mathfrak{S})$ erhält man einen Fundamentalbereich $g_1(\mathfrak{S})$ für die Untergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S})$, indem man $\frac{1}{2}j$ geeignete Bilder von $g(\mathfrak{S})$ vereinigt. Um $\mathfrak{S}_0$ an Stelle von $\mathfrak{S}$ in Δ einzuführen, setze man

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{(2)}, \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}_0, \quad \mathfrak{S}_0\mathfrak{Z}\mathfrak{T}_0^{-1}\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{B}$$

und bilde die Summe

$$\psi_1(u, \mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0} e^{-\pi\gamma u \mathfrak{a}_0'\mathfrak{B}\mathfrak{a}_0},$$

in welcher $\mathfrak{a}_0$ alle Lösungen von $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$ mit ganzem $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ durchläuft. Ferner sei $\psi_2(u, \mathfrak{Z})$ die Summe mit demselben allgemeinen Gliede, wobei aber $\mathfrak{a}_0$ alle Lösungen von $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$ mit ganzem $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ durchläuft. Bedeutet nun $g_1(\mathfrak{S}_0)$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$, so wird

(61) $$\tfrac{1}{2} j S \Delta = \int_{g_1(\mathfrak{S}_0)} |\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{Z}|^{-2} \{S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{1-s}\varphi_2(u,\mathfrak{Z})\,du - \int_0^1 u^{s-1}\varphi_1(u,\mathfrak{Z})\,du\}\, d\mathfrak{P}.$$

Ist

(62) $$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

so gilt

(63) $$\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} -2v_1 & u_1 - v_2 \\ u_1 - v_2 & 2u_2 \end{pmatrix},$$

und die Bedingung $\mathfrak{T}_0 > 0$ liefert

(64) $$u_2 > 0, \quad (u_1 - v_2)^2 + 4 v_1 u_2 < 0.$$

Wir definieren nun durch die Gleichung $(1, \xi, \eta, \xi\eta)\,\mathfrak{Z} = \mathfrak{n}'$, oder ausführlicher

(65) $$u_1 + \xi v_1 + \eta = 0, \quad u_2 + \xi v_2 + \xi\eta = 0,$$

zwei Größen ξ und η. Für ξ erhält man die quadratische Gleichung $v_1\xi^2 + (u_1 - v_2)\xi - u_2 = 0$, deren Wurzeln nach (64) imaginär sind. Wir können also voraussetzen, daß der imaginäre Teil ξ_2 von $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ positiv sei. Zufolge (64) und (65) liegt dann auch $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ in der oberen Halbebene. Sind $\bar\xi, \bar\eta$ konjugiert komplex zu ξ, η, so wird

(66) $$u_1 = \frac{\bar\xi\eta - \xi\bar\eta}{\xi - \bar\xi}, \quad v_1 = \frac{\bar\eta - \eta}{\xi - \bar\xi}, \quad u_2 = \frac{\eta - \bar\eta}{\xi - \bar\xi}\xi\bar\xi, \quad v_2 = \frac{\xi\bar\eta - \bar\xi\eta}{\xi - \bar\xi},$$

und daher ist die Funktionaldeterminante

(67) $$\frac{d(u_1 v_1 u_2 v_2)}{d(\xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2)} = 4\eta_2^2 \xi_2^{-2}.$$

Ferner findet man

(68) $$|\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}_0\mathfrak{Z}| = 4\eta_2^2.$$

Ist nun $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ ein Element von $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

so ist die Abbildung $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{U}_0\mathfrak{Z}$ zufolge (59) und (65) gleichbedeutend mit den simultanen Modulsubstitutionen

(69) $$\xi \to \frac{\alpha_1\xi + \alpha_2}{\alpha_3\xi + \alpha_4}, \qquad \eta \to \frac{\beta_1\eta + \beta_2}{\beta_3\eta + \beta_4}.$$

Die Modulsubstitutionen mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{E} \pmod{q}$ bilden die Hauptkongruenzuntergruppe q-ter Stufe der Modulgruppe. Wir wählen für sie einen Fundamentalbereich g_0 in der oberen Halbebene. Läßt man dann ξ und η unabhängig voneinander je den Bereich g_0 durchlaufen, so beschreibt der nach (62) und (66) zugeordnete Punkt $\mathfrak{P}$ den Fundamentalbereich $g_1(\mathfrak{S}_0)$.

Der Übergang von (61) zu einer mit (51) analogen Formel läßt sich nicht ohne weiteres ausführen, da bei direkter Übertragung der früheren Rechnung jetzt divergente Integrale auftreten würden. Um dies zu vermeiden, entferne man von dem Fundamentalbereich g_0 die Umgebung der parabolischen Eckpunkte, indem man für festes $\varepsilon > 0$ das Gebiet $\xi_2 > \varepsilon^{-1}$ und seine sämtlichen Bildgebiete bei allen Modulsubstitutionen fortläßt. So entsteht ein im Innern der oberen Halbebene gelegenes endliches Gebiet g_ε. Zufolge (67) und (68) geht jetzt (61) über in

$$(70)\quad 2jS\Delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{g_\varepsilon} \iint\limits_{g_\varepsilon} \Big\{ S^{-\frac{1}{2}} \int_1^\infty u^{1-s}\, \psi_2(u, \mathfrak{Z})\, du - \int_0^1 u^{s-1}\, \psi_1(u, \mathfrak{Z})\, du \Big\} (\xi_2 \eta_2)^{-2}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2.$$

Nun fasse man in der Summe $\psi_1(u, \mathfrak{Z})$ alle Glieder zusammen, für welche $\mathfrak{a}_0$ mit einem festen $\mathfrak{a}_1$ in bezug auf die Einheitenuntergruppe $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ assoziiert ist. Macht man noch die Modulsubstitutionen (69) mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_1, \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_1,$$

wobei $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ die in (60) auftretenden Matrizen sind, so wird $\mathfrak{a}_1' \mathfrak{S}_0 \mathfrak{Z} = \delta(\mathfrak{a}_1)(0\ 1)$, und man erhält mit Hilfe von (66), (68), (63) die Beziehung

$$\mathfrak{a}_1' \mathfrak{B}\, \mathfrak{a}_1 = \frac{\delta^2(\mathfrak{a}_1)}{2\, \xi_2 \eta_2}.$$

Jene $\mathfrak{a}_0$ liefern zu dem Integral auf der rechten Seite von (70) den Beitrag

$$-\iint\limits_{b_\varepsilon} \iint\limits_{b_\varepsilon} \Big\{ \int_0^1 u^{s-1} e^{-\pi \gamma u \frac{\delta^2(\mathfrak{a}_1)}{2 \xi_2 \eta_2}}\, du \Big\} (\xi_2 \eta_2)^{-2}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

wo der Bereich b_ε aus dem Halbstreifen $0 \leqq \xi_1 \leqq q$ der oberen ξ-Halbebene durch die oben erklärte Ausschließung der Umgebungen der rationalen Randpunkte entsteht. In analoger Weise vereinige man die Summanden von $\psi_2(u, \mathfrak{Z})$.

Jetzt hat man noch bei ψ_1 über ein volles System solcher $\mathfrak{a}_1$ zu summieren, die nicht-assoziiert in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ sind und für welche $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_1$ ganz ist Man wähle zunächst die endlich vielen nicht-assoziierten $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_0$ aus, so daß $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ primitiv ist. Man erhält dann alle $\mathfrak{a}_1$ in der Form $\mathfrak{a}_1 = l\mathfrak{a}_0$ mit natürlichem l. Bei ψ_2 hat man die $\mathfrak{a}_1$ so zu normieren, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_1$ ganz ist. Sie ergeben sich aus den soeben definierten $\mathfrak{a}_0$ in der Form $\mathfrak{a}_1 = rl\mathfrak{a}_0$ mit natürlichem l, wobei r^{-1} den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$ bedeutet. Außerdem hat man noch das Glied $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{n}$ zu berücksichtigen. Es wird

$$(71)\quad 2jS\Delta = v^2\left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2} - \frac{1}{s}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\mathfrak{a}_0}\iint_{b_\varepsilon}\iint_{h_\varepsilon}\int_0^1 u^{s-3}\Big\{S^{-\frac{1}{2}}u^{-1}\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\gamma(r\delta l)^2}{2u\xi_2\eta_2}} - u\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\gamma(\delta l)^2}{2\xi_2\eta_2}u}\Big\}du\,(\xi_2\eta_2)^{-2}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\eta_1\,d\eta_2.$$

Dabei ist v das bekannte nicht-euklidische Volumen von g_0, δ und r^{-1} sind die größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$, und $\mathfrak{a}_0$ durchläuft ein volles System in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S}_0)$ nicht-assoziierter Lösungen von $\mathfrak{a}_0'\mathfrak{S}_0\mathfrak{a}_0 = 0$ mit primitivem $\mathfrak{R}\mathfrak{a}_0$.

Bezeichnet man mit w den Grenzwert auf der rechten Seite von (71), so wird

$$\frac{\pi\gamma}{2q^2}w = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\mathfrak{a}_0}\int_0^{\varepsilon^{-1}}\Big(\int_0^1 u^{s-2}\Big\{S^{-\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{\infty}(r\delta l)^{-2}e^{-\frac{\pi\gamma\varepsilon(r\delta l)^2}{2u\eta_2}} - \sum_{l=1}^{\infty}(\delta l)^{-2}e^{-\frac{\pi\gamma\varepsilon(\delta l)^2}{2\eta_2}u}\Big\}du\Big)\frac{d\eta_2}{\eta_2}$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}_0}\int_0^1 u^{s-2}\sum_{l=1}^{\infty}(\delta l)^{-2}\left\{S^{-\frac{1}{2}}r^{-2}\log\frac{2u}{\pi\gamma(r\delta l)^2} - \log\frac{2}{\pi\gamma u(\delta l)^2}\right\}du + \frac{\pi^2}{6(s-1)}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2}(S^{-\frac{1}{2}}r^{-2}-1)\int_\varepsilon^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2}(S^{-\frac{1}{2}}r^{-2}-1) = 0$$

und sodann

$$\frac{\pi\gamma}{2q^2}w = \frac{\pi^2}{3}\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2}\Big\{\int_0^1 u^{s-2}\log u\,du + (\log\delta - S^{-\frac{1}{2}}r^{-2}\log(r\delta))\int_0^1 u^{s-2}\,du\Big\}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3(s-1)^2}\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2} + \frac{c}{s-1}$$

mit konstantem c. Also ist

$$(72)\qquad 2jS\Delta = v^2\left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2} - \frac{1}{s}\right) - \frac{2\pi q^2}{3\gamma(s-1)^2}\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2} + \frac{c_1}{\gamma(s-1)}$$

Damit ist Δ bestimmt.

Im vorliegenden Falle ist andererseits

$$f_1(s,x) = \int_0^1 y^{s-2}\,dy = \frac{1}{s-1},\qquad f_2(s,x) = \frac{x^{1-s}}{s-1}.$$

Also wird nach (46) und (72) der Ausdruck

$$j\pi^{2-s}\Gamma(s)\{x^{\frac{s-1}{2}}\zeta(\mathfrak{S},s)+x^{\frac{1-s}{2}}\zeta(-\mathfrak{S},s)\}$$
$$-\frac{s-1}{4}v^2\left(\frac{S^{-\frac{1}{2}}}{s-2}-\frac{1}{s}\right)(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})+\frac{\pi q^2}{6(s-1)}\sum_{\mathfrak{a}_0}\delta^{-2}$$

eine ganze Funktion von s, die sich nicht ändert, wenn man sie mit $S^{\frac{1}{2}}$ multipliziert und dann x, $\mathfrak{S}$, s durch x^{-1}, $\mathfrak{S}^{-1}$, $2-s$ ersetzt. Außerdem hängt ihr Wert bei $s=1$ nicht von x ab. Hieraus findet man nun wieder die Funktionalgleichung von $\zeta(\mathfrak{S},s)$ und erkennt, daß diese Funktion in der ganzen endlichen s-Ebene regulär ist bis auf Pole erster Ordnung bei $s=2$ und $s=1$. Für das Residuum bei $s=1$ ergibt sich der negative rationale Wert

$$\varrho_1(\mathfrak{S})=-\frac{q^2}{12j}\sum_{\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=0}\{\delta(\mathfrak{a})\}^{-2},$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein volles System primitiver, in bezug auf $\Gamma_1(\mathfrak{S})$ nicht-assoziierter Lösungen von $\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}=0$ durchläuft und $\delta(\mathfrak{a})$ den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{a}$ bedeutet.

Damit sind unsere sämtlichen Behauptungen bewiesen.

(Eingegangen am 18. März 1938.)