Commun. Math. Phys. 102, 497–502 (1985)

Communications in Mathematical Physics

Ergodicité et fonctions propres du laplacien

Y. Colin de Verdiere

Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, Université de Grenoble I,
F-38402 Saint-Martin-d'Heres Cedex, France

Résumé. Nous donnons la preuve d'une généralisation d'un résultat récent de S. Zelditch concernant la répartition asymptotique des fonctions propres du laplacien sur une variété compacte dont le flot géodésique est ergodique.

Abstract. Here we give the proof of some generalization of a recent result by S. Zelditch. It has to do with the asymptotic behaviour of Laplacian's eigenfunctions on a compact manifold whose geodesic flow is ergodic.

Soient M une variété riemannienne compacte, Δ le laplacien de M, (φ_k) $(k=0,1,2,\ldots)$ une base orthonormée de $L^2(X)$ formée de fonctions propres associées à la suite croissante de valeurs propres λ_k. Si A est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, on s'intéresse au comportement asymptotique quand $k\to+\infty$ de la suite $\langle A\varphi_k|\varphi_k\rangle$ où $\langle\,|\,\rangle$ est le produit L^2. Plus précisément, si a est le symbole principal de A, S^*M le fibré des vecteurs cotangents unitaires et $d\omega$ la mesure de Liouville normalisée par $\int d\omega=1$ sur S^*M, à quelles conditions a-t-on

$$\lim_{k\to+\infty} \langle A\varphi_k|\varphi_k\rangle = \int_{S^*M} a\,d\omega\,?$$

La réponse n'est pas toujours oui comme on peut le voir par examen du cas de la sphère S^2 munie de la métrique usuelle: si $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est le champ de vecteurs des rotations infinitésimales autour d'un axe, il existe une base orthonormée $Y_{\ell,m}$ de $L^2(X)$ (harmoniques sphériques) telle que:

$$\begin{cases} \Delta Y_{\ell,m}=\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}Y_{\ell,m}=imY_{\ell,m} \end{cases}$$

avec $\ell=0,1,2,\ldots$, et $-\ell\leqq m\leqq\ell$.

Considérons la sous-suite $Y_{\ell,\ell}=c_\ell(x+iy)^\ell_{|S^2}$, alors les $Y_{\ell,\ell}$ se concentrent quand $\ell\to\infty$ sur l'équateur de S^2 au sens que, si $\varepsilon>0$ est donné et si B_ε est le voisinage tubulaire d'épaisseur ε de l'équateur, on a:

$$\int_{S^2\setminus B_\varepsilon} |Y_{\ell,\ell}|^2=O(e^{-c(\varepsilon)\ell}).$$

De plus, si nous définissons la densité $D(S)$ d'une partie S du spectre par:

$$D(S)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\#\{\lambda_k\in S|\lambda_k\leqq\lambda\}}{\#\{\lambda_k\leqq\lambda\}},$$

on peut par un procédé analogue construire une suite de densité >0 qui se concentre dans un voisinage tubulaire fixé de l'équateur.

Ce qui joue un rôle dans cet exemple est l'existence de régions de S^*M invariantes pour le flot géodésique et de mesure >0 dans lesquelles une suite de fonctions propres peut se concentrer au sens que nous avons étudié dans [CV 1]: à une suite de fonctions propres (ou même de quasi-fonctions propres) est associé dans cet article son *microsupport*, qui est un fermé de S^*M, invariant par le flot géodésique, tel que, si A est un OPD tel que $WF(A)$ ne rencontre pas le microsupport de la suite φ_{k_i}, alors, pour tout s, $\|A\varphi_{k_i}\|_{H^s(M)}$ est une suite à décroissance rapide. Dans l'exemple précédent, la projection sur M du microsupport de la suite $(Y_{\ell,\ell})$ est l'équateur de S^2. On a le résultat général $D(S)\leqq\text{vol}$ (Microsupport (S)), où le volume est calculé avec la probabilité de Liouville.

Le résultat énoncé vers 1974 par A. Schnirelman est tout à fait remarquable:

Théorème. *Si le flot géodésique sur M est ergodique, il existe une sous-suite $(\lambda_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de densité* 1 *du spectre du laplacien telle que, pour tout opérateur pseudo-différentiel A d'ordre* 0 *et de symbole principal a, on ait:*

$$\lim_{i\to+\infty}\langle A\varphi_{k_i}|\varphi_{k_i}\rangle=\int_{S^*M} a\,d\omega.$$

En fait la démonstration de Schnirelman est incomplète, et ce n'est que récemment que S. Zelditch a donné une démonstration plus complète dans le cas des variétés à courbure constante négative en s'appuyant sur un calcul pseudo-différentiel adapté à la géométrie hyperbolique. Les articles de Zelditch contiennent en fait suffisamment d'éléments pour construire une démonstration complète, et en fait simple du théorème précédent.

C'est un problème ouvert, à ma connaissance de savoir si on peut éviter d'avoir à extraire une sous-suite de densité 1. On peut aussi noter un corollaire simple du théorème:

Corollaire. *Soit $D\subset M$ un ouvert régulier, alors:*

$$\lim_{i\to\infty}\int_D|\varphi_{k_i}|^2=\frac{\text{vol}(D)}{\text{vol}(M)}.$$

Il est aussi peut-être nécessaire de rappeler la définition de l'ergodicité:

Définition. Le flot géodésique $(G_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est dit ergodique si, pour toute fonction continu f sur S^*M, on a, pour presque tout $x\in S^*M$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(G_t(x))dt=\int_{S^*M} f\cdot d\omega$$

(en fait on peut prendre le presque partout indépendamment du choix de f).

Cette définition montre à l'évidence que le théorème précédent est un bon analogue quantique de l'ergodicité d'un système hamiltonien classique.

Nous décrivons maintenant les éléments de la preuve du théorème.

1.1. La quantification de Friedrichs

Il est bien connu que l'OPD associé à un symbole $\geqq 0$ n'est pas nécessairement un opérateur $\geqq 0$: par exemple si $a(x,\xi)=a(x)\xi^2$ avec $a\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $a\geqq 0$, l'OPD associé à a par la quantification usuelle est $A=-a(x)\frac{d^2}{dx^2}$ qui n'est pas $\geqq 0$ sur $L^2(\mathbb{R})$: si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifie $\varphi''=\varphi$ sur le support de a, on a: $(A\varphi|\varphi)=-\int_{\mathbb{R}} a\varphi^2<0$. Au contraire l'opérateur $-\frac{d}{dx}\left(a\frac{d}{dx}\right)$ est $\geqq 0$.

Il existe une généralisation de cette remarque, due à Friedrichs (voir [T, p. 142, Théorème 2.2]):

Théorème. *Il existe une application linéaire $a\mapsto Op^F(a)$ qui, à un symbole classique de degré 0, associe un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, de symbole principal a et tel que:*

$$a\geqq 0 \;\Rightarrow\; Op^F(a)\geqq 0 \quad \text{sur } L^2(M).$$

De plus $Op(a)-Op^F(a)$ est d'ordre -1.

La démonstration utilise les OPD $b(D,x,D)$ associés à un symbole $b(\xi_1,x,\xi_2)$ et une construction à partir de $a(x,\xi)$ d'un symbole double:

$$b(\xi_1,x,\xi_2)=\int F(\xi_2,\zeta)a(x,\zeta)F(\xi_1,\zeta)d\zeta,$$

où

$$F(\xi,\zeta)=(1+|\xi|^2)^{-n/8}q((1+|\xi|^2)^{-1/4}(\xi-\zeta))$$

et $q\in C_0^\infty(|\xi|\leqq 1)$ avec $\|q\|_{L^2}=1$.

Une fois la construction faite dans $\mathbb{R}^n$, il n'est pas difficile par partition de l'unité de l'étendre à toute variété compacte: si $A_i\geqq 0$, $\sum\varphi_iA_i\varphi_i\geqq 0$ et on choisit une partition telle que $\sum\varphi_i^2=1$ (il faut choisir des cartes isochores, i.e. telles que la forme volume de M soit transformée en la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$).

2. Representation integrale

Considérons maintenant pour $a\in C^\infty(S^*M)$ (qu'on étend par homogénéité de degré 0 à $T^*M\backslash 0$), la correspondance qui, à a, associe $\mu_k(a)=\langle Op^F(a)\varphi_k|\varphi_k\rangle$. Il est clair que μ_k est une distribution $\geqq 0$, donc d'après L. Schwartz, une mesure de Radon (de masse 1) sur S^*M. Cette mesure représente lorsque $k \to \infty$ la localisation de φ_k dans S^*M (au sens de la norme L^2 microlocalisée).

3. Le théorème d'Egorov

On a le:

Théorème. *Pour tout $a \in C^\infty(S^*M)$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:*

$$\lim_{k \to \infty} \int_{S^*M} (a - a \circ G_t) d\mu_k = 0,$$

où G_t est le flot géodésique: $\mu_k - G_t^*(\mu_k)$ converge vaguement vers 0 quand $k \to \infty$ (t fixé)

Preuve. Soit $A_t = e^{-it\sqrt{\Delta}} A e^{it\sqrt{\Delta}}$ où $A = Op^F(a)$, on a:

$$\langle A_t \varphi_k | \varphi_k \rangle = \langle A \varphi_k | \varphi_k \rangle = \int a d\mu_k;$$

d'autre part, si a_t est le symbole principal de A_t, $A_t - Op^F(a_t)$ est d'ordre -1, donc: $\langle A_t \varphi_k | \varphi_k \rangle = \int a_t \cdot d\mu_k + O(\lambda_k^{-1/2})$; on applique alors le théorème d'Egorov qui affirme que $a_t = a \circ G_t$.

4. Convergence en moyenne

Soit toujours $A = Op^F(a)$ avec $a \geqq 0$, on a:

$$\mathrm{Tr}(Ae^{-t\Delta}) = \sum_k e^{-t\lambda_k} \langle A \varphi_k | \varphi_k \rangle,$$

et par les méthodes de calcul symbolique classique, on a:

$$\mathrm{Tr}(Ae^{-t\Delta}) / \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) \underset{t \to 0^+}{\sim} \int a d\omega,$$

donc, comme $A \geqq 0$, par le théorème taubérien de Karamata:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{N_\lambda} \cdot \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} \int a d\mu_k = \int a d\omega, \quad \text{avec} \quad N_\lambda = \#\{\lambda_k \leqq \lambda\}.$$

On a ainsi une convergence vague, en moyenne, de μ_k vers ω. Jusque là on n'a pas utilisé l'ergodicité.

5. Où l'ergodicité est utilisée

On pose, pour $a \in C^\infty(S^*M)$ avec $\|a\|_{L^\infty} = 1$, $a_{T_0}(z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a(G_t(z)) dt$, $\bar{a} = \int a d\omega$ et $\hat{a}_{T_0}(z) = a_{T_0}(z) - \bar{a}$. *On se donne un* $\varepsilon > 0$. L'ergodicité implique, pour presque tout $z \in S^*M$, $\lim_{T_0 \to +\infty} \hat{a}_{T_0}(z) = 0$ et comme $\|\hat{a}_{T_0}\|_{L^\infty} \leqq 2$, on a, d'après Lebesgue, l'existence d'un $T_0 > 0$ tel que $\int |\hat{a}_{T_0}| d\omega \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $\bar{\mu}_\lambda = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{\lambda_k \leqq \lambda} \mu_k$ converge vaguement vers $d\omega$, on a:

$$\exists T_0, \exists \lambda_0, \forall \lambda \geqq \lambda_0, \quad \int |\hat{a}_{T_0}| d\bar{\mu}_\lambda \leqq \varepsilon. \tag{1}$$

D'après l'inégalité de Chebychev, on a alors:

$$\frac{1}{N_\lambda} \# \{\lambda_k \leqq \lambda \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \geqq \sqrt{\varepsilon}\} \leqq \sqrt{\varepsilon}, \quad \text{pour} \quad \lambda \geqq \lambda_0. \tag{2}$$

Soit alors:

$$B_\varepsilon = \{\lambda_k \mid \int |\hat{a}_{T_0}| d\mu_k \leqq \sqrt{\varepsilon}\}, \quad \text{on a} \quad D(B_\varepsilon) \geqq 1 - \sqrt{\varepsilon};$$

Soit $C_\varepsilon = \{\lambda_k \mid |\int [a(z) - \bar{a}] d\mu_k| \leqq 2\sqrt{\varepsilon}\}$ et

$$D_\varepsilon = \{\lambda_k \mid |\int (a_{T_0} - a) d\mu_k| \leqq \sqrt{\varepsilon}\},$$

qui est de densité 1 d'après la sect. 3. On a évidemment $C_\varepsilon \supset B_\varepsilon \cap D_\varepsilon$, on en déduit $D(C_\varepsilon) \geqq 1 - \sqrt{\varepsilon}$.

Soit maintenant $A_n = \left\{\lambda_k \,\middle|\, |c_k| \leqq \frac{2}{n}\right\}$, $c_k = \langle A\varphi_k | \varphi_k \rangle - \int a\, d\omega$, on a $D(A_n) \geqq 1 - \frac{1}{n}$. On en déduit, par un lemme facile, l'existence d'un ensemble A_∞ de densité tel que $\lim_{k \to \infty,\, \lambda_k \in A_\infty} c_k = 0$ (procédé diagonal).

Il reste à voir qu'on peut *choisier l'ensemble A_∞ indépendamment de la fonction a.*

Soit Φ_ℓ une base orthonormée de fonctions propres du laplacien sur S^*M, et soit $\mathscr{S}_\ell \subset \{\lambda_k\}$ de densité 1, tel que:

$$\lim_{\lambda_k \to \infty,\, \lambda_k \in \mathscr{S}_\ell} \int \Phi_\ell \, d\mu_k = \int \Phi_\ell \, d\omega.$$

On peut évidemment supposer que, $\forall \ell$, $\mathscr{S}_{\ell+1} \subset \mathscr{S}_\ell$. Soit alors

$$a_1 \text{ tel que}, \quad \forall \lambda \geqq a_1, \quad \frac{1}{N_\lambda} \# \{\lambda_k \in \mathscr{S}_1 \mid \lambda_k \leqq \lambda\} \geqq 1 - \frac{1}{2}, \ldots,$$

$$a_\ell \text{ tel que}, \quad \forall \lambda \geqq a_\ell, \quad \frac{1}{N_\lambda} \# \{\lambda_k \in \mathscr{S}_\ell \mid \lambda_k \leqq \lambda\} \geqq 1 - \frac{1}{2^\ell},$$

on construit $\mathscr{S}_\infty$ tel que $\mathscr{S}_\infty \cap [a_\ell, a_{\ell+1}] = \mathscr{S}_\ell \cap [a_\ell, a_{\ell+1}]$ et donc $\mathscr{S}_\infty \restriction_{[0, a_{\ell+1}]} \supset \mathscr{S}_\ell \restriction_{[0, a_{\ell+1}]}$, on voit que $D(\mathscr{S}_\infty) = 1$.

Les μ_k sont donc une suite de mesures de probabilité qui, lorsque, $\lambda_k \to \infty$ avec $\lambda_k \in \mathscr{S}_\infty$ convergent vaguement sur un ensemble dense de $C(S^*M)$, donc on a la convergence vague des μ_k ($\lambda_k \in \mathscr{S}_\infty$) vers la mesure de Liouville.

6. Généralisations et problèmes

Il serait intéressant de généraliser aux problèmes à bord avec un billard ergodique, à l'asymptotique semi-classique ($\hbar \to 0$) et au cas des surfaces non compactes d'aire finie.

Le problème le plus intéressant est de savoir si on peut s'affranchir de la condition d'extraire une sous-suite de densité 1: quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite des μ_k pour la convergence vague? Ces mesures sont nécessairement invariantes par le flot géodésique, mais il y a une foule de telles mesures singulières: par exemple si γ est une géodésique périodique, $\mu_\gamma(f) = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma f \cdot ds$ est une telle mesure.

Il me semble que ces mesures pour des géodésiques fermées des surfaces de Riemann à courbure -1 ne peuvent pas être des limites vagues d'une suite φ_k. De toutes les façons il y a d'autres mesures portées par des ensembles de dimension de Hausdorff >1 (cf. travaux de Patterson, Sullivan).

Bibliographie

[CV 1] Colin de Verdiere, Y.: Invent. math. **43**, 15–52 (1977)
[CV 2] Colin de Verdiere, Y.: Duke Math. J. **46**, 169–182 (1978)
[S] Schnirelman, A.: Usp. Mat. Nauk **29**, 181–182 (1974)
[T] Taylor, M.: Pseudo-differential operators. Princeton, NJ: Princeton University Press 1981
[Z] Zelditch, S.: Eigenfunctions on compact Riemann-surfaces of $g \geqq 2$. Preprint 1984 (New York)

Communicated by B. Simon

Received May 20, 1985