# Normalbereiche und Dimensionstheorie.

Von

Witold Hurewicz in Amsterdam.

## Einleitung.

Die folgende Arbeit schließt sich an die Menger-Urysohnsche Dimensionstheorie[1]. Der Dimensionsbegriff dieser beiden Autoren, der (wie in der vorliegenden Arbeit nachgewiesen wird) für alle separablen metrischen Räume mit dem „natürlichen" Dimensionsbegriff von Brouwer[2]) im wesentlichen identisch ist, kann heute bereits als klassisch bezeichnet werden. Wir knüpfen insbesondere an die Formulierung dieses Begriffes durch K. Menger, welcher einen Raum höchstens $n$-dimensional nennt, falls zu jedem Punkt des Raumes beliebig kleine Umgebungen mit höchstens $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen existieren, wobei die leere Menge als $(-1)$-dimensional bezeichnet wird.

In Anlehnung an diesen Gedanken legen wir allgemein einen Bereich $\mathfrak{N}$ von Punktmengen zugrunde und bezeichnen mit $\mathfrak{N}^*$ den Bereich aller Punktmengen, auf deren sämtliche Punkte sich Relativumgebungen zusammenziehen, deren Begrenzungen Mengen des Bereiches $\mathfrak{N}$ sind. Wir untersuchen dann die Beziehung zwischen den beiden Bereichen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$. Der Bereich $\mathfrak{N}$, von dem wir ausgehen, wird dabei folgenden Bedingungen unterworfen.

1. Ist $M$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$, so auch jede Teilmenge von $M$.

2. Ist $M$ Summe von abzählbar vielen in $M$ abgeschlossenen Mengen, die alle zum Bereich $\mathfrak{N}$ gehören, dann gehört auch $M$ zum Bereich $\mathfrak{N}$.

---

[1]) Menger, Über die Dimension von Punktmengen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **33** und **34**, Proc. Ac. Amst. **27** und **29** (ältere Arbeiten), sowie den Bericht über die Dimensionstheorie, Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung **35**. — Urysohn, Comptes Rendus **175**, sowie das dem Verfasser bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit noch unbekannte Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, Fund. Math. **7** und **8**.

[2]) Brouwer, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **142**, sowie Proc. Ac. Amst. **26**, **27**.

Einen Bereich von Punktmengen, welcher diesen beiden Bedingungen genügt, bezeichnen wir kurz als *Normalbereich*, und ein Hauptresultat der vorliegenden Arbeit besagt, daß der nach der obigen Vorschrift aus einem Normalbereich $\mathfrak{N}$ abgeleitete Bereich $\mathfrak{N}^*$ ebenfalls ein Normalbereich ist.

Im *ersten* Teil dieser Arbeit untersuchen wir eingehend die nulldimensionalen Mengen, den Bereich $\mathfrak{N}^*$ jener Mengen also, der nach der erwähnten Vorschrift hervorgeht aus dem Bereich $\mathfrak{N}$, welcher bloß die leere Menge enthält.

Die allgemeinen Überlegungen des *zweiten* Teiles gestatten dann, jeden für die nulldimensionalen Mengen bewiesenen Satz mutatis mutandis für beliebige Normalbereiche auszusprechen, insbesondere für die separablen höchstens $n$-dimensionalen Mengen, welche gleichfalls einen Normalbereich bilden. Von den wichtigsten dimensionstheoretischen Resultaten, die wir auf diese Weise erlangen, seien hier die folgenden hervorgehoben: Eine separable Menge, die Summe ist von abzählbar vielen in ihr abgeschlossenen höchstens $n$-dimensionalen Mengen, ist höchstens $n$-dimensional. Eine separable Menge ist $n$-dimensional dann und nur dann, wenn sie Summe ist von $n+1$, aber nicht von weniger nulldimensionalen Mengen. Jeder Punkt einer kompakten Menge, in welchem dieselbe eine Dimension $\geqq n$ hat, liegt in einem Kontinuum von Punkten, in welchen die Menge eine Dimension $\geqq n$ hat. Jede $n$-dimensionale separable Menge enthält eine in ihr abgeschlossene Menge, deren jeder relativ offene Teil $n$-dimensional ist.

## I. Teil.

## Über die nulldimensionalen Mengen.

### § 1.

### Einige Eigenschaften der nulldimensionalen Mengen.

*Die nicht leere Menge $M$ eines metrischen Raumes heißt nulldimensional, wenn auf jeden Punkt von $M$ eine Folge von Teilmengen von $M$ sich zusammenzieht*[3]*), deren Begrenzungen in $M$*[4]*) leer sind.* Desgleichen kann man zur Definition der nulldimensionalen Mengen die Forderung benützen, daß zu jedem Punkt $p$ von $M$ und zu jeder Umgebung $U$ von $p$ eine Zerlegung von $M$ in zwei zueinander fremde und in $M$ abgeschlossene Mengen

[3]) Man sagt, eine Mengenfolge $\{M_n\}$ *zieht sich auf den Punkt* $p$ (auf die Menge $M$) *zusammen*, wenn $p$ $(M)$ in allen $M_n$ enthalten ist und wenn in jeder Umgebung von $p$ $(M)$ fast alle $M_n$ enthalten sind.

[4]) Mit $\overline{M}$ bezeichnet man die *abgeschlossene Hülle* von $M$. Ist $M$ Teilmenge der Menge $A$, dann bezeichnet man als *Begrenzung von $M$ in $A$* die Menge $\overline{M}\cdot(A-M)+\overline{(A-M)}\cdot M$.

*existiert*, so daß eine der beiden Mengen den Punkt $p$ enthält und in $U$ enthalten ist.

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar, *daß jeder Teil einer nulldimensionalen Menge nulldimensional ist.* Wir charakterisieren ferner die nulldimensionalen Mengen durch eine Zerlegungseigenschaft, die wir mehrmals verwenden werden. Dabei beschränken wir uns, wie im folgenden überhaupt, auf *separable* Mengen, d. h. auf Mengen, in denen eine abzählbare Teilmenge dicht liegt.

Satz I. *Damit eine separable Menge $M$ nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ für jede positive Zahl $\varepsilon$ in abzählbar viele paarweise fremde, in $M$ offene Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ zerlegt werden könne.*

Die Bedingung ist notwendig. Sei nämlich $M$ eine nulldimensionale separable Menge und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem Punkt $p$ von $M$ existiert eine $p$ enthaltende Teilmenge $V(p)$ von $M$, deren Begrenzung im $M$ leer und deren Durchmesser $< \varepsilon$ ist. Die Mengen $V(p)$ und $M - V(p)$ sind in $M$ offen. Es gibt nach dem verallgemeinerten Borelschen Theorem unter den Mengen $V(p)$ abzählbar viele, etwa die Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$, deren Summe $M$ ist. Setzen wir dann $U_1 = V_1$ und für $n > 1$ $U_n = V_n \cdot (M - V_1) \cdot (M - V_2) \ldots (M - V_{n-1})$, dann sind die Mengen $U_n$, als Durchschnitte endlich vieler in $M$ offener Mengen, in $M$ offen; sie sind ferner paarweise fremd und ihre Durchmesser sind $< \varepsilon$ und ihre Summe ist $M$.

Die Bedingung ist hinreichend. Angenommen nämlich, $M$ könne für jedes $\varepsilon > 0$ in eine Folge $\{U_n\}$ von in $M$ offenen Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$ gespalten werden; dann sind auch die Mengen $M - U_n$, als Summen von in $M$ offenen Mengen, in $M$ offen. Daher sind die Begrenzungen der $U_n$ in $M$ leer, und es existiert mithin zu jedem Punkt $p$ von $M$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $< \varepsilon$ von $M$, die $p$ enthält und deren Begrenzung in $M$ leer ist. Also ist $M$ nulldimensional.

Per definitionem wird für eine nulldimensionale Menge bloß gefordert, daß sich auf jeden ihrer Punkte eine Folge von Relativumgebungen mit leeren Relativbegrenzungen zusammenziehe, oder, was, wie man leicht einsieht, auf dasselbe hinauskommt, daß sich auf jeden *ihrer* Punkte eine Folge von Umgebungen mit zur Menge fremden Begrenzungen zusammenziehe. Daß dasselbe *für jeden beliebigen Punkt des Raumes* gilt, wollen wir nunmehr beweisen. Wir nennen dabei in üblicher Weise zwei Mengen $M_1$ und $M_2$ *getrennt*, wenn die Beziehung besteht $\overline{M}_1 \cdot M_2 + M_1 \cdot \overline{M}_2 = 0$, und stützen uns, wie auch mehrmals im folgenden, auf den Tietzeschen Satz [4a]:

[4a]) Vgl. Tietze, Math. Annalen 88, S. 310. — Als Menge $U$ des Satzes kann beispielsweise die Menge aller Punkte genommen werden, deren Abstand von $M_1$ kleiner ist als von $M_2$.

Sind die Mengen $M_1$ und $M_2$ getrennt, dann gibt es eine offene Menge $U$ derart, daß $M_1 < U$ und $M_2 \cdot \overline{U} = 0$ ist.

Satz II. *Ist $M$ eine separable nulldimensionale Menge, so zieht sich auf jeden Punkt des Raumes eine Folge von Umgebungen, deren Begrenzungen zu $M$ fremd sind, zusammen, m. a. W. eine separable nulldimensionale Menge bleibt auch nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes nulldimensional.*

Sei $p$ ein beliebiger Punkt des Raumes und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir bezeichnen mit $U(p; \varepsilon)$ die Menge aller Punkte, die von $p$ einen Abstand $< \varepsilon$ haben, und wollen nachweisen: Es existiert eine Umgebung $V < U(p; \varepsilon)$ von $p$, deren Begrenzung zu $M$ fremd ist. Nach Satz I ist $M$ Summe einer Folge $\{U_n\}$ von in $M$ offenen paarweise fremden Mengen mit Durchmessern $< \frac{\varepsilon}{4}$. Sei $\{U_n^*\}$ die Teilfolge von $\{U_n\}$, bestehend aus allen denjenigen $U_n$, die in $U\left(p; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ enthalten sind. Wir setzen $V^* = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*$. Sowohl $V^*$ als auch $M - V^*$ sind (als Summen von in $M$ offenen Mengen) in $M$ offen, diese beiden Mengen liegen daher getrennt. Da $p$ nicht in $\overline{M - V^*}$ liegt und $V^* < U\left(p; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ gilt, sind, wenn wir mit $CU(p; \varepsilon)$ das Komplement von $U(p; \varepsilon)$ bezeichnen, auch die Mengen $(p) + V^*$ und $(M - V^*) + CU(p; \varepsilon)$ getrennt. Dann existiert aber nach dem Tietzeschen Satze eine Umgebung $V$ von $p$, so daß gilt:

$$(*) \qquad V^* < V < U(p; \varepsilon), \qquad \overline{V} \cdot (M - V^*) = 0.$$

Aus $(*)$ folgt $(\overline{V} - V) \cdot M = (\overline{V} - V) \cdot V^* + (\overline{V} - V) \cdot (M - V^*) = 0$, d. h. die Begrenzung von $V$ ist zu $M$ fremd. Damit ist Satz II bewiesen.

Zufolge Satz II existieren für alle *Punkte* des Raumes beliebig kleine Umgebungen, deren Begrenzung zur nulldimensionalen Menge $M$ fremd sind. Wir wollen nun zeigen, daß auch zu den *Mengen* des Raumes beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen zu $M$ fremd sind. Unter einer Umgebung $U(N; \varepsilon)$ der Menge $N$ verstehen wir dabei die Menge aller Punkte, die von $N$ einen Abstand $< \varepsilon$ haben; als Umgebung von $N$ schlechthin bezeichnen wir jede $N$ enthaltende offene Menge.

Satz III. *Ist $M$ eine separable nulldimensionale Menge, so gibt es zu jeder Menge $N$ und zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von $N$ $U(N) < U(N, \varepsilon)$, deren Begrenzung zu $M$ fremd ist. Ist die Menge $N$ in $N + M$ abgeschlossen, dann gibt es zu jeder Umgebung $U$ von $N$ eine Umgebung $V < U$ von $N$, deren Begrenzung zu $M$ fremd ist.*

Zum Beweis der ersten Hälfte von Satz III hat man bloß im Beweis von Satz II den Punkt $p$ durch die Menge $N$ zu ersetzen.

Zum Beweis der zweiten Hälfte bezeichnen wir für jede natürliche Zahl $k$ mit $N_k$ die Menge aller Punkte von $N$, deren Abstand vom Komplement $CU$ der Menge $U > \frac{1}{k}$ ist. Es ist dann $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$. Zu jeder Menge $N_k$ existiert nach dem bereits bewiesenen Teil von Satz III eine Umgebung $V_k$ mit zu $M$ fremder Begrenzung, so daß $N_k < V_k < U\left(N; \frac{1}{k}\right)$ gilt. Setzen wir $V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$, dann ist $V$ eine Umgebung von $N$ und es gilt $V < U$. Die Begrenzung von $V$ ist zu $M$ fremd. Denn angenommen, $p$ wäre ein Punkt von $M$ auf der Begrenzung von $V$. Da $N$ in $N + M$ abgeschlossen ist und $p$ außerhalb $N$ liegt, gibt es eine natürliche Zahl $m$ derart, daß der Abstand zwischen $p$ und $N > \frac{1}{m}$ ist. Setzen wir $V_m^* = \sum_{i=m}^{\infty} V_i$; dann gehört wegen $V_m^* < U\left(N; \frac{1}{m}\right)$ der Punkt $p$ nicht zu $\overline{V}_m^*$. Mit Rücksicht auf $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_{m-1} + V_m^*$ müßte daher $p$ auf der Begrenzung einer der Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$ liegen, was der Voraussetzung widerspricht, daß die Begrenzungen dieser Mengen zu $M$ fremd sind. Damit ist auch der zweite Teil von Satz III bewiesen.

Wir können nunmehr die nulldimensionalen Mengen durch das Verhalten der relativ abgeschlossenen Mengen charakterisieren.

Satz IV. *Damit die separable Menge $M$ nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei zueinander fremden, in $M$ abgeschlossenen Mengen $N_1$ und $N_2$ zwei ebensolche Mengen gebe, so daß*

$$N_1 < M_1, \quad N_2 < M_2, \quad M_1 + M_2 = M$$

*gilt.*

Die Bedingung ist notwendig. Seien nämlich $N_1$ und $N_2$ zwei zueinander fremde, in der nulldimensionalen Menge $M$ abgeschlossene Mengen. Das Komplement $C(\overline{N}_2)$ von $\overline{N}_2$ ist eine Umgebung von $N_1$. Nach Satz III existiert also eine Umgebung $U < C(\overline{N}_2)$ von $N_1$ mit zu $M$ fremder Begrenzung. Die Mengen $M_1 = U \cdot M$ und $M_2 = M - M_1$ sind zueinander fremd, in $M$ abgeschlossen und es gilt $N_1 < M_1$, $N_2 < M_2$.

Die Bedingung ist hinreichend. Angenommen nämlich, sie sei erfüllt und es sei $p$ ein beliebiger Punkt von $M$, $U$ eine Umgebung von $p$. Die Mengen $(p)$ und $M - U$ sind zueinander fremd und in $M$ abgeschlossen. Es existiert also eine Zerspaltung von $M$ in zwei in $M$ abgeschlossene Mengen $M_1$ und $M_2$, so daß $(p) < M_1 < U$ ist. Folglich ist $M$ nulldimensional.

Wir bringen nun eine metrische Charakterisierung durch Zerlegungseigenschaften für die beiden mit Rücksicht auf Euklidische Räume wichtigsten Klassen separabler nulldimensionaler Mengen, nämlich für die *kompakten* Mengen (d. s. jene, von denen jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt im Raum besitzt) und für die Mengen, welche Summe von abzählbar vielen kompakten Mengen sind, die wir im Anschluß an K. Menger[5]) als *halbkompakt* bezeichnen[5a]). In Anlehnung an Menger[6]) bezeichnen wir zu diesem Zweck als *Nullfolge* von Mengen eine endliche oder abzählbare Folge von Mengen, deren Durchmesser, falls die Folge unendlich ist, gegen Null konvergieren. Es gilt dann

Satz V. *Damit die kompakte (bzw. halbkompakte) Menge $M$ nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ für jede Zahl $\varepsilon > 0$ Summe sei von endlich vielen (bzw. von einer Nullfolge von) zueinander fremden, in $M$ abgeschlossenen Mengen, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind.*

Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit der Bedingung[7]). Ist $M$ eine kompakte nulldimensionale Menge und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert zu jedem Punkt von $\overline{M}$ eine Umgebung mit Durchmesser $< \varepsilon$ und mit zu $M$ fremder Begrenzung. Nach dem Borelschen Theorem ist $M$ schon in der Summe von endlich vielen unter diesen Umgebungen, etwa von $U_1, U_2, \ldots, U_n$, enthalten. Setzen wir $A_1 = U_1 \cdot M$ und $A_m = [U_m - (U_1 + U_2 + \ldots + U_{m-1})] \cdot M$ $(m = 2, 3 \ldots)$, dann sind die Mengen $A_m$, wie man leicht sieht, in $M$ abgeschlossen und zueinander fremd, und es gilt $M = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Sei nun $M$ eine halbkompakte nulldimensionale Menge, also $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, wo die $M_n$ kompakte nulldimensionale Mengen sind, und sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Die Menge $M_n$ ist nach dem eben Bewiesenen enthalten in der Summe von endlich vielen Umgebungen, deren Begrenzungen zu $M$ fremd und deren Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{n}$ sind. Die für alle Mengen $M_n$ auf diese Weise definierten Umgebungen kann man in eine Folge $\{U_i\}$ von Umgebungen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern anordnen. Setzen wir dann $A_m = [U_m - (U_1 + U_2 + \ldots + U_{m-1})] \cdot M$, so genügen die Mengen $A_m$ offenbar den Forderungen von Satz V.

---

[5]) Vgl. Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys. **34** (1924), S. 148.

[5a]) (Zusatz bei der Korrektur): Für die Gültigkeit der folgenden Charakterisierungen ist natürlich nur erforderlich, daß die Menge in irgendeinem sie umfassenden metrischen Raum kompakt bzw. halbkompakt sei. Für das letztere ist nach Hausdorff (Mengenlehre, 1914, S. 311) notwendig und hinreichend, daß die Menge *total beschränkt* (d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Mengen mit Durchmessern $< \varepsilon$) bzw. Summe von abzählbar vielen total beschränkten Mengen sei.

[6]) Vgl. Menger, Wiener Ber. **133** (1924), S. 421.

[7]) Dieser Beweis entsteht durch Kombination des Satzes II mit einem von Menger oft verwendeten Verfahren. — (Zusatz bei der Korrektur): Der Beweis von Satz V läßt sich sehr einfach auch ohne Benützung von Satz II auf Grund der totalen Beschränktheit von $M$ erbringen.

Den Beweis dafür, daß die Bedingungen von Satz V auch hinreichend seien, stützen wir auf den folgenden

Satz VI. *Ist* $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, *wo die Mengen* $A_n$ *eine Nullfolge von paarweise fremden, in* $M$ *abgeschlossenen Mengen darstellen, dann gibt es zu jeder der Mengen* $A_n$ *und zu jeder Umgebung* $U$ *von* $A_n$ *eine Umgebung* $V < U$ *von* $A_n$, *deren Begrenzung zu* $M$ *fremd ist.*

Wir beweisen die Behauptung etwa für die Menge $A_1$ und für die vorgelegte Umgebung $U_0$ von $A_1$. Es sei $\{A_n^*\}$ die Teilfolge der Folge $\{A_n\}$, welche aus allen Mengen $A_n$ besteht, die mit der Begrenzung $B(U_0)$ von $U_0$ mindestens einen Punkt gemein haben. Wir zeigen zunächst, daß die Menge $P_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^*$ in $M$ abgeschlossen ist. Sei zu diesem Zweck $p$ ein zu $M$ gehöriger Häufungspunkt von $P_0$. Gehört $p$ zu $B(U_0)$, dann gehört $p$ per definitionem auch zu $P_0$. Liegt aber $p$ nicht in $B(U_0)$, dann ist der Abstand zwischen $p$ und $B(U_0)$ positiv, etwa $= r > 0$. Sei dann die natürliche Zahl $m$ so gewählt, daß die Durchmesser aller Mengen $A_n^*$, für $n \geqq m$, kleiner als $r$ sind. Die Menge $\sum_{k=0}^{\infty} A_{m+k}^*$ besitzt den Punkt $p$ nicht als Häufungspunkt; also ist $p$ Häufungspunkt der in $M$ abgeschlossenen Menge $\sum_{n=1}^{m-1} A_n^*$ und gehört folglich zu $P_0$. Die Menge $P_0$ ist also abgeschlossen.

Die Mengen $A_1$ und $P_0 + A_2$ sind in $M$ abgeschlossen und zueinander fremd; sie liegen daher getrennt. Es gibt daher eine offene Menge $U_1$ mit folgenden Eigenschaften: $P_0 + A_2 < U_1$, $\overline{U}_1 \cdot A_1 = 0$. Sei nun $P_1$ die Summe aller Mengen der Folge $\{A_n\}$, welche zur Begrenzung $B(U_1)$ von $U_1$ nicht fremd sind. $P_1$ ist wiederum in $M$ abgeschlossen und zu $P_0 + A_2$ fremd. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $A_3$ ist Teilmenge von $P_1$. Dann sind die Mengen $P_1 + A_3 = P_1$ und $P_0 + A_2$ getrennt.

b) $A_3$ ist nicht Teilmenge von $P_1$. Dann ist $P_1 \cdot A_3 = 0$ und die Mengen $P_1$ und $P_0 + A_2 + A_3$ sind getrennt.

In beiden Fällen gibt es eine offene Menge $U_2$ mit der Begrenzung $B(U_2)$, so daß folgende Redingungen erfüllt sind:

$$P_1 < U_2, \quad \overline{U}_2 \cdot P_0 = 0, \quad \overline{U}_2 \cdot A_2 = 0, \quad B(U_2) \cdot A_3 = 0.$$

Angenommen, es seien bereits die Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ gemäß folgenden Bedingungen definiert:

1. $P_{n-1} < U_n$,
2. $\overline{U}_n \cdot P_{n-2} = 0$,
3. $\overline{U}_n \cdot A_n = 0$,
4. $B(U_n) \cdot A_{n+1} = 0$,

wobei $B(U_n)$ die Begrenzung von $U_n$, $P_n$ die Summe aller Mengen $A_n$, die zu $B(U_n)$ nicht fremd sind, bezeichnet. $P_n$ ist in $M$ abgeschlossen. Aus 1. und 4. ergibt sich, daß $(P_{n-1}+A_{n+1})\cdot B(U_n)=0$, und daß folglich die Mengen $P_n$ und $P_{n-1}+A_{n+1}$ zueinander fremd sind. Daher sind entweder die Mengen $P_n+A_{n+2}$ und $P_{n-1}+A_{n+1}$ oder die Mengen $P_n$ und $P_{n-1}+A_{n+1}+A_{n+2}$ getrennt. In beiden Fällen existiert eine offene Menge $U_{n+1}$, so daß

$$P_n < U_{n+1}, \quad \overline{U}_{n+1}\cdot P_{n-1}=0, \quad \overline{U}_{n+1}\cdot A_{n+1}=0, \quad B(U_{n+1})\cdot A_{n+2}=0.$$

Das Verfahren läßt sich also ad infinitum fortsetzen. Aus 3. folgt sodann mit Rücksicht auf $M=\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$:

$$(*) \qquad M\cdot\prod_{n=1}^{\infty} U_n = 0.$$

Aus 1. und 2. ergibt sich, wenn man in 2. $n$ durch $n+1$ ersetzt,

$$(**) \qquad M\cdot B(U_{n-1}) < P_{n-1} < U_n - \overline{U}_{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Setzen wir nun:

$$V = U_0-\overline{U}_1+U_0\cdot U_1\cdot(U_2-\overline{U}_3)+\ldots+U_0\cdot U_1\ldots U_{2n-1}(U_{2n}-\overline{U}_{2n+1})+\ldots.$$

Die Menge $V$ ist offen und es gilt wegen 3. $A_1 < V < U_0$. Wir wollen zeigen, daß die Begrenzung $B(V)$ von $V$ zu $M$ fremd ist. Man sieht zunächst leicht, daß folgende Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \qquad U_0\cdot U_1\ldots U_{2n}\cdot(U_{2n}-\overline{U}_{2n+1}) < V \\ &(\mathrm{b}) \qquad U_0\cdot U_1\ldots U_{2n+1}(U_{2n+1}-\overline{U}_{2n+2})\cdot V = 0 \end{aligned} \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

(Da die Menge $U_0\cdot U_1\ldots U_{2n+1}-\overline{U}_{2n+2}$) offen, folgt aus (b)

$$(\mathrm{b}') \qquad U_0\cdot U_1\ldots U_{2n+1}\cdot(U_{2n+1}-\overline{U}_{2n+2})\cdot\overline{V}=0.$$

Aus (a) und (b') ergibt sich:

$$(\mathrm{c}) \qquad U_0\cdot U_1\ldots U_n\cdot B(V)\cdot(U_n-\overline{U}_{n+1})=0 \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Nach (**) und (c) ist

$$(\mathrm{d}) \quad M\cdot B(V)\cdot\prod_{m=0}^{n-1} U_m\cdot B(U_n) < M\cdot B(V)\cdot\prod_{m=0}^{n} U_m\cdot(U_{n+1}-\overline{U}_{n+2})=0.$$

Aus (c) und (d) folgt:

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}) \quad M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n &= M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n\cdot\overline{U}_{n+1} \\ &= M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n\cdot U_{n+1} + M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n\cdot B(U_{n+1}) \\ &= M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n\cdot U_{n+1}. \end{aligned}$$

Mehrfache Anwendung von (e) ergibt:

$$\begin{aligned} M\cdot B(V) &= M\cdot B(V)\cdot U_0 = M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1 = \ldots \\ &= M\cdot B(V)\cdot U_0\cdot U_1\ldots U_n = \ldots \end{aligned}$$

und daraus folgt nach (*):

$$M \cdot B(V) = 0,$$

womit Satz VI bewiesen ist[7a]).

Aus ihm folgt unmittelbar, daß die Bedingung von Satz V hinreichend ist. Sei nämlich $M$ für jedes $\varepsilon > 0$ Summe einer Nullfolge von paarweise fremden, in $M$ abgeschlossenen Mengen $< \varepsilon$. Ist dann ein Punkt $p$ von $M$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann können wir $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ setzen, wobei $p$ im $A_1$ liegt, $A_1 < U(p;\varepsilon)$ gilt und die Mengen $A_n$ den Voraussetzungen von Satz VI genügen. Es existiert dann, dem Satz VI zufolge, eine Umgebung $V$ von $p$, mit zu $M$ fremder Begrenzung, so daß $A_1 < V < U(p;\varepsilon)$ gilt. Also ist $M$ nulldimensional. Damit ist Satz V in allen Stücken bewiesen.

Es seien noch zwei Nebenergebnisse erwähnt, welche durch den Beweis von Satz V mitbewiesen sind: a) *Eine zusammenhängende Menge $M$ kann nicht in eine Folge von paarweise fremden in $M$ abgeschlossenen Mengen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern gespalten werden*[8]). Dies ist eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 2.

b) *Bilden die Komponenten oder die Quasikomponenten*[9]) *einer Menge $M$ eine Nullfolge, dann stimmen die Komponenten und die Quasikomponenten von $M$ überein.* Nehmen wir erstens an, die Komponenten $\{A_n\}$ der Menge $M$ bilden eine Nullfolge. Seien $p$ und $q$ zwei Punkte von $M$, die zu verschiedenen Komponenten, etwa zu $A_1$ und $A_m$ gehören. Da die $A_n$ in $M$ abgeschlossen sind, können wir auf die Folge $\{A_n\}$ den Satz VI anwenden. Es existiert also eine offene Menge $V$ mit zu $M$ fremder Begrenzung, so daß $A_1 < V$ gilt und $q$ nicht in $V$ liegt. Dann liefert die Formel $M = M \cdot V + (M - M \cdot V)$ eine Zerlegung von $M$ in zwei in $M$ abgeschlossene Mengen, von denen die eine den Punkt $p$, die andere den Punkt $q$ enthält. $p$ und $q$ gehören also zu verschiedenen Quasikomponenten. Folglich stimmen die Komponenten und die Quasikomponenten von $M$ überein.

Nehmen wir zweitens an, die Quasikomponenten von $M$ bilden eine Nullfolge $\{B_n\}$. Die $B_n$ sind in $M$ abgeschlossen. Wären die Kompo-

---

[7a]) (Zusatz bei der Korrektur): Satz VI läßt sich einfacher beweisen, wenn man folgende leicht beweisbare Tatsache benützt: Sind $M_1$ und $M_2$ in $M$ abgeschlossene Mengen und gibt es unter den Mengen $A_i$ keine, die sowohl mit $M_1$ als auch mit $M_2$ Punkte gemein haben, dann existieren zwei offene Mengen $U_1 > M_1$ und $U_2 > M_2$, so daß keine Menge $A_i$ gleichzeitig mit $\overline{U}_1$ und $\overline{U}_2$ Punkte gemein hat.

[8]) Nach Sierpiński (Tôhoku Math. J. **13**, S. 300) kann man gewisse nichtbeschränkte Kontinua in abzählbar unendlich viele paarweise fremde Teilkontinua zerlegen.

[9]) Vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre 1914, S. 248.

nenten mit den Quasikomponenten von $M$ nicht identisch, so ließe sich mindestens eine der Mengen $B_n$, etwa $B_1$ in zwei in $B_1$ und mithin in $M$ abgeschlossene, zueinander fremde Mengen $B_1'$ und $B_1''$ zerlegen. Auf die Folge $B_1', B_1'', B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$ kann man Satz VI anwenden und daraus wie oben folgern, daß je zwei Punkte $p$ und $q$, von denen der eine in $B_1'$, der andere in $B_1''$ liegt, in verschiedenen Quasikomponenten von $M$ liegen, im Widerspruch zur Annahme, $B_1 = B_1' + B_1''$ sei eine Quasikomponente von $M$.

## § 2.

## Über die Summen nulldimensionaler Mengen.

Bekanntlich ist die Summe zweier nulldimensionaler Mengen (wie schon aus der Zerlegbarkeit der Strecke in die nulldimensionale Menge aller rationalen und die nulldimensionale Menge aller irrationalen Punkte hervorgeht) nicht notwendig nulldimensional. Menger[10]) und Urysohn[11]) haben aber bewiesen, *daß die Summe abzählbar vieler nulldimensionaler kompakter abgeschlossener Mengen und mithin die Summe abzählbar vieler nulldimensionaler halbkompakter $F_\sigma$*[12]) *stets nulldimensional ist.* Wir gehen nunmehr daran, einen wesentlich allgemeineren Satz zu beweisen:

Satz VII. *In einem separablen Raum ist die Summe abzählbar vieler abgeschlossener nulldimensionaler Mengen nulldimensional.*

Sei $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, wo die Mengen $M_n$ abgeschlossen und nulldimensional sind. Sei ein Punkt $p$ von $M$ und eine Umgebung $U$ von $p$ beliebig vorgegeben. Wir haben zu zeigen: Es gibt eine Umgebung $V$ von $p < U$, deren Begrenzung zu $M$ fremd ist.

Da $M_1$ nulldimensional ist, existiert eine Umgebung $V_1 < U$ von $p$ mit zu $M_1$ fremder Begrenzung. Die Mengen $\overline{V}_1$ und $M_1 - V_1$ sind zueinander fremd und abgeschlossen; es existiert daher eine offene Menge $U_1$, so daß $M_1 - V_1 < U_1$, $\overline{U}_1 \cdot \overline{V}_1 = 0$ gilt. Die offene Menge $U - \overline{U}_1$ enthält $\overline{V}_1$. Nach Satz III gibt es daher eine offene Menge $V_2$ mit zu $M_2$ fremder Begrenzung, so daß $V_1 < V_2 < U$, $\overline{U}_1 \cdot V_2 = 0$ gilt. Da die Mengen $\overline{V}_2$ und $M_2 - V_2$ zueinander fremd und abgeschlossen sind, läßt sich eine offene Menge $U_2$ angeben mit den Eigenschaften: $M_2 - V_2 < U_2$, $\overline{U}_2 \cdot \overline{V}_2 = 0$. Die Menge $U - (\overline{U}_1 + \overline{U}_2)$ ist eine Umgebung der abgeschlossenen Menge $\overline{V}_2$. Nach Satz III existiert daher eine offene

[10]) Monatshefte f. Math. u. Phys. 34, S. 147.

[11]) Fund. Math. 8, S. 337.

[12]) Als $F_\sigma$ bezeichnet man die Summe abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, als $G_\delta$ das Produkt abzählbar vieler offener Mengen.

Menge $V_3$ mit zu $M_3$ fremder Begrenzung, derart, daß $V_2 < V_3 < U$ und $(\overline{U}_1 + \overline{U}_2)\cdot\overline{V}_3 = 0$ gilt. Wie oben definieren wir nun eine offene Menge $U_3$ gemäß den Bedingungen: $M_3 - V_3 < U_3$; $\overline{U}_3\cdot\overline{V}_3 = 0$.

Indem man dieses Verfahren ad infinitum fortsetzt, definiert man zwei Folgen $\{V_n\}$ und $\{U_n\}$ von offenen Mengen, so daß folgende Beziehungen bestehen:

1. $V_1 < V_2 < V < \ldots < V_n < \ldots < U$,
2. $M_n - V_n < U_n$,
3. $(\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \ldots + \overline{U}_n)\cdot\overline{V}_n = 0$.

Setzen wir $V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$; dann ist $V$ eine Umgebung von $p$ uud es gilt wegen 1. $V < U$. Wir haben noch zu zeigen, daß die Begrenzung von $V$ zu $M$ fremd ist. Aus 2. folgt zunächst mit Rücksicht auf $M - V < \sum(M_n - V_n)$

4. $M - V < \sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

Aus 1. und 3. ergibt sich $V\cdot\sum_{n=1}^{\infty} U_n = 0$, und daraus, da $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ eine offene Menge ist:

5. $\overline{V}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} U_n = 0$.

4. und 5. zusammen ergeben:

$$\overline{V}\cdot(M - V) = 0;$$

also ist die Begrenzung von $V$ zu $M$ fremd, womit Satz VII bewiesen ist.

Man kann Satz VII auch in folgender Form aussprechen.

Satz VIIa. *Ist die separable Menge $M$ Summe von abzählbar vielen in $M$ abgeschlossenen nulldimensionalen Mengen, dann ist $M$ nulldimensional.*

Betrachten wir ein Beispiel in der Cartesischen Zahlenebene. Es sei $r$ eine rationale Zahl; mit $M_r$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte der Ebene, welche die Ordinate $r$ und eine irrationale Abszisse haben, mit $N_r$ die Menge aller Punkte der Ebene, welche die Abszisse $r$ und eine irrationale Ordinate haben. Setzen wir $P = \sum_r M_r + \sum_r N_r$, wo die Summationen über alle rationalen Zahlen zu erstrecken sind, dann ist $P$ die Menge aller Punkte der Ebene, welche eine rationale und eine irrationale Koordinate besitzen. Da die Mengen $M_r$ und $N_r$ nulldimensionale und, wie man sofort sieht, in $P$ abgeschlossene Mengen sind, ist $P$ nach Satz VIIa nulldimensional, was man auch direkt bestätigen kann; da nämlich auf den Geraden $y = x + r$ und $y = -x + r$, wenn $r$ eine rationale Zahl bedeutet, kein Punkt der Menge $P$ liegen kann, sieht man unmittelbar, daß sich auf jeden Punkt von $P$ Parallelogramme mit zu $P$ fremden Begrenzungen zusammenziehen.

Wir ziehen noch eine einfache Folgerung aus Satz VII.

Satz VIIb. *Ist die separable Menge $M$ Summe von zwei nulldimensionalen Mengen $M_1$ und $M_2$, von denen eine zugleich ein $F_\sigma$ und ein $G_\delta$ in $M$ (z. B. abgeschlossen in $M$) ist, dann ist $M$ nulldimensional; m. a. W.: In einem separablen Raum ist die Summe einer nulldimensionalen Menge, die zugleich $F_\sigma$ und $G_\delta$ ist, und einer beliebigen nulldimensionalen Menge nulldimensional.*

In der Tat, sowohl $M_1$ als auch $M_2$ ist unter der angegebenen Voraussetzung Summe von abzählbar vielen in $M$ abgeschlossenen nulldimensionalen Mengen, also ist $M$ nach Satz VIIb nulldimensional.

## § 3.

## Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkte.

Zieht sich auf den Punkt $p$ des Raumes eine Folge von Umgebungen zusammen, deren Begrenzungen zu $M$ fremd sind, dann heißt nach Menger und Urysohn die Menge *$M$ im Punkte $p$ nulldimensional.* Mit Rücksicht auf eine Verallgemeinerung dieser Begriffsbildung im § 4 dieser Arbeit sagen wir, wenn die Menge $M$ im Punkte $p$ nulldimensional ist, daß *$M$ in $p$ unstetig* oder auch, daß *$p$ Unstetigkeitspunkt* der Menge $M$ sei. Die anderen Punkte des Raumes nennen wir *Stetigkeitspunkte* von $M$ und sagen auch, die Menge $M$ sei *in ihnen stetig.* Jeder Stetigkeitspunkt einer Menge $M$ ist offenbar Häufungspunkt von $M$. Nulldimensional sind jene Mengen, die in allen ihren Punkten (und folglich nach Satz II in allen Punkten des Raumes) unstetig sind. — Die folgenden Betrachtungen beruhen auf

Satz VIII. *Ist $M$ in der separablen Menge $A$ abgeschlossen und die Menge $A - M$ nulldimensional, dann ist jeder Unstetigkeitspunkt von $M$ Unstetigkeitspunkt von $A$.*

Sei nämlich $p$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$, $U$ eine Umgebung von $p$. Wir haben eine Umgebung $U < U$ von $p$ mit zu $A$ fremder Begrenzung anzugeben. Wegen der Unstetigkeit von $M$ in $p$ existiert zunächst eine Umgebung $U'$, so daß $U' < U$ gilt und die Begrenzung $B(U')$ zu $M$ fremd ist. Die Menge $M \cdot U'$ ist abgeschlossen in $A$. Da $A - M$ nulldimensional ist, existiert eine offene Menge $V$, so daß

$$(*) \qquad M \cdot U' < V < U',$$

$$(**) \qquad (A - M) \cdot B(V) = 0,$$

wenn $B(V)$ die Begrenzung von $V$ bezeichnet. Wegen (**) und (***) ist auch $M \cdot B(V) = 0$, also $A \cdot B(V) = 0$. Die Menge $V$ ist eine in $U$ enthaltene Umgebung von $p$, deren Begrenzung zu $A$ fremd ist. Damit ist Satz VIII bewiesen.

Wir bezeichnen nun die *Menge aller Stetigkeitspunkte* von $M$ mit $M_\lambda$, die *Menge aller Unstetigkeitspunkte* von $M$ mit $M_\mu$, und untersuchen nun, indem $M$ ein für allemal als separabel vorausgesetzt wird, diese beiden Mengen näher. Nach einem Satz von Menger und von Urysohn ist *$M_\mu$ ein $G_\delta$, $M_\lambda$ ein $F_\sigma$*; [13]) ferner ist klar, daß *die Menge $M \cdot M_\mu$ nulldimensional* ist, denn jeder ihrer Punkte ist ja Unstetigkeitspunkt sogar von $M$.

Bezeichnen wir mit $M_\lambda^*$ die abgeschlossene Hülle von $M_\lambda \cdot M$ in $M$, so folgt aus $M = M \cdot M_\mu + M_\lambda^*$ auf Grund von Satz VIII:

Satz IX. *Jeder Punkt von $M_\lambda$ ist ein Stetigkeitspunkt der Menge $M_\lambda^*$.*

Aus diesem Satz ergeben sich zahlreiche Folgerungen. Zunächst ist jeder Punkt von $M_\lambda$ als Stetigkeitspunkt von $M_\lambda^*$ auch Häufungspunkt von dieser Menge und mithin von $M \cdot M_\lambda$. Es gilt also:

Satz X. *Die Menge $M \cdot M_\lambda$ ist entweder leer oder insichdicht und dicht in $M_\lambda$.*

Nennen wir ferner eine Menge *nirgends nulldimensional*, wenn sie keine in ihr offene nulldimensionale Menge enthält[14]); dann gilt:

Satz XI. *Die Mengen $\overline{M}_\lambda$ und $M_\lambda^*$ sind entweder leer oder nirgends nulldimensional.*

Mit Rücksicht auf Satz X genügt es zu beweisen, daß $M_\lambda^*$ nirgends nulldimensional ist (denn $M_\lambda^*$ ist dicht in $\overline{M}_\lambda$). Sei etwa $U$ eine offene Menge derart, daß $U \cdot M_\lambda^* \neq 0$ ist. In $U$ liegt ein Punkt $p$ von $M_\lambda$. Nach Satz IX ist $p$ ein Stetigkeitspunkt von $M_\lambda^*$ und somit von $U \cdot M_\lambda^*$. Also ist $U \cdot M_\lambda^*$ nicht nulldimensional und daher ist $M \cdot M_\lambda^*$ nirgends nulldimensional.

Satz XII. *Jede separable Menge $M$ kann auf eine einzige Weise in zwei Mengen $M_1$ und $M_2$ zerlegt werden, so daß $M_1$ nulldimensional und $M_2$ entweder leer oder in $M$ abgeschlossen und nirgends nulldimensional ist.*

Angenommen, es gäbe zwei solche Zerlegungen $M = M_1 + M_2$ und $M = M_1' + M_2'$. Da $M_2$ in $M$ abgeschlossen ist, existiert eine Umgebung $U$, so daß $U \cdot M < M_1$. Die Menge $U \cdot M$ und daher auch $U \cdot M_2'$ ist nulldimensional. Also gehört $p$ nicht zu $M_2'$, da diese Menge nirgends null-

[13]) Menger (Monatshefte **34**, S. 141) beweist dies folgendermaßen: Für jede natürliche Zahl $n$ ist die Menge $M_n$ aller Punkte, die eine Umgebung mit zu $M$ fremder Begrenzung und einem Durchmesser $< \frac{1}{n}$ besitzen, offen und es gilt $M_\mu = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$: also ist $M_\mu$ ein $G_\delta$.

[14]) Die oben als nirgends nulldimensional bezeichneten Mengen sind jene, die im Sinne von Brouwer (Journ. für d. reine u. angew. Math. **142**) „in keinem Punkte nulldimensional“ sind.

dimensional ist. Folglich gilt $M_1 < M_1'$; aus denselben Gründen gilt auch $M_1' < M_1$. Also ist $M_1 = M_1'$ und $M_2 = M_2'$. Es kann somit nicht mehr als eine Zerlegung geben, die den Forderungen von Satz XII genügt. Eine aber wird geliefert durch die Formel $M = (M - M_\lambda^*) + M_\lambda^*$.

Nennen wir eine Menge $M$ *stetig*, wenn jeder Punkt von $M$ ein Stetigkeitspunkt von $M$ ist[15]). Die Summe endlich oder abzählbar unendlich vieler stetiger Mengen ist, wie man sofort sieht, stetig. Wir bezeichnen mit $M_\nu$ die *Summe aller stetigen Teilmengen von* $M$. Die Menge $M_\nu$ ist also die größte stetige Teilmenge von $M$. Wir zeigen

Satz XIII. *Die Menge* $M_\nu$ *ist ein* $F_\sigma$ *in* $M$.

Es gilt nämlich $M_\nu = M \cdot (M_\nu)_\lambda$. Denn erstens ist jeder Punkt von $M_\nu$ ein Stetigkeitspunkt von $M_\nu$ und gehört mithin zu $M \cdot (M_\nu)_\lambda$. Zweitens liegt jeder Punkt von $M \cdot (M_\nu)_\lambda$ in $M_\nu$. Denn sonst gäbe es in $M - M_\nu$ einen Stetigkeitspunkt $p$ von $M_\nu$. Dann wäre aber, wie man leicht sieht, die Menge $M_\nu + (p)$ stetig, was unmöglich ist, da $M_\nu$ die größte stetige Teilmenge von $M$ ist. Die Menge $(M_\nu)_\lambda$ aber ist ein $F_\sigma$ und damit ist Satz XIII bewiesen.

Menger ist für den Fall kompakter Mengen auf Aussagen über das Hausdorffsche Residuum und die Bairesche Kategorie der Menge $M_\lambda$ geführt worden unter der Voraussetzung, *daß die Menge* $M \cdot M_\lambda$ *nulldimensional sei in allen Punkten einer in* $M_\lambda$ *dichten Teilmenge*[16]). Wir wollen ähnliche Aussagen für beliebige separable Mengen herleiten, und zwar unter der Voraussetzung, *daß* $M$ *keinen stetigen Teil enthält*, also für Mengen mit $M_\nu = 0$. Dabei nennen wir eine Menge $M$ *total irreduzibel*, wenn $\overline{M} - M$ in $\overline{M}$ dicht liegt[17]) und *total irreduzibel in* $N$ $(N > M)$, wenn $N \cdot (\overline{M} - M)$ in $N \cdot \overline{M}$ dicht ist. Wir sagen ferner, eine Menge $M$ sei *von erster Kategorie*, wenn $M$ Summe ist von abzählbar vielen in $M$ nirgends dichten Teilmengen (üblicherweise sagt man dann, $M$ sei von erster Kategorie *in bezug auf sich selbst*). Dann gilt:

Satz XIV. *Ist* $M_\nu = 0$, *dann ist* 1. $M_\lambda$ *total irreduzibel und* $M \cdot M_\lambda$

---

[15]) S. Mazurkiewicz nennt (Fund. Math. 2, S. 201) diese Mengen *quasizusammenhängend*.

[16]) Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Wiener Ber. **133**, S. 442.

[17]) Hausdorff bezeichnet (Mengenlehre 1914, S. 281) als *Residuum* der Menge $M$ die Menge $M \cdot \overline{\overline{M} - M}$ und nennt *reduzibel* jene Mengen, welche durch iterierte Residuenbildung leer gemacht werden können. Die von Menger vorgeschlagene Bezeichnung *total irreduzibel* für jene Mengen, deren Komplement zur abgeschlossenen Hülle in dieser letzteren dicht liegt, findet ihre Rechtfertigung darin, daß diese Mengen mit ihrem Hausdorffschen Residuum identisch sind, also durch Residuenbildung überhaupt nicht reduziert werden.

*total irreduzibel in $M$, 2. $M \cdot M_\mu$ dicht in $M$, 3. $M_\lambda$ und $M \cdot M_\lambda$ von erster Kategorie.*

Wäre nämlich 1. $M_\lambda$ nicht total irreduzibel, dann gäbe es einen Punkt $p$ von $M_\lambda$, der nicht Häufungspunkt von $\overline{M}_\lambda - M_\lambda$ wäre. Es existierte also eine Umgebung $U$ von $p$, so daß $U \cdot \overline{M}_\lambda < M_\lambda$. Nach Satz X wäre die Menge $U \cdot M \cdot M_\lambda$ nicht leer. Nach Satz IX wäre jeder Punkt von $U \cdot M \cdot M_\lambda$ Stetigkeitspunkt von $M \cdot \overline{M}_\lambda = M_\lambda^*$ und mithin von $U \cdot M \cdot \overline{M}_\lambda = U \cdot M \cdot M_\lambda$. Also wäre $U \cdot M \cdot M_\lambda$ eine stetige Teilmenge von $M$, was der Voraussetzung $M_\nu = 0$ widerspricht. Ganz analog zeigt man, daß $M \cdot M_\lambda$ total irreduzibel in $M$ ist. Aus dem Bewiesenen folgt unmittelbar, daß 2. $M \cdot M_\mu$ dicht in $M$ ist. Auf Grund der Tatsache, daß jedes total irreduzible $F_\sigma$ von erster Kategorie im Sinne von Baire ist[18]), folgt aus Satz XIV 1., daß der $F_\sigma$ $M_\lambda$ und der $F_\sigma$ in $M$ $M \cdot M_\lambda$ von erster Kategorie ist.

Die Voraussetzung $M_\nu = 0$ ist (ebenso wie die Mengersche Voraussetzung) insbesondere erfüllt, wenn die Menge $M \cdot M_\lambda$ nulldimensional ist. Dieser Fall kann sich wirklich ereignen. Sierpiński hat eine Menge $M$ konstruiert[19]), für welche $M \cdot M_\lambda$ sogar bloß abzählbar ist. Wenn die Menge $M_\lambda$ von zweiter Kategorie im Sinne von Baire oder mit ihrem Hausdorffschen Residuum nicht identisch ist, dann ist sie Satz XIV zufolge sicher nicht nulldimensional. Auf der Suche nach anderen hinreichenden Bedingungen dafür ist Menger auf seinen neuen Typus von Überdeckungssätzen geführt worden; wir verweisen diesbezüglich auf die Mengersche Darstellung[20]).

Hier ziehen wir noch eine einfache Folgerung aus dem Bewiesenen:

Satz XV. *Ist die Menge $M \cdot M_\lambda$ nicht nulldimensional, dann ist sie Summe einer in $M$ total irreduziblen Menge von erster Kategorie und einer nirgends nulldimensionalen Menge.*

Setzen wir $P = M \cdot M_\lambda$. Mit Rücksicht auf Satz XI brauchen wir nur zu zeigen, daß die Menge $P - \overline{P}_\lambda$ total irreduzibel und von erster Kategorie ist. Da die Menge $Q = M - \overline{P}_\lambda$ in $M$ offen ist, gilt, wie man leicht sieht, $Q \cdot Q_\lambda = Q \cdot M_\lambda = M \cdot M_\lambda - \overline{P}_\lambda \cdot M_\lambda = P - \overline{P}_\lambda$. Die Menge $P - \overline{P}_\lambda = Q \cdot Q_\lambda$ ist nulldimensional, also nach Satz XIV eine Menge von erster Kategorie, welche in $Q$ und mithin in $M$ total irreduzibel ist.

---

[18]) Dies folgt daraus, daß in einer total irreduziblen Menge jede abgeschlossene Menge nirgends dicht liegt.

[19]) Fund. Math. **2**, S. 81.

[20]) Wiener Ber. **133**, S. 421.

## § 4.

## Abgeschlossene Komponenten.

Sei $M$ eine beliebige Menge, $p$ ein Punkt der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}$ von $M$. Wir betrachten die Menge $M_p$ aller Punkte $q$ von $\overline{M}$, die folgende Eigenschaft haben: Es existiert keine offene Menge $U$ mit zu $M$ fremder Begrenzung, so daß $q$ in $U$, $p$ im Komplement $C(\overline{U})$ von $\overline{U}$ liegt. Der Punkt $p$ gehört offenbar zu $M_p$. Ferner ist, wie man sofort sieht, die Menge $\overline{M} - M_p$ in $\overline{M}$ offen[21]); also ist die Menge $M_p$ abgeschlossen. Wir bezeichnen daher die Menge $M_p$ als die *zu $p$ gehörige abgeschlossene Komponente von $M$.*

Ist beispielsweise $M$ im $R_1$ die Summe der offenen Intervalle $(-1, 0)$ und $(0, 1)$. Die abgeschlossenen Komponenten von $M$ sind die drei abgeschlossenen Intervalle $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 1]$, wobei das letztangeführte Intervall die abgeschlossene Komponente des Punktes 0 ist. Dieses Beispiel zeigt, daß die verschiedenen abgeschlossenen Komponenten einer Menge nicht notwendig untereinander fremd sind.

Aus der Definition der abgeschlossenen Komponente folgt unmittelbar

Satz XVI. *Sind $p$ und $q$ zwei Punkte der abgeschlossenen Hülle von $M$ und liegt $q$ in der zu $p$ gehörigen abgeschlossenen Komponente von $M$, so liegt auch $p$ in der zu $q$ gehörigen abgeschlossenen Komponente von $M$.*

Ferner beweisen wir mit der von Menger ausgebildeten Methode der Einschließung von Umgebungsbegrenzungen:

Satz XVII. *Die abgeschlossenen Komponenten einer kompakten Menge sind zusammenhängende Mengen.*

Sei $p$ ein Punkt von $\overline{M}$. Angenommen, die zu $p$ gehörige abgeschlossene Komponente $M_p$ von $M$ wäre nicht zusammenhängend, also Summe von zwei fremden nicht leeren, abgeschlossenen Mengen $M'$ und $M''$. Der Punkt $p$ möge etwa in $M'$ liegen. Sei $U$ eine offene Menge, so daß $M' < U$ und $M'' \cdot \overline{U} = 0$ gilt. Die Begrenzung $B(U)$ von $U$ ist zu $M_p$ fremd. Zu jedem Punkt $q$ der kompakten abgeschlossenen Menge $\overline{M} \cdot B(U)$ existiert eine Umgebung $U(q)$ von $q$ mit zu $M$ fremder Begrenzung derart, daß $p$ in $C(\overline{U}_q)$ liegt. Unter den Mengen $U_q$ gibt es nach dem Borelschen Theorem endlich viele, etwa $U_1, U_2, \ldots, U_n$, in deren Summe $\overline{M} \cdot B(U)$ enthalten ist. Die Menge $V = U - \overline{U_2 + U_2 + \ldots + U_m}$ ist eine Umgebung von $p$ mit zu $M$ fremder Begrenzung, und jeder Punkt von $M''$

[21]) Ist nämlich $q$ ein Punkt von $\overline{M} - M_p$, so gibt es eine Umgebung $U$ von $q$ mit zu $M$ fremder Begrenzung derart, daß $p$ weder im Innern von $U$, noch auf der Begrenzung von $U$ liegt. Dann ist die Umgebung $U$ zu $M_p$ fremd und folglich $U \cdot \overline{M} < \overline{M} - M_p$.

liegt außerhalb $\overline{V}$, gehört also nicht zu $M_p$ im Widerspruch zur Voraus-aussetzung. Damit ist Satz XVII bewiesen.

Der Begriff der abgeschlossenen Komponente wird zu den im vorigen Paragraph betrachteten Begriffen in Beziehung gesetzt durch

Satz XVIII. *Sei $M$ eine Menge eines kompakten Raumes. Damit der Punkt $p$ von $\overline{M}$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß die zu $p$ gehörige abgeschlossene Komponente nur aus dem Punkt $p$ bestehe.*

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt unmittelbar aus den Definitionen der abgeschlossenen Komponente und des Unstetigkeitspunktes. Die Bedingung ist auch hinreichend. Sei nämlich $p$ ein Punkt von $\overline{M}$ derart, daß die zu $p$ gehörige abgeschlossene Komponente $M_p$ nur aus dem Punkt $p$ besteht. Sei $U$ eine beliebige Umgebung von $p$. Zu jedem Punkt $q$ von $\overline{M}-U$ existiert eine Umgebung $U_q$, deren abgeschlossene Hülle den Punkt $p$ nicht enthält und deren Begrenzung zu $M$ fremd ist. Da $\overline{M}-U$ kompakt und abgeschlossen ist, gibt es unter den Mengen $U_q$ endlich viele etwa $U_1, U_2, \ldots, U_n$, in deren Summe die Menge $\overline{M}-U$ enthalten ist. Die Menge $V=U-\overline{(U_1+U_2+\ldots+U_n)}$ ist wiederum eine Umgebung von $p$, die in $U$ enthalten ist und deren Begrenzung zu $M$ fremd ist. Also ist $p$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$. Damit ist Satz XVIII bewiesen.

Eine unmittelbare Folge von Satz XVIII ist

Satz XIX. *Damit die Menge $M$ eines kompakten Raumes nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede abgeschlossene Komponente von $M$ aus nur einem Punkt bestehe.*

Satz XVIII ergibt ferner eine Verschärfung des Mengerschen Satzes, daß in *jeder Umgebung eines Stetigkeitspunktes der Menge $M$ Kontinua enthalten seien, die ausschließlich Stetigkeitspunkte von $M$ enthalten.* Wir können nun nämlich zeigen, daß durch jeden Stetigkeitspunkt von $M$ ein derartiges Kontinuum hindurchgeht.

Satz XX. *Ist $p$ ein Stetigkeitspunkt der kompakten Menge $M$, so ist $p$ in einem Kontinuum enthalten, dessen sämtliche Punkte Stetigkeitspunkte von $M$ sind.*

Nach Satz XVII und XVIII ist die abgeschlossene Komponente $M_p$ eines Stetigkeitspunktes $p$ ein Kontinuum. Nach Satz XVI enthält die abgeschlossene Komponente jedes Punktes von $M_p$ mehr als einen Punkt. Jeder Punkt des $p$ enthaltenden Kontinuums $M_p$ ist also Stetigkeitspunkt von $M$, womit Satz XX bewiesen ist.

In Satz XX ist insbesondere enthalten, daß *die Menge $M_\lambda$ aller Stetigkeitspunkte entweder leer oder eine stetige Menge ist.*

Satz XXI. *Für kompakte abgeschlossene Mengen stimmen die abgeschlossenen Komponenten mit den Komponenten überein.*

Sei nämlich $p$ ein Punkt der kompakten abgeschlossenen Menge $M$, $M_p$ die zu $p$ gehörige Komponente, $M_p'$ die $p$ enthaltende Komponente von $M$. Da $M_p'$ zusammenhängend ist, gilt $M_p' < M_p$. Angenommen nun, $M_p'$ wäre eine echte Teilmenge von $M_p$. Dann gäbe es in $M_p$ einen Punkt $q$ von folgender Art: Es existiert eine Umgebung $U$ von $q$, deren abgeschlossene Hülle den Punkt $p$ nicht enthält und deren Begrenzung zu $M$ und mithin zu $M_p$ fremd ist. Das widerspricht aber dem Zusammenhang von $M_p$. Also ist $M_p = M_p'$, womit Satz XXI bewiesen ist.

Aus den Sätzen XXI und XVIII folgt, *daß ein Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge $M$ dann und nur dann Stetigkeitspunkt von $M$ ist, wenn er in einem Teilkontinuum von $M$ liegt.* Da die Menge $M_\lambda$ aller Stetigkeitspunkte von $M$ ein $F_\sigma$ ist, so erhalten wir als Nebenergebnis

Satz XXII. *Die Summe aller Teilkontinua einer kompakten abgeschlossenen Menge ist ein $F_\sigma$.*

Eine Menge heißt *diskontinuierlich*, wenn sie kein Kontinuum enthält. Aus dem Bewiesenen folgt, daß für kompakte abgeschlossene Mengen auch die Umkehrung gilt: Eine kompakte abgeschlossene diskontinuierliche Menge ist nulldimensional. Auf Grund von Satz VII folgt daraus der Mazurkiewiczsche Satz[22]): *Unter den halbkompakten $F_\sigma$ stimmen die nulldimensionalen und die diskontinuierlichen Mengen überein.*

## II. Teil.

# Über Normalbereiche und zugehörige unstetige Mengen.

## § 5.

### Die Hauptsätze über Normalbereiche.

Wir wenden uns der Aufgabe zu, die Mengen $M$ von folgender Beschaffenheit zu untersuchen: Auf jeden Punkt von $M$ zieht sich eine Folge von in $M$ offenen Mengen zusammen, deren Begrenzungen in $M$ eine gewisse Eigenschaft haben, oder, was auf dasselbe hinausläuft, deren Begrenzungen in $M$ einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ von Mengen angehören. Wir nennen solche Mengen *total unstetig in bezug auf den Bereich* $\mathfrak{B}$. Die total unstetigen Mengen hinsichtlich des Bereiches $\mathfrak{B}$, welcher bloß die leere Menge enthält, sind die nulldimensionalen Mengen.

[22]) Fund. Math. 3, S. 67. – Die Mengen ohne Teilkontinuum, die wir im Anschluß an Menger als diskontinuierlich bezeichnen, werden vielfach „punkthaft“ (punktiform) genannt.

*Einen Bereich $\mathfrak{N}$ von Mengen nennen wir einen Normalbereich, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Ist $M$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$, so auch jede Teilmenge von $M$.*

2. *Ist $M$ Summe von abzählbar vielen in $M$ abgeschlossenen Mengen, die zum Bereich $\mathfrak{N}$ gehören, dann gehört auch $M$ zum Bereich $\mathfrak{N}$.*

Der Bereich aller separablen nulldimensionalen Mengen ist auf Grund von Satz VIIa ein Normalbereich. Weitere Beispiele von Normalbereichen liefern der Bereich aller abzählbaren Mengen, ferner der Bereich aller Mengen, die im Baireschen Sinn von erster Kategorie in bezug auf eine bestimmte Menge sind[23]).

Wegen der Bedingung 1. erhält jeder Normalbereich die leere Menge. Daher ist jede nulldimensionale Menge in bezug auf einen beliebigen Normalbereich total unstetig. Es gilt ferner:

**Theorem I.** *Damit eine separable Menge $M$ in bezug auf einen Normalbereich $\mathfrak{N}$ total unstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ Summe einer nulldimensionalen Menge und einer Menge aus $\mathfrak{N}$ sei.*

Die Bedingung ist notwendig. Ist nämlich $M$ total unstetig in bezug auf den Bereich $\mathfrak{N}$, dann existiert zu jedem Punkt $p$ von $M$ und zu jeder natürlichen Zahl $n$ eine Relativumgebung (d. h. eine $p$ enthaltende in $M$ offene Menge) $U^n(p)$ von $p$, deren Durchmesser $< \frac{1}{n}$ ist und deren Begrenzung in $M$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$ ist. Aus dem verallgemeinerten Borelschen Theorem folgt sodann, daß $M$ für jede natürliche Zahl $n$ Summe einer Folge $U_1^n, U_2^n, \ldots, U_m^n, \ldots$ von in $M$ offenen Mengen ist, deren Durchmesser $< \frac{1}{n}$ und deren Begrenzungen in $M$ Mengen aus $\mathfrak{N}$ sind. Sei $B(U_m^n)$ die Begrenzung von $U_m^n$ in $M$. Setzen wir

$$N = \sum_{n,m=1}^{\infty} B(U_m^n).$$

Da die Mengen $B(U_m^n)$ in $M$ und daher auch in $N$ abgeschlossen sind, ist $N$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$. Ferner ist die Menge $M - N$ nulldimensional, denn die Begrenzungen der Mengen $(M - N)\cdot U_m^n$ sind in $M$ leer und auf jeden Punkt von $M - N$ zieht sich eine Folge von Mengen aus dem System $\{U_m^n\}$ zusammen.

Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich $M = M' + N$, wo $M'$ eine nulldimensionale Menge, $N$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Auf Grund von Satz II zieht sich auf jeden Punkt von $M$ eine Folge $\{U_n\}$ von Umgebungen mit zu $M'$ fremden Begrenzungen zusammen. Die Begrenzungen

[23]) Man kann leicht zeigen, daß es zu jedem Bereich von Mengen einen kleinsten ihn enthaltenden Normalbereich gibt.

der Mengen $M \cdot U_n$ in $M$ sind Teilmengen von $N$, gehören also zu $\mathfrak{N}$. Folglich ist $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig.

Betrachten wir z. B. das System $\mathfrak{N}$ aller Teilmengen einer separablen Menge $M$, die in bezug auf $M$ von erster Kategorie sind. $\mathfrak{N}$ ist ein Normalbereich und $M$ ist in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig. Denn die Begrenzungen in $M$ von jeder in $M$ offenen Menge sind sogar nirgends dicht in $M$. Aus dem Theorem I folgt also:

Satz XXIII. *Jede separable Menge $M$ ist nach Vernachlässigung einer Teilmenge von erster Kategorie in $M$ nulldimensional.*

Da nach Sierpiński[24]) jede separable nulldimensionale Menge mit einer Teilmenge $R_1$ (der Zahlengeraden) homöomorph ist, so folgt aus Satz XXIII

Satz XXIV. *Jede separable Menge ist nach Vernachlässigung einer Teilmenge von erster Kategorie mit einer linearen Menge homöomorph.*

Auf Grund von Theorem I läßt sich die ganze Theorie der hinsichtlich eines beliebigen Normalbereiches total unstetigen Mengen auf die Theorie der nulldimensionalen Mengen zurückführen.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{N}$ stets einen Normalbereich. Zunächst ist klar, daß *jeder Teil einer in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetigen Menge in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig ist.* Ferner gilt in Analogie zu Satz III

Satz IIIa. *Ist die separable Menge $M$ total unstetig in bezug auf $\mathfrak{N}$, und ist die Menge $P$ in $P + M$ abgeschlossen, dann existiert zu jeder Umgebung $U$ von $P$ eine Umgebung $V < U$ von $P$ derart, daß der Durchschnitt von $M$ mit der Begrenzung von $V$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$ ist.*

Auf Grund von Theorem I ist $M$ Summe einer nulldimensionalen Menge $M'$ und einer Menge $N$ aus $\mathfrak{N}$. Ist die Menge $P$ in $P + M$ abgeschlossen, so ist sie auch in $P + M'$ abgeschlossen, und zu jeder Umgebung $U$ von $P$ gibt es nach Satz III eine Umgebung $V < U$ von $P$ mit zu $M'$ fremder Begrenzung. Der Durchschnitt von $M$ mit der Begrenzung von $V$ ist eine Teilmenge von $N$, gehört also zu $\mathfrak{N}$. Damit ist Satz IIIa bewiesen.

Satz III enthält als Spezialfall folgendes Analogon zu Satz II:

Satz IIa. *Ist die separable Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig, dann zieht sich auf jeden Punkt des Raumes eine Folge von Umgebungen zusammen, so daß die Durchschnitte von $M$ mit den Begrenzungen dieser Umgebungen zum Bereich $\mathfrak{N}$ gehören. Ist eine separable Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig, so bleibt ihr also diese Eigenschaft nach Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes erhalten.*

---

[24]) Fund. Math. 2, S. 85. Sierpiński spricht seinen Satz bloß für Teilmengen Euklidischer Räume aus, doch geht diese Einschränkung in seinen Beweis nicht ein.

Wir beweisen endlich:

Satz IVa. *Damit eine separable Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei in $M$ abgeschlossenen zueinander fremden Mengen $N_1$ und $N_2$ zwei in $M$ abgeschlossene Mengen $M_1$ und $M_2$ gibt, deren Durchschnitt eine Menge aus $\mathfrak{N}$ ist und so, daß*

$$N_1 < M_1 - M_1 M_2, \qquad N_2 < M_2 - M_1 M_2, \qquad M = M_1 + M_2$$

*gilt.*

Die Bedingung ist notwendig. Sei nämlich $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig. Sind die Mengen $N_1$ und $N_2$ zueinander fremd und in $M$ abgeschlossen, so gibt es nach Hilfssatz 1 eine offene Menge $U$ derart, daß $N_1 < U$ und $N_2 \cdot \overline{U} = 0$ ist. Nach Satz IIIa existiert eine Umgebung $V < U$ von $N_1$, deren Begrenzung mit $M$ einen zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Durchschnitt hat. Setzen wir $M_1 = V \cdot M$ und $M_2 = C(V) \cdot M$, wo $C(V)$ das Komplement von $V$ bezeichnet, dann genügen die in $M$ abgeschlossenen Mengen $M_1$ und $M_2$ allen Forderungen des Satzes IVa.

Die Bedingung ist hinreichend. Angenommen nämlich, sie sei erfüllt. Ist dann $p$ ein Punkt von $M$, $U$ eine Umgebung von $P$, so lassen sich nach Voraussetzung zwei in $M$ abgeschlossene Mengen $M_1$ und $M_2$ mit folgenden Eigenschaften bestimmen:

1. $M = M_1 + M_2$,
2. $(p) < M_1 - M_2, \quad M \cdot C(U) < M_2 - M_1$,
3. $M_1 \cdot M_2$ ist eine Menge aus $\mathfrak{N}$.

Die Menge $V = M - M_2$ ist in $M$ offen. Sie enthält den Punkt $p$ und ist selbst in $U$ enthalten. Ferner ist die Begrenzung von $V$ in $M$ eine Teilmenge von $M_1 \cdot M_2$, gehört also zu $\mathfrak{N}$. Folglich ist $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig. Damit ist Satz IVa bewiesen.

Wir können die hinsichtlich eines Normalbereiches total unstetigen Mengen durch Zerlegungseigenschaften charakterisieren, so wie früher die nulldimensionalen Mengen.

Satz Va. *Damit die kompakte (halbkompakte) Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ für jedes $\varepsilon > 0$ Summe sei von endlich vielen (von einer Nullfolge von) in $M$ abgeschlossenen Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$, deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind und die zu je zweien Durchschnitte haben, die dem Bereich $\mathfrak{N}$ angehören.*

Die Bedingung ist notwendig. Ist nämlich die kompakte Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetig und ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann existiert nach Satz IIa zu jedem Punkt $p$ von $\overline{M}$ eine Umgebung $U(p)$ von $p$ von folgenden Eigenschaften: 1. Die Durchmesser der $U(p)$ sind $< \varepsilon$, 2. die

Durchschnitte von $M$ mit den Begrenzungen der $U(p)$ sind Mengen aus $\mathfrak{R}$. Wir wählen unter den Mengen $U(p)$ nach dem Borelschen Theorem endlich viele, etwa $U_1, U_2, \ldots, U_n$, in deren Summe $M$ enthalten ist, aus und definieren $A_m = [\overline{U}_m - (U_1 + U_2 + \ldots + U_{m-1})] \cdot M$. Die Mengen $A_m$ sind in $M$ abgeschlossen, ihre Durchmesser sind $< \varepsilon$. Es gilt ferner für $n \geqq i > k$ $A_i \cdot U_k = 0$. Daraus folgt wegen $A_k < \overline{U}_k$ die Beziehung $A_i \cdot A_k < M \cdot (\overline{U}_i - U_k) = M \cdot B(U_k)$. Mit der Menge $M \cdot B(U_k)$ gehört daher auch der Durchschnitt $A_i \cdot A_k$ zu $\mathfrak{R}$ und damit ist gezeigt, daß die Mengen $A_n$ allen Forderungen des Satzes genügen.

Die Bedingung ist hinreichend. Ist sie nämlich erfüllt, so kann man für jede natürliche Zahl $k$ endlich viele in $M$ abgeschlossene Mengen $A_1^k, A_2^k, \ldots, A_{n_k}^k$ mit Durchmessern $< \frac{1}{k}$ bestimmen, so daß

$$(*) \qquad M = \sum_{m=1}^{n_k} A_m^k$$

gilt und daß die Durchschnitte $A_l \cdot A_m$ $(l \neq m)$ zum Bereich $\mathfrak{R}$ gehören. Setzen wir

$$(**) \qquad N = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{m=1}^{l-1} A_l^k \cdot A_m^k$$

und

$$(***) \quad M' = M - N, \quad B_m^k = A_m^k - N \quad (k = 1, 2, \ldots; \; m = 1, 2, \ldots, n_k).$$

Die Menge $N$ gehört als Summe von abzählbar vielen in $N$ abgeschlossenen Mengen aus $\mathfrak{R}$ selbst zu $\mathfrak{R}$. Aus (**) folgt

$$(\dagger) \qquad B_l^k \cdot B_m^k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots; \; m, l = 1, 2, \ldots, n_k; \; l \neq m).$$

Aus (*) folgt:

$$(\dagger\dagger) \qquad M' = \sum_{m=1}^{n_k} B_m^k.$$

Da die Mengen $B_m^k = A_m^k C(N)$ in $M' = M \cdot C(N)$ abgeschlossen sind und da der Durchmesser von $B_n^k < \frac{1}{n}$ ist, folgt aus (†) und (††) auf Grund von Satz V, daß $M'$ nulldimensional ist. Dann ist aber die Menge $M = M' + N$ nach Theorem I in bezug auf $\mathfrak{R}$ total unstetig.

Analog beweist man den Satz Va für halbkompakte Mengen.

Den weiteren Ausführungen liegt zugrunde

Satz XXV. *Sind $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zwei Normalbereiche, dann ist das System $\mathfrak{R}$, bestehend aus allen Mengen, die Summe einer Menge aus $\mathfrak{R}_1$ und einer Menge aus' $\mathfrak{R}_2$ sind, ein Normalbereich.*

Daß jeder Teil einer Menge aus $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, ist klar. Es ist nur folgendes zu zeigen: Ist $N$ Summe einer Folge $\{N_k\}$ von in $N$ abgeschlossenen Mengen, die zu $\mathfrak{R}$ gehören, dann ist auch $N$ eine Menge aus $\mathfrak{R}$.

Setzen wir $N_1' = N_1$ und $N_k' = N_k - \sum_{i=1}^{k-1} N_i$ $(k = 2, 3, \ldots)$ dann ist $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k'$, die Mengen $N_k'$ sind paarweise fremde $F_\sigma$ in $N$ und gehören zum Bereich $\mathfrak{N}$, es gilt also: $N_k' = N_k^1 + N_k^2$, wo $N_k^1$ und $N_k^2$ Mengen aus $\mathfrak{N}_1$ bzw. aus $\mathfrak{N}_2$ sind. Setzen wir ferner

$$(^\circ) \qquad N^* = \sum_{k=1}^{\infty} N_k^1, \qquad N^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} N_k^2.$$

Dann gilt:

1. $N = N^* + N^{**}$,
2. $N^* \cdot N_k' = N_k^1, \quad N^{**} \cdot N_k' = N_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Aus 2. folgt, daß die Mengen $N_k^1$ in $N^*$ $F_\sigma$ sind. Folglich ist $N^*$ nach $(^\circ)$ Summe von abzählbar vielen in $N^*$ abgeschlossenen Mengen aus $\mathfrak{N}_1$, also selbst eine Menge aus $\mathfrak{N}_1$. Ebenso ist $N^{**}$ eine Menge aus $\mathfrak{N}_2$ und die Formel 1. zeigt, daß $N$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$ ist. Damit ist Satz XXV bewiesen.

Nach dem Satz VIIa ist das System aller nulldimensionalen Mengen ein Normalbereich. Auf Grund von Theorem I und Satz XXV ergibt sich daraus der folgende Hauptsatz aus der Theorie der Normalbereiche:

**Theorem II.** *Das System aller separablen Mengen, die in bezug auf einen Normalbereich total unstetig sind, bildet einen Normalbereich.*

Wir können die in der Theorie der nulldimensionalen Mengen definierten Begriffe für beliebige Normalbereiche einführen. In Satz VIIb z. B. kann das Wort „nulldimensional" ersetzt werden durch die Worte „total unstetig in bezug auf $\mathfrak{N}$". Wir nennen ferner den Punkt $p$ *Unstetigkeitspunkt der Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$*, wenn sich auf $p$ eine Folge von Umgebungen zusammenzieht, deren Begrenzungen mit $M$ Durchschnitte haben, die Mengen des Bereiches $\mathfrak{N}$ sind. Die anderen Punkte des Raumes nennen wir *Stetigkeitspunkte von $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$*. Es gilt dann

Satz XXVI. *Damit der Punkt $p$ ein Unstetigkeitspunkt der Menge $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ Summe sei von zwei Mengen $M'$ und $N$, so daß $p$ Unstetigkeitspunkt von $M'$ ist und daß $N$ zum Bereich $\mathfrak{N}$ gehört.*

Die Bedingung ist notwendig. Denn wenn $p$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$ ist, dann existiert eine sich auf $p$ zusammenziehende Folge $\{U_n\}$ von Umgebungen, so daß die Durchschnitte $M \cdot B(U_n)$ zu $\mathfrak{N}$ gehören. Setzen wir $N = \sum_{n=1}^{\infty} M \cdot B(U_n)$, so ist $N$ eine Menge aus $\mathfrak{N}$ und $p$ ist ein Unstetigkeitspunkt von $M - N$. Daß die Bedingung hinreichend ist, zeigt man genau so wie beim Beweise von Theorem I.

Wir beweisen nun folgendes Analogon von Satz VIII:

Satz VIIIa. *Es sei die Menge $M$ in der separablen Menge $A$ abgeschlossen und es sei die Menge $A - M$ total unstetig in bezug auf $\mathfrak{N}$. Ist dann der Punkt $p$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$ in bezug auf $\mathfrak{N}$, dann ist $p$ auch ein Unstetigkeitspunkt von $A$ in bezug auf $\mathfrak{N}$.*

Auf Grund von Theorem I und von Satz XXVI können wir schreiben:

$$M = M' + N_1, \qquad A - M = P + N_2,$$

wobei $N_1$ und $N_2$ Mengen aus $\mathfrak{N}$ sind, $M'$ in $p$ unstetig und $P$ nulldimensional ist. Da $M$ in $A$ abgeschlossen ist, ist $N_1$ wegen $N_1 = M(N_1 + N_2)$ in $N_1 + N_2$ abgeschlossen. Daher ist $N_2$ in $N_1 + N_2$ offen, also ist $N_2$ und somit auch $N_1 + N_2$ Summe von abzählbar vielen in $N_1 + N_2$ abgeschlossenen Mengen aus $\mathfrak{N}$. Die Menge $N = N_1 + N_2$ gehört daher zum Bereich $\mathfrak{N}$. Nun ist $p$ nach Satz VIII ein Unstetigkeitspunkt von $M' + P$ (denn $M'$ ist in $M' + P$ abgeschlossen); daher ist $p$ nach Satz XXVI ein Unstetigkeitspunkt von $A = M' + P + N$ in bezug auf $\mathfrak{N}$.

*Alle Sätze des* § 3 sind Folgerungen von Satz VIII und *bleiben* daher *gültig, wenn man die Worte „Unstetigkeitspunkt" und „Stetigkeitspunkt" ersetzt durch die Worte „Unstetigkeitspunkt in bezug auf $\mathfrak{N}$" bzw. „Stetigkeitspunkt in bezug auf $\mathfrak{N}$".* An Stelle der stetigen Mengen treten dabei die in bezug auf $\mathfrak{N}$ stetigen (d. h. in bezug auf $\mathfrak{N}$ keinen Unstetigkeitspunkt enthaltenden) Mengen. Es erübrigt sich alle diese Sätze nochmals anzuführen.

Hingewiesen sei darauf, daß man auch *abgeschlossene Komponenten hinsichtlich* $\mathfrak{N}$ einführen kann. Als die zum Punkt $p$ gehörige abgeschlossene Komponente $M_p$ der Menge $M$ hinsichtlich $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte $q$ von $\overline{M}$ von folgender Eigenschaft: Es existiert keine offene Menge $U$, deren Begrenzung mit $M$ einen Durchschnitt hat, welcher eine Menge aus $\mathfrak{N}$ ist, und so daß $q$ in $U$, $p$ im Komplement $C(\overline{U})$ von $\overline{U}$ liegt.

Ganz wie in § 4 zeigt man (man hat dabei nur die im § 4 verwendeten offenen Mengen mit zu $M$ fremden Begrenzungen durch offene Mengen zu ersetzen, deren Durchschnitte mit $M$ Mengen aus $\mathfrak{N}$ sind), daß die Mengen $M_p$ entweder Kontinua sind, oder bloß aus dem Punkt $p$ bestehen; der letztere Fall tritt (vgl. Satz XVIII) dann und nur dann ein, wenn $p$ ein Unstetigkeitspunkt von $M$ hinsichtlich $\mathfrak{N}$ ist. Hieraus folgert man so wie Satz XX

**Theorem III.** *Jeder Stetigkeitspunkt der kompakten Menge $M$ in bezug auf den Normalbereich $\mathfrak{N}$ liegt in einem Kontinuum, das ausschließlich solche Stetigkeitspunkte enthält*[25]).

---

[25]) (Zusatz bei der Korrektur): Das Theorem III bleibt (wie aus den Beweisen von § 4 hervorgeht) gültig, wenn der Bereich $\mathfrak{N}$, anstatt Normalbereich zu

(Fortsetzung der Fußnote 25 auf der nächsten Seite.)

## § 6.

## Anwendungen auf die Dimensionstheorie.

Wir sind zum Begriff des Normalbereiches dadurch gelangt, daß wir zwei Haupteigenschaften des Bereiches aller separablen nulldimensionalen Mengen als selbständige Postulate ausgesprochen und im übrigen von der Nulldimensionalität abstrahiert haben. Ferner ist unser Prinzip des Überganges von einem Normalbereich $\mathfrak{N}$ zum Normalbereich aller in bezug auf $\mathfrak{N}$ total unstetigen Mengen identisch mit dem Menger-Urysohnschen Prinzip des Überganges vom Bereich der höchstens $(n-1)$-dimensionalen Mengen zum Bereich der höchstens $n$-dimensionalen Mengen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergeben sich daher vor allem wichtige dimensionstheoretische Konsequenzen.

*Höchstens $n$-dimensional* (im Punkte $p$) heißt in unserer Terminologie *jede Menge, die total unstetig* (unstetig in $p$) *in bezug auf den Bereich der höchstens $(n-1)$-dimensionalen Mengen, wobei der Bereich der $(-1)$-dimensionalen Mengen bloß die leere Menge enthält.* Jene höchstens $n$-dimensionalen Mengen, die nicht auch höchstens $(n-1)$-dimensional sind, heißen $n$-dimensional. Durch mehrfache Anwendung des Theorems II folgt

**Theorem IV.** *Die separablen höchstens $n$-dimensionalen Mengen bilden einen Normalbereich.*

Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung des Theorems von Menger und Urysohn, daß die Summe abzählbar vieler höchstens $n$-dimensionaler abgeschlossener kompakter Mengen höchstens $n$-dimensional ist[26]. Denn den Hauptinhalt von Theorem IV bildet der Satz, daß *jede separable Menge $M$, welche Summe von abzählbar vielen in $M$ abgeschlossenen höchstens $n$-dimensionalen Mengen ist, auch selbst höchstens $n$-dimensional ist.* Die einschränkende Voraussetzung dieses Summensatzes (d. h. die Abgeschlossenheit der Summanden in der Summe) betrifft nicht die *einzelnen Summanden,* sondern ihre *gegenseitige Lage,* während bei den soeben erwähnten Summentheorem von Menger und Urysohn jeder einzelne Summand einer einschränkenden Bedingung unterworfen wird.

---

sein, den folgenden weniger einschränkenden Bedingungen genügt: 1. Jeder Teil einer Menge aus $\mathfrak{N}$ gehört zu $\mathfrak{N}$. 2. Die Summe von *endlich vielen* in der Summe abgeschlossenen Mengen aus $\mathfrak{N}$ ist selbst eine Menge aus $\mathfrak{N}$. Insbesondere gilt also das Theorem III für den Bereich aller *endlichen Mengen,* d. h. haben die Begrenzungen aller hinreichend kleinen Umgebungen eines Punktes $p$ unendlich viele Punkte mit der kompakten $M$ gemein, so liegt $p$ in einem Kontinuum von Punkten mit derselben Eigenschaft.

[26]) Monatshefte **34**; Fund. Math. **8**.

Jeder Satz über Normalbereiche kann dem Theorem IV zufolge für den Bereich der separablen höchstens $n$-dimensionalen Mengen ausgesprochen werden. Wir beschränken uns auf die Formulierung der wichtigsten dimensionstheoretischen Sätze, die man so erhält. Eine $n$-fache Anwendung von Theorem I ergibt:

**Theorem V.** *Damit die separable Menge $M$ höchstens $n$-dimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß $M$ Summe von $n+1$ nulldimensionalen Mengen sei; m. a. W. die separable Menge $M$ ist dann und nur dann $n$-dimensional, wenn sie in $n+1$ aber nicht in weniger nulldimensionale Mengen gespalten werden kann*[27]).

Sehr leicht läßt sich eine Zerlegung des $R_n$ (des $n$-dimensionalen Zahlenraumes) in $n+1$ nulldimensionale Mengen angeben durch Verallgemeinerung eines Gedankens von Sierpiński[28]) zur Zerlegung der Ebene in drei nulldimensionale Mengen. Bezeichnet man nämlich mit $M_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1, n)$ die Menge aller Punkte des $R_n$, die $k$ rationale und $n-k$ irrationale Koordinaten haben, dann ist $R_n = M_0 + M_1 + \ldots + M_n$ die gewünschte Zerlegung. Übrigens ist die Summe von je zwei Mengen $M_i$ zusammenhängend, *so daß der $R_{2n}$ und der $R_{2n+1}$ Summe von $n+1$ zusammenhängenden eindimensionalen Mengen sind.*

Aus dem Theorem V folgt unmittelbar der übrigens auch direkt beweisbare

Satz XXVII. *Die Summe zweier separabler Mengen, von denen die eine $n$-dimensional, die andere $m$-dimensional ist, ist höchstens $(n+m+1)$-dimensional, und diese Schranke kann im allgemeinen nicht erniedrigt werden*[28a]). *Ist dagegen mindestens einer der Summanden zugleich ein $F_\sigma$ und ein $G_\delta$ in der Summe, dann ist deren Dimension gleich der größeren der beiden Zahlen $m$ und $n$.*

Der zweite Teil von Satz XXVII ergibt sich unmittelbar aus Theorem IV (vgl. Satz VIIa). Insbesondere ist in Satz XXVII der Satz enthalten, daß die Dimension einer separablen $n$-dimensionalen Menge durch Hinzufügung eines beliebigen einzelnen Punktes nicht erhöht werden kann[28b]).

Ferner ist auf Grund des zweiten Teiles von Satz XXVII klar, daß unter den $n+1$ nulldimensionalen Mengen, in welche eine $n$-dimensionale

---

[27]) Hinsichtlich kompakter abgeschlossener Mengen wurde dieses Theorem von Urysohn (C. R. **175**) ohne Beweis ausgesprochen. Der in den Fund. Math. erscheinende Urysohnsche Beweis war dem Verfasser bei der Drucklegung dieser Arbeit unbekannt.

[28]) Fund. Math. **4**, S. 1.

[28a]) Dieses Ergebnis findet sich auch bei Urysohn, Fund. Math. 8, S. 317–319.

[28b]) Durch diesen Satz wird, wie Menger bemerkt hat, die von ihm in Betracht gezogene Unterscheidung zwischen der inneren und äußeren Dimension (vgl. Monatshefte f. Math. u. Phys. **34**) entbehrlich.

Menge zerlegt werden kann, keine zugleich $F_\sigma$ und $G_\delta$ in der Menge sein kann. Man kann in dieser Richtung weiter zeigen, daß unter den $n+1$ nulldimensionalen Summanden, falls dieselben paarweise fremd sind, nicht mehr als zwei Borelsche Mengen zweiter Ordnung auftreten können und daß in diesem Fall die eine ein $F_\sigma$, die andere ein $G_\delta$ ist.

Eine unmittelbare Folge von Theorem V ist schließlich

Satz XXVIII. *Ist die $n$-dimensionale Menge $M_n$ in einer separablen $(n+k)$-dimensionalen Menge $M_{n+k}$ enthalten, dann existieren $n-1$ Mengen $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots, M_{n+k-1}$ mit den Dimensionszahlen $n+1, n+2, \ldots, n+k-1$, so daß gilt:*

$$M_n < M_{n+1} < \ldots < M_{n+k-1} < M_{n+k}.$$

Nennen wir eine Menge $M$ *überall $n$-dimensional*, wenn jede in $M$ offene Menge $n$-dimensional ist. Sei $M^{(n)}$ die Menge aller Punkte, in denen die separable Menge $M$ mindestens $n$-dimensional ist, dann folgt aus dem Analogon des Satzes IX und XII hinsichtlich des Normalbereiches der höchstens $(n-2)$-dimensionalen Mengen:

**Theorem VI.** *Die Menge $M \cdot \overline{M}_n^{(n)}$ ist in jedem Punkte von $M^{(n)}$ mindestens $n$-dimensional. Jede separable $n$-dimensionale Menge läßt sich folglich (und zwar auf eine einzige Weise) in eine in ihr abgeschlossene überall $n$-dimensionale und eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Menge spalten* [28c].

Eine in allen ihren Punkten $n$-dimensionale Menge heißt *homogen $n$-dimensional.* Das Analogon des Satzes XIV besagt:

Satz XIVa. *Die separable $n$-dimensionale Menge $M$ enthält eine homogen $n$-dimensionale Teilmenge, wofern die Menge aller Punkte von $M$, in denen $M$ $n$-dimensional ist, von zweiter Kategorie im Sinne von Baire ist oder mit ihrem Hausdorffschen Residuum nicht übereinstimmt.*

Desgleichen sind die *Mengerschen Überdeckbarkeitsbedingungen* [29]) hinreichend dafür, daß eine $n$-dimensionale Menge eine homogen $n$-dimensionale Teilmenge enthält.

Ferner ergibt die Anwendung des Theorems III:

**Theorem VII.** *Jeder Punkt, in dem die kompakte Menge $M$ mindestens $n$-dimensional ist, ist in einem Kontinuum enthalten, in dessen sämtlichen Punkten die Menge $M$ mindestens $n$-dimensional ist.*

---

[28c]) Für kompakte abgeschlossene Mengen wurde dieses Theorem von Menger (Monatshefte f. Math. u. Phys. **34**, S. 144) und von Urysohn (Fund. Math. 8, S. 270) bewiesen.

[29]) Vgl. [21]).

Endlich gilt in Verallgemeinerung eines von Menger und Urysohn für kompakte abgeschlossene Mengen bewiesenen Satzes als Analogon von Satz V:

Satz Va. *Damit die kompakte Menge $M$ höchstens $n$-dimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß sich $M$ in endlich viele beliebig kleine in $M$ abgeschlossene Mengen spalten lasse, die zu je zweien höchstens $(n-1)$-dimensionale Durchschnitte haben.*

Betrachten wir zum Abschluß die dimensionstheoretische Fassung von Satz IVa:

*Damit eine separable Menge $M$ höchstens $n$-dimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß je zwei fremde in $M$ abgeschlossene Mengen $N_1$ und $N_2$ durch eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Menge in $M$ getrennt werden können.*

Dabei nennen wir in üblicher Weise die Mengen $N_1$ und $N_2$ in $M$ durch die abgeschlossene Menge $P$ *getrennt*, wenn, $M = M_1 + M_2$, $M \cdot \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 < P$, $N_1 < M_1 - P$, $N_2 < M_2 - P$ gilt.

Bekanntlich hat Brouwer den im Fréchetschen Sinne „normalen" Mengen $M$ einen natürlichen Dimensionsgrad $\leqq n$ zugeschrieben, wenn je zwei zueinander fremde, in $M$ abgeschlossene Teilmengen von $M$ durch eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Teilmenge von $M$ getrennt werden können, — hat als nulldimensional die diskontinuierlichen Mengen bezeichnet, — und kürzlich für kompakte und kondensierte Räume die Äquivalenz der natürlichen und der M.-U.schen (Menger-Urysohnschen) Definition nachgewiesen[30]. Satz IVb spricht diese Äquivalenz hinsichtlich beliebiger separabler Räume aus, wofern, wie Menger und ich bemerkt haben, für die nicht halbkompakten Räume die Brouwersche Definition der nulldimensionalen Mengen durch die M.-U.sche Definition ersetzt wird, die gleichfalls im Geiste der Brouwerschen Definition in folgender Form ausgesprochen werden kann: Nulldimensional heißt eine Menge $M$, wenn je zwei fremde, in $M$ abgeschlossene Mengen durch die leere Menge getrennt werden können[31].

---

[30]) Vgl. [2]). Die Äquivalenz folgt auch unmittelbar aus dem bei Menger, Monatshefte f. Math. u. Phys. **34**, S. 150, 151, befindlichen Satz VI. Für kompakte Räume findet sich die Eigenschaft, sowie ihre Beweis, explizite bei Urysohn, Fund. Math. **8**, S. 328.

[31]) Die obige Bemerkung gründet sich darauf, daß im Bereich der halbkompakten $F_\sigma$ die diskontinuierlichen und die nulldimensionalen Mengen identisch sind [vgl. [23])] daß aber unter den nicht-halbkompakten diskontinuierlichen Mengen solche von beliebig hoher Dimension im M.-U.schen Sinn existieren. Am einfachsten ergibt sich dies aus Theorem V im Verein mit dem Mazurkiewiczschen Satz, daß jedes Kontinuum eines $R_n$ Summe von zwei diskontinuierlichen Mengen ist (Bull. Ac. Crac. 1913, S. 76).

Man könnte[31a]) auch für allgemeine separable Mengen eine Dimensionstheorie aufbauen, indem man von den diskontinuierlichen Mengen als den nulldimensionalen[32]) ausgeht; hinsichtlich der halbkompakten Räume wäre die so entstehende Theorie mit der M.-U.schen identisch. An innerer Einheitlichkeit und Durchsichtigkeit reicher scheint uns aber die Theorie, welche von der leeren Menge, als der (— 1)-dimensionalen, ausgehend rekursiv die höherdimensionalen Mengen definiert. *Dieser allgemeine Dimensionsbegriff scheint uns die wichtigste, heute bekannte gestaltliche Eigenschaft des Raumes in der fruchtbarsten Weise zu präzisieren.*

[31a]) Vgl. dazu auch die Ausführungen von Menger, Bericht über die Dimensionstheorie, Jahresber. d. deutschen Math. Ver. **35**.

[32]) Auch die diskontinuierlichen Mengen bilden einen Normalbereich.

(Eingegangen am 28. 9. 1925.)

# Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Hofrat Dr. Dr.-Ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften“ ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Prof. Dr. Wilhelm Blaschke in Hamburg für sein Buch „Kreis und Kugel“ zuerkannt worden.