Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Brouwer hat die Umkehrbarkeit seines Satzes, daß zwei zu derselben „Klasse“ gehörige, d. h. stetig ineinander überführbare Abbildungen einer n-dimensionalen, geschlossenen, zweiseitigen Mannigfaltigkeit μ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ' denselben „Grad“ besitzen[1]), für den Fall $n = 2$ untersucht und dieses Problem durch Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingungen erledigt, die zwei Abbildungen außer der Übereinstimmung ihrer Gradzahlen erfüllen müssen, um zu derselben Klasse zu gehören[2])[3]). Während einige der dabei angewandten Methoden und gewonnenen Ergebnisse nicht an die Dimensionenzahl 2 gebunden sind[4]), läßt sich, soviel ich sehe, der Beweis gerade des wichtigsten der hierher gehörigen Brouwerschen Sätze nicht ohne weiteres auf den Fall mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten übertragen. Dieser Satz lautet: „Ist $n = 2$, und μ' die *Kugel*, so gehören zwei Abbildungen gleichen Grades zur gleichen Klasse“ [2]).

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des entsprechenden Satzes für *alle n*. Er wird — ohne Benutzung des Brouwerschen Resultats — durch Schluß von $n-1$ auf n geführt. Die Übereinstimmung der Grade der betrachteten Abbildungen f_1 und f_2 greift in die im übrigen ganz elementare (§§ 1, 2) Untersuchung dadurch ein (§ 3), daß, wie eine durch Verallgemeinerung Brouwerscher Betrachtungen früher von mir bewiesene

---

[1]) Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71.

[2]) Sur la notion de „classe“ ..., Proc. of the V. intern. Congr. of Math., Cambridge 1912. — Over één-éénduidige continue transformaties ..., Amst. Akad. Versl. 21, (1913).

[3]) Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, Math. Ann. 81.

[4]) S. z. B. § 4 meiner Arbeit: *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann. 95.

Formel[5]) lehrt, die Anzahl der Punkte von μ, von denen f_1 und f_2 zueinander diametrale, also der Überführung ineinander am stärksten widerstrebende Bildpunkte liefern, bei richtiger Berücksichtigung von gewissen Vielfachheiten 0 ist. Für spezielle μ, z. B. für die n-dimensionalen Kugeln, kann man die Benutzung der erwähnten Formel, sowie einige etwas umständliche vorbereitende Überlegungen (§ 2) durch einfachere Betrachtungen ersetzen (§ 6).

Anwendung findet unser Satz bei Behandlung gewisser „Randwertaufgaben". Einer seiner Spezialfälle besagt nämlich, daß sich eine Abbildung des Grades 0 einer n-dimensionalen Kugel auf eine andere stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt verwandeln läßt. Diese Tatsache ist mit der Lösbarkeit der einfachsten der erwähnten Aufgaben identisch, die sich folgendermaßen aussprechen läßt: „Für $\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu^2 = 1$ ist ein System von $n+1$ stetigen, nirgends gleichzeitig verschwindenden Funktionen $F_1, \ldots, F_{n+1}$ von $x_1, \ldots, x_{n+1}$ gegeben, dessen Kroneckersche Charakteristik[6]) den Wert 0 hat; man soll für $\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu^2 \leqq 1$ ein System stetiger, nirgends gleichzeitig verschwindender Funktionen $f_1, \ldots, f_{n+1}$ von $x_1, \ldots, x_{n+1}$ mit den Randwerten $F_1, \ldots, F_{n+1}$ definieren." (Daß das Verschwinden der Charakteristik für die Existenz der $f_1, \ldots, f_{n+1}$ notwendig ist, ist bekannt[6]).) Einige derartige Randwertaufgaben werden behandelt; dabei wird die geometrische Terminologie der anderen Abschnitte beibehalten, die das Funktionensystem als Vektor, die Charakteristik als Abbildungsgrad deutet (§ 5).

Nachdem gezeigt ist, daß es *höchstens eine* Klasse von Abbildungen gegebenen Grades der gegebenen Mannigfaltigkeit μ auf die n-dimensionale Kugel gibt, liegt die Frage nahe, ob eine solche Klasse stets *existiert.* Daß diese Frage, wie gezeigt wird (§ 4), zu bejahen ist, ist nicht selbstverständlich; denn es hat z. B. jede Abbildung einer Fläche vom Geschlecht 0 auf eine Fläche höheren Geschlechts den Grad 0[3]) [4]).

§ 1.

Stetige Abänderung von Vektorfeldern.

$r(P)$ bezeichne die Entfernung des Punktes P im n-dimensionalen euklidischen Raum vom Nullpunkt O des Koordinatensystems. Durch

---

[5]) Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen (§ 2), Math. Ann. 95.

[6]) Kronecker, Über Systeme von Funktionen mehrer Variabeln, Mon.-Ber. d. Kgl. Pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1869. — Hadamard, Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker in Tannery, Introduction à la théorie des fonctions II, 2. éd. 1910.

$r(P) \leqq R$ ist eine n-dimensionale Vollkugel K, durch $r(P) = R$ ihr Rand, die $(n-1)$-dimensionale Kugel S^{n-1}, charakterisiert. In K sei ein stetiges Feld $\mathfrak{V}$ auf dem Rand nirgends verschwindender n-dimensionaler Vektoren $\mathfrak{v}(P)$ definiert. Wir betrachten stetige, die Randvektoren festlassende Abänderungen von $\mathfrak{V}$, d. h. in P und einem Parameter t für $0 \leqq t \leqq t_1$ stetige[7]) Vektorfunktionen $\mathfrak{v}(P, t)$, die die Gleichungen

$$\mathfrak{v}(P, 0) = \mathfrak{v}(P) \quad \text{für} \quad r(P) \leqq R$$

$$\mathfrak{v}(P, t) = \mathfrak{v}(P) \quad \text{für} \quad r(P) = R, \quad 0 \leqq t \leqq t_1$$

befriedigen.

Hilfssatz I. *Man kann $\mathfrak{V}$ stetig unter Festhaltung der Randvektoren in ein Vektorfeld abändern, das genau einen verschwindenden Vektor enthält.*

Beweis. Wegen des Nichtverschwindens am Rande und der Stetigkeit der $\mathfrak{v}$ gibt es zwei Zahlen r_1, r_2, so daß $0 < r_1 < r_2 < R$ und für $r(P) \geqq r_1$ stets $|\mathfrak{v}(P)| > 0$ ist. Wir definieren die stetige Funktion

$$\varphi(r) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq r_1$$

$$\varphi(r) = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \quad \text{für} \quad r_1 \leqq r \leqq r_2$$

$$\varphi(r) = 0 \quad \text{für} \quad r_2 \leqq r \leqq R$$

und führen zunächst mit $0 \leqq t \leqq 1$ folgende, die Randvektoren festhaltende stetige Abänderung aus:

$$\mathfrak{v}(P, t) = [1 - t \cdot \varphi(r(P))] \cdot \mathfrak{v}(P).$$

In ihrem Ergebnis, dem Feld der Vektoren $\mathfrak{v}(P, 1)$ verschwinden alle Vektoren für $r(P) \leqq r_1$, während für $r(P) > r_1$ alle Vektoren von 0 verschieden und den ursprünglichen Vektoren $\mathfrak{v}(P)$ gleichgerichtet, für $r(P) \geqq r_2$ alle Vektoren unverändert geblieben sind.

Bezeichnet Pr_1 den auf dem Strahl OP in der Entfernung r_1 von O liegenden Punkt, $\mathfrak{V}'$ das Vektorfeld, das aus $\mathfrak{V}$ entsteht, wenn man für $r(P) < r_1$ die Vektoren $\mathfrak{v}(P)$ durch die Vektoren $\mathfrak{v}'(P) = \mathfrak{v}(Pr_1)$ ersetzt, so ist $\mathfrak{V}'$ in O und nur dort unstetig. Das Feld $\mathfrak{V}''$ der Vektoren $\mathfrak{v}''(P) = r(P) \cdot \mathfrak{v}'(P)$ ist überall stetig, für $P \neq O$ von 0 verschieden, für $r \geqq r_1$ mit $\mathfrak{V}$ gleichgerichtet und auf dem Rand von K mit $\mathfrak{V}$ identisch.

Nun setzen wir die begonnene Abänderung für $1 \leqq t \leqq 2$ folgendermaßen fort:

$$\mathfrak{v}(P, t) = \mathfrak{v}(P, 1) + (t-1) \cdot \varphi(r) \cdot \mathfrak{v}''(P).$$

---

[7]) Unter Stetigkeit einer Transformationsfunktion $f(P, t)$ ist hier und im Folgenden stets gleichmäßige Stetigkeit in den $n+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, t$ zu verstehen.

Dabei bleiben wieder die Vektoren mit $r \geqq r_2$ fest, so daß in dem Ergebnis

$$\mathfrak{v}(P, 2) = \mathfrak{v}(P, 1) + \varphi(r) \cdot \mathfrak{v}''(P)$$

gewiß $\mathfrak{v}(P, 2) \neq 0$ für $r \geqq r_2$ ist; für $0 < r < r_2$ aber ist der Vektor $\varphi(r) \cdot \mathfrak{v}''(P) \neq 0$ und der Vektor $\mathfrak{v}(P, 1)$ entweder mit ihm gleichgerichtet oder 0, also $\mathfrak{v}(P, 2) \neq 0$; es ist nur $\mathfrak{v}(O, 2) = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Fragen wir nun, unter welchen Bedingungen sich durch eine Abänderung der betrachteten Art *sämtliche* Nullstellen des gegebenen Vektorfeldes beseitigen lassen. Nehmen wir an, dies sei möglich; mit P_R bezeichnen wir die Randpunkte von K, mit P_r den Punkt, der auf OP_R im Abstand r von O liegt, mit $\overline{\mathfrak{V}}$ das Feld der Randvektoren $\mathfrak{v}(P_R)$, mit $\mathfrak{V}^*$ das nullstellenfreie, transformierte Feld der Vektoren $\mathfrak{v}^*(P)$, dessen Randfeld ebenfalls $\overline{\mathfrak{V}}$ ist. Dann kann man $\overline{\mathfrak{V}}$ durch den Abänderungsprozeß

$$\mathfrak{v}(P_R, t) = \mathfrak{v}^*(P_t), \qquad [R \geqq t \geqq 0]$$

stetig in das konstante Feld $\mathfrak{v}^*(O)$ überführen, ohne daß dabei jemals ein Vektor verschwindet; dies läßt sich auch so ausdrücken: Die durch die Vektoren von $\overline{\mathfrak{V}}$ vermittelte Abbildung des Randes S^{n-1} von K auf die Richtungskugel des n-dimensionalen Raumes läßt sich stetig zu einer Abbildung auf einen einzigen Punkt abändern.

Von der hiermit festgestellten Tatsache gilt folgende Umkehrung:

Hilfssatz II. *Läßt sich das Randfeld $\overline{\mathfrak{V}}$ stetig in ein Feld paralleler Vektoren überführen, ohne daß dabei einmal ein Vektor verschwindet, so kann man $\mathfrak{V}$ unter Festhaltung von $\overline{\mathfrak{V}}$ stetig in ein nirgends verschwindendes Vektorfeld abändern.*

Beweis. Es gelten die Bezeichnungen des Beweises zu Hilfssatz I. Das Feld $\overline{\mathfrak{V}}_1$ der $\mathfrak{v}(P_{r_1})$ läßt sich ebenfalls stetig in ein paralleles Feld überführen, ohne daß dabei einmal ein Vektor verschwindet, da es durch

$$\mathfrak{v}(P_{r_1}, t) = \mathfrak{v}(P_t), \qquad [r_1 \leqq t \leqq R]$$

in $\overline{\mathfrak{V}}$ übergeführt wird; mithin läßt es sich auch stetig in ein Feld *gleicher* Vektoren transformieren. Es gibt also eine nirgends in ihrem Definitionsgebiet verschwindende stetige Vektorfunktion

$$\mathfrak{w}(P_{r_1}, t) \quad \text{für} \quad r_1 \geqq t \geqq 0,$$

mit

$$\mathfrak{w}(P_{r_1}, r_1) = \mathfrak{v}(P_{r_1}), \qquad \mathfrak{w}(P_{r_1}, 0) = \mathfrak{w}_0,$$

wobei $\mathfrak{w}_0$ ein konstanter Vektor ist. Das durch

$$\mathfrak{v}'''(P) = \mathfrak{w}(P_{r_1}, r(P)) \quad \text{für} \quad r(P) \leqq r_1$$
$$\mathfrak{v}'''(P) = \mathfrak{v}(P) \qquad\qquad \text{für} \quad r(P) \geqq r_1$$

definierte Feld $\mathfrak{B}'''$ hat die beim Beweis des Hilfssatzes I genannten Eigenschaften von $\mathfrak{B}''$ mit dem Unterschied, daß es auch in O nicht verschwindet. Ersetzt man daher in diesem Beweis $\mathfrak{B}''$ durch $\mathfrak{B}'''$, so erhält man einen Beweis von Hilfssatz II.

§ 2.

Konzentration der Übereinstimmungspunkte zweier Abbildungen.

Die n-dimensionale, geschlossene, unberandete, zweiseitige Mannigfaltigkeit μ sei den eindeutigen und stetigen Abbildungen f_1 und f_2 auf die n-dimensionale Kugel S^n unterworfen. Unter einem Übereinstimmungspunkt von f_1 und f_2 verstehen wir einen Punkt P von μ, dessen durch f_1 und f_2 gelieferte Bilder $P_1 = f_1(P)$, $P_2 = f_2(P)$ zusammenfallen. — Es gilt der

Satz I. *Ist $n > 1$, so lassen sich f_1 und f_2 stetig in Abbildungen f_1^* und f_2^* abändern, die einen einzigen Übereinstimmungspunkt besitzen* [8]).

Beweis. f_1' sei eine in ganz μ erklärte simpliziale Abbildung [9]), die f_1 so gut approximiert, daß man f_1 stetig durch gleichförmige Bewegung der Bildpunkte auf Großkreisbögen in sie überführen kann, für die also der sphärische Abstand $f_1(P)f_1'(P)$ kleiner als π ist. Q sei ein Punkt von S^n, der nicht auf dem Rande eines Bildsimplex liegt, $A_1, \ldots, A_l$ seien die Punkte von μ, deren Bild er bei der Abbildung f_1' ist. Wir dürfen annehmen, daß $f_2(A_\lambda) \neq Q$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ ist, da wir dies, falls nötig, durch eine stetige Abänderung von f_2 erreichen können. f_2' sei eine f_2 so gut approximierende in ganz μ erklärte simpliziale Abbildung, daß man f_2 stetig in sie überführen kann, und daß auch $f_2'(A_\lambda) \neq Q$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ ist; f_2' sei ferner so gewählt, daß Q nicht auf dem Rande eines Bildsimplex liegt. $B_1, \ldots, B_m$ seien die Punkte, für die $f_2'(B_\nu) = Q$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ ist. $\mathfrak{K}^{n-1}$ sei eine $(n-1)$-dimensionale Kugel der sphärischen Maßbestimmung von S^n mit dem Mittelpunkt Q und so klein, daß 1. sie ganz im Innern aller den Punkt Q bei den Abbildungen f_1' und f_2' bedeckenden Bildsimplexe liegt, und daß 2. die die Punkte $A_1, \ldots, A_l$ bzw. $B_1, \ldots, B_m$ umgebenden Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$, deren Bild $\mathfrak{K}^{n-1}$ bei f_1' bzw. f_2' ist, untereinander punktfremd sind.

---

8) Für $n = 1$ gilt der Satz nicht; denn zwei Abbildungen der Grade g_1, g_2 einer Kreislinie auf eine andere haben stets mindestens $|g_1 - g_2|$ voneinander verschiedene Übereinstimmungspunkte.

9) In der in Fußnote 1) zitierten Abhandlung definiert Brouwer die simplizialen Approximationen f' der Abbildung f der Mannigfaltigkeit μ auf die Mannigfaltigkeit μ' nur in Teilen von μ; ist μ' jedoch die n-dimensionale Kugel, so läßt sich f' in ganz μ stetig definieren; s. § 2 meiner unter 5) zitierten Arbeit.

$a_1, \ldots, a_l$, $b_1, \ldots, b_m$ seien die von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$ begrenzten abgeschlossenen Umgebungen von $A_1, \ldots, B_m$ in μ. Wir ändern nun f_2' stetig so in eine Abbildung f_2'' ab, daß f_1' und f_2'' Übereinstimmungspunkte höchstens im Innern der $a_1, \ldots, a_l$, $b_1, \ldots, b_m$ haben, und daß die durch f_1' und f_2'' gelieferten Bilder dieser $l+m$ Elemente noch ein Gebiet von S^n unbedeckt lassen. Zu diesem Zweck nehmen wir mit S^n die stereographische Projektion s von Q aus auf den zu Q diametralen Tangentialraum T_Q vor. sf_1' und sf_2' bilden den abgeschlossenen Teil $\mu' = \mu - \left\{\sum_{\lambda=1}^{l}(a_\lambda - \mathfrak{A}_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{m}(b_\nu - \mathfrak{B}_\nu)\right\}$ derart auf das Innengebiet der Kugel $s(\mathfrak{K}^{n-1}) = \overline{\mathfrak{K}}$ und auf diese selbst ab, daß $sf_1'(\mathfrak{A}_\lambda) = sf_2'(\mathfrak{B}_\nu) = \overline{\mathfrak{K}}$ ist, während die Punkte von $sf_2'(\mathfrak{A}_\lambda)$, $sf_1'(\mathfrak{B}_\nu)$, sowie alle Punkte $sf_1'(P)$, $sf_2'(P)$, deren P auf keinem $\mathfrak{A}_\lambda$ oder $\mathfrak{B}_\nu$ liegen, dem Innern von $\overline{\mathfrak{K}}$ angehören. Daher ist das Maximum e der Entfernungen $sf_1'(P)\,sf_2'(P)$ für alle P von μ' kleiner als der Durchmesser d von $\overline{\mathfrak{K}}$. c bezeichne den Minimalabstand der Menge $\sum_{\lambda=1}^{l} sf_2'(a_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{m} sf_1'(b_\nu)$ von $\overline{\mathfrak{K}}$, h sei eine Zahl, die die Ungleichungen $e < h < d$, $h > d - c$ erfüllt. Ist nun t eine Translation in T_Q um die Strecke h, so hat die Abbildung $f_2'' = s^{-1} t s f_2'$ von μ auf S^n die obengenannten Eigenschaften: f_1' und f_2'' haben in μ' keinen Übereinstimmungspunkt; denn aus $f_1'(P) = f_2''(P) = s^{-1} t s f_2'(P)$ folgt $sf_1'(P) = tsf_2'(P)$, also muß der Abstand der Punkte $sf_1(P)$ und $sf_2'(P)$ gleich $h > e$ sein, was für einen Punkt P aus μ' unmöglich ist. Da ferner wegen $h < d$ die Innengebiete von $\overline{\mathfrak{K}}$ und $t(\overline{\mathfrak{K}})$ ein gemeinsames Gebiet γ' enthalten und dieses frei von Punkten der Mengen $sf_1'(a_\lambda)$ und $tsf_2'(b_\nu)$ sowie wegen $h > d - c$ frei von Punkten der Mengen $sf_1'(b_\nu)$ und $tsf_2'(a_\lambda)$ ist, ist das Gebiet $\gamma = s^{-1}(\gamma')$ in S^n frei von Punkten der Mengen $f_1'(a_\lambda)$, $f_2''(b_\nu)$, $f_1'(b_\nu)$, $f_2''(a_\lambda)$. Schließlich hat f_2'' auch die Eigenschaft, sich stetig aus f_2' erzeugen zu lassen, da dem die Translation t herbeiführenden Bewegungsvorgang in T_Q vermöge s^{-1} ein in ganz S^n stetiger Deformationsprozeß entspricht.

Jetzt schließen wir die a_λ und b_ν in ein einziges Element E ein, dessen Bilder $f_1'(E)$ und $f_2''(E)$ zusammen auch noch ein Stück von S^n unbedeckt lassen: wir ziehen $l+m-1$ einfache Streckenzüge $\sigma_1, \ldots, \sigma_{l+m-1}$ in μ derart, daß, wenn wir $b_\nu = a_{l+\nu}$, $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{A}_{l+\nu}$ $[\nu = 1, \ldots, m]$ setzen, σ_i seinen Anfangspunkt mit $\mathfrak{A}_i$, seinen Endpunkt mit $\mathfrak{A}_{i+1}$, im übrigen aber keinen Punkt mit einem a_i oder einem von ihm selbst verschiedenen σ_j gemeinsam hat; zur Definition der „Strecke" ist dabei etwa die f_1' bestimmende simpliziale Zerlegung von μ zugrunde zu legen. Sind $u_1, \ldots, u_{l+m-1}$ hinreichend kleine abgeschlossene Umgebungen der $\sigma_1, \ldots, \sigma_{l+m-1}$, so bilden die Vereinigungsmengen der a_i und u_i ein Element E. Die von f_1' und f_2'' gelieferten Bilder der σ_i sind stückweise analytische Kurven in S^n, da f_1', f_2', $s^{-1} t s f_2'$ stückweise analytische Abbildungen sind, und lassen mithin, da $n > 1$ ist, ein Teilgebiet γ_1 von $\gamma = s^{-1}(\gamma')$ frei[10]); dasselbe gilt daher, wenn wir nur die u_i hinreichend klein wählen, für E und ein Teilgebiet γ_2 von γ_1.

[Die Konstruktion des Elements E durch Bildung der $u_1, \ldots$ stößt auf keinerlei Schwierigkeit, weil die $\mathfrak{A}_i$ durch die affinen Abbildungen f_1' und f_2' in die Kugel $\mathfrak{K}^{n-1}$ übergehen, also analytische, konvexe Hyperflächen sind.]

Ist nun R ein Punkt von γ_2, p die stereographische Projektion der Kugel S^n von R aus auf den zu R diametralen ebenen Tangentialraum T_R, so sind $p f_1'$ und $p f_2''$ in ganz E stetige Abbildungen, die auf dem Rand von E keinen Übereinstimmungspunkt haben. Wir ordnen jedem Punkt P von E denjenigen Vektor $\mathfrak{v}(P)$ von T_R zu, dessen Anfangspunkt $p f_1'(P)$, dessen Endpunkt $p f_2''(P)$ ist. Dieses Vektorfeld können wir nach Hilfssatz I mittels einer Funktion $\mathfrak{v}(P, t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ stetig so abändern, daß $\mathfrak{v}(P, 0) = \mathfrak{v}(P)$ für *alle* P, $\mathfrak{v}(P, t) = \mathfrak{v}(P)$ für alle P *des Randes* von E ist, und daß von den Vektoren $\mathfrak{v}(P, 1)$ nur einer, $\mathfrak{v}(P_0, 1)$, verschwindet. Bezeichnen wir nun den Endpunkt des im Punkt $p f_1'(P)$ angetragenen Vektors $\mathfrak{v}(P, t)$ mit $p f_2''(P, t)$, und setzen wir $f_2''(P, t) = f_2''(P)$ für alle nicht zu E gehörigen P, so wird, während t von 0 bis 1 läuft, $f_2''(P) = f_2''(P, 0)$ stetig in die Abbildung $f'''(P) = f''(P, 1)$ übergeführt, die mit f_1' nur den einzigen Übereinstimmungspunkt P_0 hat. —

Damit ist Satz I bewiesen. Die Frage liegt nahe, wann sich auch der letzte Übereinstimmungspunkt beseitigen läßt. Eine hierfür notwendige Bedingung ist bekannt: lassen sich f_1 und f_2 stetig so abändern, daß sie keinen einzigen Übereinstimmungspunkt mehr haben, so läßt sich f_2 weiter durch Bewegung der Punkte $f_2(P)$ auf den von $f_1(P)$ nach $f_2(P)$ laufenden Großkreisen in die zu f_1 diametrale Abbildung überführen, und die beiden Abbildungsgrade unterscheiden sich daher um den Faktor $(-1)^{n+1}$ [11]). Im folgenden Paragraphen wird gezeigt werden, daß diese Tatsache umkehrbar die genannte notwendige Bedingung also auch hinreichend ist.

§ 3.

Stetige Überführung zweier Abbildungen gleichen Grades ineinander.

Die am Ende des vorigen Paragraphen erwähnte Umkehrung eines bekannten Satzes lautet folgendermaßen:

---

[10]) Dies ist die einzige Stelle im Beweis von Satz I, an der die Voraussetzung $n > 1$ benutzt wird.

[11]) „Satz von Poincaré-Bohl"; s. Hadamard, a. a. O. S. 467 f.

Satz IIa. *Sind f_1, f_2 zwei Abbildungen der n-dimensionalen, geschlossenen, unberandeten, zweiseitigen Mannigfaltigkeit μ auf die n-dimensionale Kugel S^n, sind g_1, g_2 die Abbildungsgrade von f_1 und f_2, und ist $g_2 = (-1)^{n+1} g_1$, so lassen sich f_1 und f_2 stetig in zwei Abbildungen f_1^*, f_2^* überführen, die keinen Übereinstimmungspunkt besitzen.*

Dieser Satz ist äquivalent mit dem folgenden:

Satz IIb. *Sind F_1, F_2 zwei Abbildungen gleichen Grades von μ auf S^n, so lassen sie sich stetig ineinander überführen.*

Um die Äquivalenz der beiden Sätze zu erkennen, nehme man zunächst Satz IIa als richtig an und betrachte zwei Abbildungen F_1, F_2, die die Voraussetzungen von IIb erfüllen. Bezeichnet $\overline{F}_2$ die zu F_2 diametrale Abbildung von μ auf S^n, so erfüllen $f_1 = F_1$, $f_2 = \overline{F}_2$ die Voraussetzungen von IIa, lassen sich also in zwei übereinstimmungsfreie und nach dem am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnten bekannten Verfahren sogar in zwei zueinander diametrale Abbildungen $f_1^*, f_2^* = \overline{f}_1^*$ stetig überführen. Bei diesem Prozeß werden $F_1 = f_1$ und $F_2 = \overline{f}_2$ beide in f_1^* übergeführt, so daß also die Behauptung IIb erfüllt ist. Wird andererseits IIb als bewiesen angenommen, und erfüllen f_1, f_2 die Voraussetzungen von IIa, so kann man $F_1 = f_1$, $F_2 = \overline{f}_2$ ineinander, d. h. f_1 und f_2 in zwei zueinander diametrale, also gewiß übereinstimmungsfreie Abbildungen überführen.

Den Beweis des Satzes IIa, b führen wir durch vollständige Induktion: er sei für die Dimensionenzahl $n-1$ bewiesen, und f_1, f_2 seien zwei Abbildungen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ mit den in IIa vorausgesetzten Eigenschaften. Gemäß Satz I führen wir sie stetig in zwei Abbildungen f_1^*, f_2^* mit einem einzigen Übereinstimmungspunkt P_0 über. Ist J_{12} der „Index der Übereinstimmung" [5]) von f_1^*, f_2^* in P_0, so folgt aus der Formel [5]) $J_{12} = (-1)^n g_1 + g_2$, da $g_2 = (-1)^{n+1} g_1$ ist, $J_{12} = 0$. Das bedeutet: vollzieht man von einem nicht mit $Q = f_1^*(P_0) = f_2^*(P_0)$ identischen Punkt R von S^n aus die stereographische Projektion p auf den zu R diametralen Tangentialraum T_R und ordnet jedem Punkt P des P_0 enthaltenden Elements E, das so klein sei, daß R weder von $f_1^*(E)$, noch von $f_2^*(E)$ bedeckt wird, denjenigen Vektor $\mathfrak{v}(P)$ von T_R zu, dessen Anfangspunkt $p f_1^*(P)$, dessen Endpunkt $p f_2^*(P)$ ist, so hat die durch die $\mathfrak{v}(P)$ vermittelte Abbildung des Randes $\mathfrak{E}$ von E auf die Richtungskugel S^{n-1} von T_R den Grad 0. Diese Abbildung läßt sich, da Satz IIb für die Dimensionenzahl $n-1$ als richtig betrachtet wird, stetig überführen, in eine Abbildung von $\mathfrak{E}$ auf einen einzigen Punkt der Richtungskugel. Dann läßt sich nach Hilfssatz II das Feld der $\mathfrak{v}(P)$ unter Festhaltung der Randvektoren stetig in ein nirgends verschwindendes Feld abändern.

Dieser Änderung lassen wir, ebenso wie im Beweis des Satzes I, eine stetige Änderung von f_2^* entsprechen, die f_2^* in allen Punkten von μ auf $\mathfrak{E}$ und außerhalb E ungeändert läßt. Ihr Ergebnis ist eine Abbildung f_2^{**}, die mit f_1^* in keinem Punkt übereinstimmt. Satz II gilt also auch für die Dimensionenzahl n.

Wir haben ihn nur noch für $n = 1$ zu beweisen. In diesem Fall sind μ und S^1 durch Kreise repräsentiert; α seien die Winkelkoordinaten von μ, β die von S^1, f eine Abbildung des Grades g von μ auf S^1, und es sei $f(0) = 0$; dann ist

$$f(\alpha + 2\pi \cdot m) = f(\alpha) + 2\pi m g,$$

und mittels der Funktion

$$f(\alpha, t) = (1 - t) \cdot f(\alpha) + t \cdot g\alpha,$$

die für jedes t μ eindeutig und stetig auf S^1 abbildet, wird f, während t von 0 bis 1 wächst, stetig in die „Normalform"

$$f^*(\alpha) = f(\alpha, 1) = g\alpha$$

transformiert. — Damit ist Satz IIa, b vollständig bewiesen.

§ 4.

Die Klassen der Abbildungen einer n-dimensionalen, geschlossenen, zweiseitigen Mannigfaltigkeit auf die n-dimensionale Kugel.

Nachdem so gezeigt ist, daß es bei gegebener Mannigfaltigkeit μ und gegebener Gradzahl g *höchstens* eine Klasse von Abbildungeu des Grades g von μ auf S^n gibt, ist zu untersuchen, ob diese Klasse auch wirklich stets existiert. Wir dürfen dabei, wie aus dem letzten Absatz des vorigen Paragraphen hervorgeht, den Fall $n = 1$ beiseite lassen.

Sei zunächst $\mu \equiv S^n$ und durch die Gleichung $\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu^2 = 1$ im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum definiert. Führen wir in dem ebenen n-dimensionalen Raum $x_{n+1} = 0$ „Zylinderkoordinaten" $r, \varphi, x_3, \ldots, x_n$ durch die Beziehungen $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ ein, so wird dieser Raum, wenn die ganze Zahl $g > 0$ ist, durch $r' = r$, $\varphi = g \cdot \varphi$, $x'_\nu = x_\nu$ $[\nu = 3, \ldots, n]$ derart auf sich abgebildet, daß jedes hinreichend kleine Gebiet, in dem $r > 0$ ist, von genau g punktfremden Gebieten positiv, von keinem Gebiet negativ überdeckt wird. Vermöge stereographischer Projektion vom Punkt $x_{n+1} = 1$, $x_\nu = 0$ $[\nu = 1, \ldots, n]$ aus entspricht dieser Abbildung eine Abbildung des Grades g von S^n auf sich. Da ferner durch $x'_\nu = x_\nu$ $[\nu = 1, \ldots, n]$, $x'_{n+1} = -x_{n+1}$ eine Abbildung des Grades -1 von S^n auf sich definiert und die Existenz von Abbildungen des Grades 0 trivial ist, gibt es Abbildungen von S^n auf sich mit jeder beliebigen Gradzahl.

Um nun dasselbe für die Abbildungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit μ auf S^n nachzuweisen, genügt, da bei Zusammensetzung zweier Abbildungen sich die Gradzahlen multiplizieren, die Herstellung einer Abbildung des Grades ± 1 von μ auf S^n. Wir konstruieren eine solche folgendermaßen: $P_1, \ldots, P_k$ seien die Eckpunkte einer simplizialen Zerlegung von μ, $P'_1, \ldots, P'_k$ irgendwelche k Punkte des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, von denen niemals $n+2$ einem n-dimensionalen ebenen Raum angehören; jedes Simplex mit Ecken $P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_{n+1}}$ der Zerlegung von μ bilden wir simplizial[1]) auf das entsprechende Simplex $P'_{m_1}, P'_{m_2}, \ldots, P'_{m_{n+1}}$ ab; auf diese Weise wird μ einer eindeutigen und stetigen Abbildung $P' = s(P)$ auf eine aus endlich vielen Simplexen des gewöhnlichen Raumes bestehende Punktmenge μ' unterzogen, und diese Abbildung ist im Innern der Simplexe eindeutig umkehrbar. Nun betrachten wir eine gerichtete Gerade des Raumes, die μ', aber keine der $(n-1)$-dimensionalen Schnitte zweier Simplexe von μ' trifft, und auf ihr einen Punkt B, der hinter dem ersten Schnittpunkt A, aber vor jedem weiteren Schnittpunkte mit μ' liegt. Wir projizieren μ' von B aus auf eine Kugel S^n um B; bezeichnen wir diese Projektion mit p, so wird μ durch die Abbildung $ps(P)$ auf S^n bezogen. Dabei wird eine Umgebung des Schnittpunktes des Strahls BA mit S^n einfach überdeckt, mithin hat die Abbildung ps den Grad ± 1. — Damit ist bewiesen:

Satz III. *Ist μ eine n-dimensionale, geschlossene, zweiseitige Mannigfaltigkeit und g eine beliebige ganze Zahl, so gibt es eine und nur eine Klasse von Abbildungen des Grades g von μ auf die n-dimensionale Kugel S^n $(n \geqq 1)$.*

§ 5.

Randwertaufgaben für Vektorverteilungen.

1. Ist im Innern und auf dem Rande des n-dimensionalen Elementes E^n im n-dimensionalen euklidischen Raum ein nirgends verschwindendes Vektorfeld $\mathfrak{V}$ gegeben, so hat die durch die Randvektoren von $\mathfrak{V}$ vermittelte Abbildung des Randes $\mathfrak{E}^{n-1}$ von E^n auf die Richtungskugel notwendig den Grad 0[6]). Aus Satz II ergibt sich die Umkehrung dieser Tatsache, d. h. die Lösbarkeit folgender „Randwertaufgabe“:

Auf dem Rande $\mathfrak{E}^{n-1}$ des n-dimensionalen Elementes E^n im n-dimensionalen euklidischen Raum ist eine nirgends verschwindende stetige Vektorverteilung $\overline{\mathfrak{V}}$ gegeben, die eine Abbildung des Grades 0 von $\mathfrak{E}^{n-1}$ auf die Richtungskugel vermittelt; man soll ein in ganz E^n stetiges und nirgends verschwindendes Vektorfeld $\mathfrak{V}$ mit den Randwerten $\overline{\mathfrak{V}}$ konstruieren.

Diese Aufgabe ist in der Tat stets lösbar: wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß E^n eine Vollkugel vom Radius 1 ist, da ein Element ja deren eineindeutiges stetiges Bild ist. Nach Satz II kann man $\overline{\mathfrak{V}}$ stetig in ein Feld paralleler, also auch in ein Feld gleicher Vektoren abändern, ohne daß während dieses Vorganges jemals ein Vektor verschwindet. Es gibt mithin eine für alle Punkte P von $\mathfrak{S}^{n-1}$ und $1 \geqq t \geqq 0$ erklärte stetige Funktion $\mathfrak{v}(P, t)$ mit

$$\mathfrak{v}(P, 1) = \bar{\mathfrak{v}}(P), \quad \mathfrak{v}(P, 0) = \mathfrak{v}_0,$$

wobei $\bar{\mathfrak{v}}(P)$ die Vektoren von $\overline{\mathfrak{V}}$, $\mathfrak{v}_0$ einen festen Vektor bezeichnet. Jetzt wird die Aufgabe durch $\mathfrak{v}(P_t) = \mathfrak{v}(P, t)$ gelöst, wenn P_t der auf dem zu P gehörenden Radiusvektor im Abstand t vom Mittelpunkt gelegene Punkt ist.

Bevor wir eine Verallgemeinerung der eben behandelten Aufgabe lösen, betrachten wir noch einige ähnliche, einfachere Aufgaben, zu deren Lösung keiner der im Vorstehenden bewiesenen Sätze benutzt wird.

2. Es sei $k < n$. Auf dem Rande $\mathfrak{S}^{k-1}$ des im n-dimensionalen euklidischen Raum liegenden k-dimensionalen Elementes E^k ist eine stetige, nirgends verschwindende, im übrigen ganz beliebige Vektorverteilung $\overline{\mathfrak{V}}$ gegeben. Man soll eine in ganz E^k stetige, nirgends verschwindende Vektorverteilung $\mathfrak{V}$ mit den Randwerten $\overline{\mathfrak{V}}$ konstruieren.

Die bei Behandlung der ersten Aufgabe benutzte Methode lehrt, daß es zur Lösung der jetzt gestellten Aufgabe genügt, die durch $\overline{\mathfrak{V}}$ vermittelte Abbildung f von $\mathfrak{S}^{k-1}$ auf die Richtungskugel S^{n-1} stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt überzuführen. Dies ist aber stets möglich; denn erstens kann man f stetig in eine f approximierende simpliziale Abbildung f' überführen, indem man die Punkte $f(P)$ gleichförmig auf den Großkreisbögen nach $f'(P)$ laufen läßt, falls nur der sphärische Abstand $f(P)f'(P) < \pi$ ist, und zweitens kann man, da die Abbildung f' stückweise analytisch ist und die Menge $f'(\mathfrak{S}^{k-1})$ daher wegen $k < n$ ein Gebiet von S^{n-1} frei läßt, die Punkte $f'(P)$ auf den Großkreisbögen, die von einem von $f'(\mathfrak{S}^{k-1})$ nicht bedeckten Punkt A ausgehen, gleichförmig in den Gegenpunkt $\bar{A}$ von A überführen.

3. W^n sei ein n-dimensionaler Quader, d. h. eine durch $|x_\nu| \leqq c_\nu$, $c_\nu > 0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ im n-dimensionalen euklidischen Raum definierte Punktmenge. $\mathfrak{R}_1$ sei ein „vollständiger" Teil des Randes $\mathfrak{R}$ von W^n, d. h. ein solcher Teil von $\mathfrak{R}$, daß, wenn ein innerer Punkt eines k-dimensionalen Randquaders W^k von W^n zu $\mathfrak{R}_1$ gehört, W^k ganz zu $\mathfrak{R}_1$ gehört $(0 \leqq k \leqq n-1)$. $\mathfrak{R}_1$ sei aber nicht der ganze Rand von W^n, es gebe also ein W^{n-1}, dessen innere Punkte nicht zu $\mathfrak{R}_1$ gehören. ($\mathfrak{R}_1$ braucht nicht zusammenhängend zu sein.) Auf $\mathfrak{R}_1$ ist eine stetige, nirgends verschwindende

Vektorverteilung $\overline{\mathfrak{V}}$ gegeben. Man soll in W^n eine stetige, nirgends verschwindende Vektorverteilung $\mathfrak{V}$ definieren, die in $\mathfrak{R}_1$ mit $\overline{\mathfrak{V}}$ übereinstimmt.

W_1^{n-1} sei ein nicht zu $\mathfrak{R}_1$ gehöriger $(n-1)$-dimensionaler Quader von $\mathfrak{R}$. Durch Anbringung willkürlicher Vektoren in etwa noch unbesetzten Ecken W^0 und durch sukzessive Lösung von Aufgaben des Typus 2 für die $W^1, W^2, \ldots$ läßt sich in allen Punkten von $\mathfrak{R}$, die nicht innere Punkte von W_1^{n-1} sind, eine stetige, nirgends verschwindende Vektorverteilung $\overline{\mathfrak{V}}'$ definieren, die in $\mathfrak{R}_1$ mit $\overline{\mathfrak{V}}$ übereinstimmt. Sei nun W_1^{n-1} etwa die durch $x_n = c_n$ definierte Seite von W^n. Dann wählen wir einen Punkt A mit den Koordinaten $x_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, $x_n = a > c_n$; jeder Punkt P von W^n wird von A aus in einen und nur einen Punkt $\overline{P}$ des mit Randvektoren $\bar{\mathfrak{v}}$ bereits versehenen Teils des Randes von W^n projiziert. Durch die Bestimmung $\mathfrak{v}(P) = \bar{\mathfrak{v}}(\overline{P})$ wird unsere Aufgabe gelöst.

(Die analoge Aufgabe für ein Simplex statt für einen Quader ist analog lösbar.)

4. Nunmehr können wir eine Verallgemeinerung der Aufgabe 1 lösen:

Auf dem Rande $\mathfrak{E}^{n-1}$ des n-dimensionalen Elements E^n im n-dimensionalen euklidischen Raum sei ein stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld $\overline{\mathfrak{V}}$ gegeben, das eine Abbildung des Grades a von $\mathfrak{E}^{n-1}$ auf die Richtungskugel vermittelt; ferner seien im Innern von E^n k Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_k$ $(k \geqq 0)$ gegeben und derart mit ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ versehen, daß $\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa = a$ ist. Man soll ein in ganz E^n stetiges Vektorfeld $\mathfrak{V}$ mit den Randwerten $\overline{\mathfrak{V}}$ konstruieren, das in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_k$ von den Ordnungen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, sonst aber nirgends, verschwindet. Dabei ist die Ordnung einer Nullstelle eines Vektorfeldes gleich dem Index der Singularität des zugehörigen Richtungsfeldes, d. h. gleich dem Grade der durch das Feld vermittelten Abbildung einer die Nullstelle umgebenden Kugel auf die Richtungskugel. $(n \geqq 1.)$

Wir denken uns E^n durch den „Würfel" $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ repräsentiert und zerlegen diesen durch $(n-1)$-dimensionale ebene, seinen Seiten parallele Räume derart in rechteckige Quader, daß kein $P_\varkappa$ auf dem Rand eines Quaders liegt, daß kein Quader $\overline{W}_\varkappa$, der einen der $P_\varkappa$ enthält, noch einen zweiten dieser Punkte $P_\varkappa$ enthält, daß kein derartiger $\overline{W}_\varkappa$ an den Rand von E^n stößt, und daß kein Quader der Zerlegung mit mehr als einem $\overline{W}_\varkappa$ einen Punkt gemeinsam hat.

Auf dem Rande jedes $\overline{W}_\varkappa$ bringen wir nun, was, da $n-1 \geqq 1$ ist, nach § 4 möglich ist, eine stetige, nirgends verschwindende Vektorverteilung $\overline{\mathfrak{V}}_\varkappa$ an, die ihn mit dem Grade $a_\varkappa$ auf die Richtungskugel abbildet; ist P ein Punkt des Innern von $\overline{W}_\varkappa$, P' der Schnittpunkt des Strahles $P_\varkappa P$ mit dem Rande von $\overline{W}_\varkappa$, so ordnen wir dem Punkt P denjenigen Vektor $\mathfrak{v}(P)$

zu, der parallel zu $\bar{\mathfrak{v}}(P')$ ist und dessen Länge sich zu der von $\bar{\mathfrak{v}}(P')$ verhält wie die Strecke $P_\varkappa P$ zu der Strecke $P_\varkappa P'$. Nachdem so die $\overline{W}_\varkappa$ in vorschriftsmäßiger Weise mit Vektoren versehen sind, haben wir in dem Rest von E^n ein nullstellenfreies Vektorfeld mit den richtigen Randwerten zu konstruieren.

Zu diesem Zweck bringen wir die Teilquader von E^n in eine bestimmte Reihenfolge. Die Zerlegung von E^n werde dadurch bewirkt, daß man jede der Strecken $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ in m_ν Strecken $s_1^\nu, s_2^\nu, \ldots, s_{m_\nu}^\nu$ zerlegt; dann sind die Quader eineindeutig bestimmt durch n Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die besagen, daß der betreffende Quader zu den Strecken $s_{\alpha_1}^1, s_{\alpha_2}^2, \ldots, s_{\alpha_n}^n$ gehört. Wir ordnen nun die Quader lexikographisch, d. h.: es sei $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) < (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, wenn es ein $j \geqq 1$ gibt, so daß $\alpha_j < \beta_j$, aber $\alpha_i = \beta_i$ für $i < j$ ist. Bei dieser Ordnung gibt es zu jedem Quader $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ außer zu dem letzten $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ mindestens einen, $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$, der die Bedingungen erfüllt: a) $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') > (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; b) $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ hat mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ eine $(n-1)$-dimensionale Seite gemeinsam; c) $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ ist keiner der $\overline{W}_\varkappa$. — In der Tat existiert ein solcher $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$; ist nämlich für kein ν $\alpha_\nu = m_\nu$, so erfüllen die Quader $(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ und $(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_n)$ beide die Bedingungen a) und b), und mindestens einer von ihnen außerdem c), da die Teilung so fein gewählt war, daß kein Quader an zwei verschiedene $\overline{W}_\varkappa$ stößt; ist andererseits für ein ν $\alpha_\nu = m_\nu$, so gibt es wegen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ einen Index μ, für den $\alpha_\mu < m_\mu$ ist, und der Quader $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ $= (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_\mu + 1, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_n)$ erfüllt außer a) und b) auch c), da kein $\overline{W}_\varkappa$ an den Rand stößt und dieses $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ den Index m_ν enthält, also ein Randquader ist.

Sind nun die r ersten der so geordneten Quader derart stetig mit außer in den $P_\varkappa$ nicht verschwindenden Vektoren versehen, daß diese auf dem Rande von E^n und in den $\overline{W}_\varkappa$ mit den dort bereits angebrachten Vektoren übereinstimmen, und ist der nächste, noch nicht mit Vektoren versehene Quader noch nicht der letzte in unserer Ordnung, so können wir auch in ihm in vorschriftsmäßiger Weise Vektoren definieren, die sich stetig an die bereits vorhandenen anschließen; denn infolge der Eigenschaften a), b), c) besitzt er eine noch nicht mit Vektoren belegte $(n-1)$-dimensionale Seite. Die Bestimmung der Vektoren in ihm führt also auf Aufgabe 3, welche wir lösen können. So sind schließlich in allen Quadern, außer in dem letzten, W^*, sowie auf dem Rande $\mathfrak{R}^*$ von W^* die Vektoren definiert. Wie groß ist nun der Grad der durch die auf $\mathfrak{R}^*$ angebrachten Vektoren vermittelten Abbildung von $\mathfrak{R}^*$ auf die Richtungskugel? Um ihn zu bestimmen, addieren wir die Grade der Abbildungen auf die Richtungskugel der Ränder aller Teilquader: Jeder $\overline{W}_\varkappa$ liefert den Beitrag $a_\varkappa$, W^* den Beitrag x, jeder andere Quader den Beitrag 0, da in ihm die Vektoren nirgends verschwinden; die Summe ist also $x + \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa = x + a$; andererseits ist diese Summe gleich dem Grade der Abbildung des Randes der Summe aller Quader, also des Randes von E^n; dieser Grad ist a, d. h. es ist $x = 0$. Mithin läßt sich die Vektorverteilung wegen der Lösbarkeit der Aufgabe 1 auch in W^* nullstellenfrei fortsetzen, und damit ist Aufgabe 4 gelöst.

Zusatz. Bei der Definition der Felder $\overline{\mathfrak{V}}_\varkappa$ in den $\overline{W}_\varkappa$ können wir in weitgehendem Maße willkürlich verfahren, wir haben nur den in $P_\varkappa$ vorgeschriebenen Index zu berücksichtigen. So können wir z. B. ohne weiteres erreichen, daß in $\overline{W}_\varkappa$ die Vektorkomponenten analytische Funktionen der Koordinaten sind. Diese Bemerkung kann mitunter nützlich sein, da es oft angenehm ist, Vektorfelder betrachten zu können, die sich in der Umgebung ihrer Singularitäten möglichst unkompliziert verhalten [12]).

5. Wir verallgemeinern Aufgabe 4 weiter:

M^n sei eine n-dimensionale ($n \geqq 2$), von r $(n-1)$-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten $M_1^{n-1}, \ldots, M_r^{n-1}$ berandete Teilmannigfaltigkeit des n-dimensionalen euklidischen Raumes, $P_1, \ldots, P_k$ seien Punkte im Innern von M^n, $a_1, \ldots, a_k$ ganze Zahlen. Auf den M_ϱ^{n-1} sind stetige, nirgends verschwindende Vektorverteilungen $\overline{\mathfrak{V}}_\varrho$ definiert; $b_1, \ldots, b_r$ seien die Grade der durch sie vermittelten Abbildungen auf die Richtungskugel, wobei die Indikatrizen der M_ϱ^{n-1} als „Randindikatrizen" von M^n bestimmt sind, und es sei $\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho$. Man soll in M^n eine stetige Vektorverteilung $\mathfrak{V}$ mit den Randwerten $\overline{\mathfrak{V}}_\varrho$ konstruieren, die in den $P_\varkappa$, und nur dort, verschwindet, und zwar von den Ordnungen $a_\varkappa$.

Man nehme eine simpliziale Zerlegung von M^n in Simplexe T_λ^n vor, definiere in den nicht auf den M_ϱ^{n-1} liegenden Eckpunkten dieser Zerlegungen willkürliche Vektoren und versehe durch sukzessives Lösen von Aufgaben des Typus 2 alle $(n-1)$-dimensionalen Seiten der Simplexe stetig mit nicht verschwindenden Vektoren, die auf dem M_ϱ^{n-1} mit denen der $\overline{\mathfrak{V}}_\varrho$ übereinstimmen. Dann wähle man im Innern jedes Simplexes T_λ^n einen Punkt C_λ und definiere in T_λ^n ein in C_λ und nur dort verschwindendes Vektorfeld nach dem in Aufgabe 4 bei der Behandlung der Quader $\overline{W}_\varkappa$ angewandten Verfahren. Nun konstruiere man ein ganz im Innern von M^n liegendes, die endlich vielen Punkte C_λ und $P_\varkappa$ im Innern enthaltendes

[12]) Siehe z. B. § 4 der nachstehenden Arbeit: Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Element E^n (etwa als Umgebungsmenge eines alle $P_\varkappa$ und C_λ verbindenden Streckenzuges; vgl. § 2). c sei der Grad der durch die bisher angebrachten Vektoren vermittelten Abbildung des Randes $\mathfrak{E}^{n-1}$ von E^n auf die Richtungskugel, falls man die Indikatrix von $\mathfrak{E}^{n-1}$ als Randindikatrix von E^n bestimmt; er sei also $-c$, falls man diese Indikatrix als Randindikatrix der Mannigfaltigkeit M_1^n bestimmt, welche aus M^n durch Fortlassen des Innern von E^n entsteht; dann ist, da das Vektorfeld in M_1^n keine Nullstelle hat, $\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho - c = 0$, $c = \sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa$. Daher kann man Aufgabe 4 für E^n so lösen, daß man die bisher im Innern von E^n angebrachten Vektoren durch solche mit den vorgeschriebenen Nullstellen und den bereits vorhandenen Randvektoren ersetzt, womit Aufgabe 5 gelöst ist.

§ 6.

Vereinfachter Beweis des Satzes aus § 3 für gewisse Spezialfälle.

Mit Hilfe der bei Behandlung der Randwertaufgaben im vorigen Paragraphen angewandten Methoden kann man den in den §§ 1 und 2 vorbereiteten, in § 3 zu Ende geführten Beweis des Satzes, daß zwei Abbildungen der n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit μ auf die Kugel S^n sich stetig ineinander überführen lassen, wenn ihre Grade übereinstimmen, durch Zurückführung auf einen leichter zu beweisenden Spezialfall elementarer gestalten, falls man die Gesamtheit der betrachteten Mannigfaltigkeiten μ einschränkt. Die Einschränkung, der μ unterworfen werden muß, besteht darin, daß sich μ durch eine Jordansche, überall stetig differenzierbare Hyperfläche im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum repräsentieren läßt, — eine Einschränkung, durch die, wie ich früher gezeigt habe[13]), gewisse Mannigfaltigkeiten von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Die Vereinfachung des Beweises besteht, wie man sehen wird, darin, daß 1. die in § 2 vorgenommene Konzentration der Übereinstimmungspunkte zweier Abbildungen, und 2. die Verwendung der Formel $J_{12} = (-1)^n g_1 + g_2$ in § 3 fortfällt. Da fast alle Schritte des vereinfachten Beweises im Vorstehenden schon vorgekommen sind, sei eine kurze Darstellung unter Berufung auf früher ausführlich behandelte Schlüsse gestattet:

μ lasse sich in der oben genannten Weise durch die Hyperfläche μ_1 repräsentieren. Es soll zunächst gezeigt werden, daß der Beweis geführt ist, falls man Aufgabe 1 (§ 5) lösen kann. μ_2 sei eine Parallelfläche von μ_1, die durch Abtragen einer hinreichend kleinen Strecke a auf den inneren Normalen von μ_1 entsteht, M^{n+1} die von μ_1 und μ_2 begrenzte

[13]) §§ 4, 5 der unter [5]) zitierten Arbeit.

Mannigfaltigkeit. Sind f_1, f_2 zwei Abbildungen des Grades g von μ auf S^n, so bringe man auf μ_1, μ_2 die stetigen, nirgends verschwindenden, die Abbildungen f_1, f_2 von μ_1, μ_2 auf die Richtungskugel vermittelnden Vektorfelder $\overline{\mathfrak{V}}_1, \overline{\mathfrak{V}}_2$ an. Die Grade dieser Abbildungen sind, wenn man μ_1 und μ_2 als Berandungen von M^{n+1} orientiert, g und $-g$. Wenn Aufgabe 1 lösbar ist, läßt sich daher, wie die Behandlung von Aufgabe 5 (übrigens ohne Behandlung von 4) zeigt, in M^{n+1} ein stetiges, nirgends verschwindendes Vektorfeld $\mathfrak{V}$ mit den Randfeldern $\overline{\mathfrak{V}}_1, \overline{\mathfrak{V}}_2$ definieren. Bezeichnet nun P_t den im Abstand t von dem Punkt P von μ_1 auf der inneren Normalen dieses Punktes liegenden Punkt, und $\mathfrak{v}(P_t)$ den zugehörigen Vektor von $\mathfrak{V}$, so wird durch $\mathfrak{v}(P, t) = \mathfrak{v}(P_t)$, während t von 0 bis a läuft, $\overline{\mathfrak{V}}_1$ in $\overline{\mathfrak{V}}_2$, also f_1 in f_2 stetig übergeführt.

Damit ist der Beweis von Satz II für die jetzt betrachteten μ zurückgeführt auf die Lösbarkeit von Aufgabe 1, also auf denjenigen seiner Spezialfälle, in dem die abgebildete Mannigfaltigkeit selbst die Kugel, der den beiden Abbildungen gemeinsame Grad 0 ist. Beweisen wir Satz II nun für Abbildungen des Grades 0 *beliebiger* Mannigfaltigkeiten, so haben wir ihn für eine Gesamtheit von Sonderfällen bewiesen, in denen der am Anfang dieses Paragraphen genannte, auf Beschränkung auf gewisse μ beruhende, enthalten ist.

f sei also eine Abbildung des Grades 0 der Mannigfaltigkeit μ auf die Kugel S^n. Wir zeigen, daß man f stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt A überführen kann, indem wir diese Behauptung für die Dimensionenzahl $n-1$ als bewiesen annehmen: Wir führen f stetig in eine simpliziale Approximation f' über; bei ihr seien $C_1, \ldots, C_m$ die Punkte von μ, deren Bild der Diametralpunkt $\bar{A}$ von A ist. Wir umgeben nun die $C_1, \ldots, C_m$ mit einem Element E, dessen Bild $f'(E)$ einen Punkt R von S^n nicht bedeckt, vollziehen die stereographische Projektion p von R aus auf T_R (vgl. §§ 2, 3) und ordnen jedem Punkt P von E den Vektor mit dem Anfangspunkt $p(\bar{A})$, mit dem Endpunkt $pf'(P)$ zu. Aus der Definition des Abbildungsgrades — ohne Benutzung der früher an der analogen Stelle benutzten Formel $J_{12} = (-1)^n g_1 + g_2$ — folgt, daß die durch diese Vektoren vermittelte Abbildung des Randes von E auf die Richtungskugel von T_R den Grad 0 hat; auf Grund von Hilfssatz II kann man daher (vgl. § 3), da der zu beweisende Satz für $n-1$ gelten soll, f' stetig in eine Abbildung f'' abändern, bei der $\bar{A}$ nicht Bildpunkt ist, und f'' läßt sich nun (s. § 2, letzter Absatz) stetig in die Abbildung auf den zu $\bar{A}$ diametralen Punkt A überführen.

(Eingegangen am 11. 8. 1925.)