Grundzüge einer Theorie der Kurven.

Von

Karl Menger in Wien.

Seite

§ 1.

Über den Begriff der Kurve.

Wir bezeichnen mit dem Wort „Kurve“ so zahlreiche interessante geometrische Gebilde, daß wir erwarten dürfen, aus einer zweckmäßigen begrifflichen Präzisierung unserer Kurvenvorstellung eine ausgedehnte Theorie herleiten zu können. Die älteren Kurvendefinitionen wurden freilich, wie sich herausstellte, den Forderungen der Anschauung nur in geringem Maße gerecht: Sowohl die Jordanschen Kurven (die eindeutigen stetigen Bilder der Strecke), als auch die irreduziblen Kontinua können bekanntlich ganze Flächenstücke enthalten, — zu den einfachen Kurvenbögen (den topologischen Bildern der Strecke) gehört anderseits schon eine so einfache Kurve, wie die Kreislinie, nicht, — und die Cantorsche Definition der ebenen Kurven als nirgends dichte Kontinua ist auf andere Euklidische Räume prinzipiell unübertragbar. Es ist angesichts der Schwierigkeiten, welche insbesondere das Ausgehen vom Abbildungsbegriff mit sich bringt, nicht verwunderlich, wenn Hausdorff[1]) geradezu leugnet,

[1]) Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 369.

daß sich unsere heterogenen Kurvenvorstellungen unter einen vernünftigen Sammelbegriff überhaupt bringen lassen.

Fragen wir uns allerdings ganz unvoreingenommen nach dem anschaulichen Wesen der Kurven, so ist die Abbildbarkeit dieser Gebilde auf gewisse andere keineswegs deren wichtigstes Kennzeichen. Um ein solches zu erhalten, vergleichen wir vielmehr eine Kurve mit einer Fläche und einem Körper. Die Kurve denken wir uns durch feine Drähte repräsentiert, die Fläche aus dünnem Blech hergestellt, den Körper aus Holz. Da sehen wir: Um einen Punkt der Fläche samt allen Punkten seiner Nachbarschaft aus der Fläche zu entfernen oder von der übrigen Fläche zu trennen, müssen wir die Fläche mit einer Schere längs kontinuierlicher Linien schneiden. Um aus dem Körper einen Punkt nebst Nachbarschaft herauszuholen, müssen wir ganze Flächen durchsägen. Um dagegen einen Punkt der Kurve, sie mag noch so verästelt und verwickelt sein, samt seiner Nachbarschaft aus der Kurve zu entfernen, genügt es, wenn wir die Kurve mit einer Zange in diskreten Punkten durchzwicken. Diese Tatsache, die von der speziellen Gestalt der betrachteten Fläche und Kurve unabhängig ist, gestattet eine strenge begriffliche Präzisierung:

Ein Kontinuum K heißt Kurve, wenn zu jedem Punkt von K beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen keine Kontinua enthalten. Ein Kontinuum K, welches in einen Raum eingebettet ist, heißt Kurve, wenn zu jedem Punkt von K beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen keine Kontinua mit K gemein haben. Dabei bezeichnen wir in üblicher Weise als Kontinuum eine mehr als einen Punkt enthaltende abgeschlossene Menge, die sich nicht spalten läßt in zwei fremde abgeschlossene Teile, es sei denn, daß einer von beiden leer ist.

Daß durch diese Definition tatsächlich das anschauliche Wesen unserer Kurvenvorstellung erfaßt wird, verbürgt eine allgemeine Theorie der *Dimension* von Punktmengen[2]). Mit ihr ist die angeführte Kurvendefinition verbunden durch den Satz: In Euklidischen (und noch all-

[2]) Vgl. meine Arbeiten über die Dimension von Punktmengen in den Monatsheften f. Math. u. Phys. 1 (1923), S. 148; II (1924), S. 137 (im folgenden zitiert als I und II); ferner Proc. Ac. Amst. 27 (1924), sowie die daselbst zitierten Arbeiten von L. E. J. Brouwer und P. Urysohn. — Eine Menge M heißt dieser Theorie zufolge *höchstens n-dimensional* in jenen Punkten, für welche beliebig kleine Umgebungen mit höchstens $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen existieren, wobei von der leeren Menge als der (-1)-dimensionalen ausgegangen wird. Diese Definition ordnet jeder Menge eines Euklidischen Raumes eine Dimension zu (im R_n gerade den Mengen, die einen offenen Teil enthalten, die Dimension n), und steht nebst allen ihren Folgerungen mit unserer Anschauung in Einklang. Bis in die kombinatorische Topologie hinein läßt sich der Gedanke verfolgen, daß das Wesentliche eines n-dimensionalen Elementes darin besteht, daß es von $(n-1)$-dimensionalen Elementen begrenzt wird.

gemeineren) Räumen sind die Kurven identisch mit den eindimensionalen Kontinua. Dabei nennen wir eine nicht leere Menge M *nulldimensional* (oder auch total zusammenhangslos), wenn zu jedem Punkt von M beliebig kleine Umgebungen mit leeren (bzw. wenn M in einen Raum eingebettet ist, mit zu M fremden) Begrenzungen existieren; — und wir nennen eine nicht leere und nicht nulldimensionale Menge M *eindimensional*, wenn zu jedem Punkt von M beliebig kleine Umgebungen existieren, deren Begrenzungen nulldimensional sind (bzw. wenn M in einen Raum eingebettet ist, mit M nulldimensionale Durchschnitte haben).

Die topologischen Bilder der Kurven sind stets eindimensional, also, wenn sie abgeschlossen sind, Kurven[3]). Das Intervall des R_1 und folglich jeder einfache Kurvenbogen ist eine Kurve; auch die Summe abzählbar vieler kompakter Kurven ist eindimensional[4]). Dagegen ist eine Quadratfläche und überhaupt jede Menge, die in einem nicht linearen Euklidischen Raum (in einem R_n, $n \geqq 2$) einen offenen Teil enthält, keine Kurve[5]). In einem R_n, $n \geqq 3$, ist das Komplement einer Kurve zusammenhängend[6]). In der Ebene sind die Kurven identisch mit den nirgends dichten Kontinua, also mit den Kurven im Cantorschen Sinn[7]).

Daß wir durch unsere Kurvendefinition mit der Anschauung in Konflikt geraten, haben wir also nicht zu befürchten; wir wollen daher im folgenden die Struktur der Kurven näher untersuchen.

§ 2.

Über die Ordnung der Kurvenpunkte.

Wenn zu einem Punkt p des Raumes beliebig kleine Umgebungen mit endlichen Begrenzungen existieren, dann heiße p ein *regulärer* Punkt. Wenn zum Punkt p insbesondere eine endliche Zahl n existiert, so daß es beliebig kleine Umgebungen gibt, deren Begrenzungen eine Mächtigkeit $\leqq n$ haben, dann sagen wir, p sei ein Punkt von einer Ordnung $\leqq n$. Von der *Ordnung* n heißt demnach ein Punkt p, wenn n die kleinste natürliche Zahl ist von der Eigenschaft: Es existieren beliebig kleine Umgebungen von p, deren Begrenzungen die Mächtigkeit n haben. Die regulären Punkte, welche von keiner bestimmten endlichen Ordnung sind, — d. h. also jene Punkte, zu denen zwar beliebig kleine Umgebungen mit endlichen Begrenzungen existieren, bei denen aber die Mächtigkeit dieser Umgebungsbegrenzungen notwendig über jede vorgegebene endliche Zahl wächst, wenn

---

[3]) I, S. 149, vgl. auch Satz I der vorliegenden Arbeit.

[4]) II, S. 147.

[5]) I, S. 152; II, S. 153.

[6]) II, S. 156.

[7]) I, S. 156

die Umgebungen hinlänglich klein werden, — nennen wir von *wachsender* Ordnung oder von der Ordnung w. Die nichtregulären Punkte eines separablen vollständigen Raumes zerfallen in solche von der *Ordnung* $\aleph_0$, d. s. die Punkte, zu denen beliebig kleine Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen existieren, — und in Punkte von kontinuierlicher Ordnung oder von der *Ordnung* c, d. s. jene Punkte, für welche die Begrenzungen aller hinlänglich kleinen Umgebungen unabzählbar, also von der Mächtigkeit des Kontinuums sind.

Einige einfache Beispiele werden diesen Ordnungsbegriff erläutern:

B₁. Ein Punkt erster Ordnung ist der Endpunkt eines Intervalls im R_1.

B₂. Ein Punkt zweiter Ordnung ist ein innerer Punkt des Intervalls des R_1.

B₃. Ein Punkt vierter Ordnung ist der Kreuzungspunkt einer sich durchsetzenden Lemniskate.

B₄. Einen Punkt von wachsender Ordnung besitzt im Nullpunkt die Kurve des R_2, welche in Polarkoordinaten ausgedrückt folgende Strecken enthält:

$$\varphi = \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leqq r \leqq \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}),$$

B₅. Die Kurve des R_2: $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{n}, & 0 \leqq r \leqq 1 \quad (n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}) \\ \varphi = 0, & 0 \leqq r \leqq 1 \end{cases}$

ist von der Ordnung $\aleph_0$ in allen Punkten der Strecke $\varphi = 0$, $0 \leqq r \leqq 1$.

B₆. Verbinden wir im R_2 mit rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten die Punkte einer im Einheitsintervall der X-Achse perfekten nirgends dichten Menge durch Strecken mit dem Punkt $(0, 1)$ der Y-Achse, dann erhalten wir eine Kurve, deren sämtliche Punkte von kontinuierlicher Ordnung sind.

B₇ möge einem naheliegenden Mißverständnis vorbeugen. Durch die Kurvendefinition wird für jeden Punkt einer Kurve gefordert, daß für ihn beliebig kleine Umgebungen mit diskontinuierlichen Begrenzungen existieren; nicht verlangt ist, daß die Begrenzungen *aller* hinlänglich kleinen Umgebungen diskontinuierlich sind. Betrachten wir z. B. die Kurve des R_2 bestehend aus der Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$, und den Kreisen um den Nullpunkt mit den Radien $r = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$ und $r = \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_2}}$, $(n_1, n_2 = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$. Der Nullpunkt O ist ein Punkt zweiter Ordnung dieser Kurve; dennoch existieren beliebig kleine Umgebungen von O, deren Begrenzungen Kontinua sind, nämlich die Kreisumgebungen

$$U\left(0; \frac{1}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}$$

Wir erkennen, daß die Definitionen des Kurvenpunktes und der verschiedenen Ordnungen von Punkten unter dasselbe Schema fallen, wenn wir allgemein als *E-Punkt* einen Punkt bezeichnen, zu dem beliebig kleine Umgebungen einer gewissen Eigenschaft E existieren [8]). Die Kurvenpunkte sind jene Punkte, zu welchen beliebig kleine Umgebungen mit Begrenzungen ohne Teilkontinuum existieren; es sind also die E-Punkte, wenn als Eigenschaft E der Umgebungen bezeichnet wird: Diskontinuität der Umgebungsbegrenzung. Wir erhalten als E-Punkte die regulären Punkte, wenn wir unter der Eigenschaft E Endlichkeit der Umgebungsbegrenzung verstehen; die Punkte von einer Ordnung $\leqq \aleph_0$ bzw. $\leqq n$, wenn E bedeutet: Mächtigkeit der Umgebungsbegrenzung $\leqq \aleph_0$ bzw. $\leqq n$.

Die Tatsache, daß zu einem Punkt p beliebig kleine Umgebungen einer bestimmten Eigenschaft E existieren, können wir auch in der Form aussprechen: Es existiert eine auf p sich zusammenziehende Folge von Umgebungen mit der Eigenschaft E, d. h. eine Folge von E-Umgebungen des Punktes p, von der in jeder vorgegebenen Umgebung $U(p)$ fast alle Glieder enthalten sind [9]). Da nun durch topologische Abbildungen Umgebungsfolgen, die sich auf einen Punkt zusammenziehen, übergeführt werden in Umgebungsfolgen, die sich auf den Bildpunkt zusammenziehen, so ergibt sich:

Satz I. *Wenn das topologische Bild jeder Umgebung mit der Eigenschaft E auch selbst die Eigenschaft E besitzt, dann ist das topologische Bild jedes E-Punktes ein E-Punkt.*

Nennen wir Umgebung mit der Eigenschaft E jede Umgebung mit

---

[8]) *Die Bedeutung dieser Definition beruht auf der (bisher allerdings wenig beachteten) Tatsache, daß wichtige Struktureigenschaften der Mengen ihren Ausdruck finden im Verhältnis der Mengen zu gewissen Umgebungsfolgen, welche sich auf die einzelnen Punkte zusammenziehen, und speziell zu den Begrenzungen dieser Umgebungen.* Zu diesen Eigenschaften gehört insbesondere die *Dimension* von Punktmengen, wie sie in den sub [2]) zitierten Arbeiten definiert wird. Dieselbe fällt gleichfalls unter das obige Schema, so daß einige der im folgenden bewiesenen allgemeinen Sätze der abstrakte Kern auch von dimensionstheoretischen Sätzen sind. Wir erhalten nämlich die Punkte, in denen der Raum eine Dimension $\leqq n$ hat, als E-Punkte, wenn wir unter der Eigenschaft E der Umgebungen verstehen: Dimension $\leqq n-1$ der Umgebungsbegrenzung. In einer Flächen- und Körpertheorie werden wir ferner auf ein *höherdimensionales Analogon der Ordnung* im oben definierten Sinn stoßen, welches gleichfalls unter das allgemeine Schema fällt. — Schließlich könnte eine Theorie von Verzweigungen aufgebaut werden, indem man zur Definition der *Verzweigungsordnungen* die Umgebungsbegrenzungen nicht nach ihren Mächtigkeiten (wie bei der obigen Definition der Ordnung), sondern nach den Mächtigkeiten der Mengen ihrer Komponenten einteilt.

[9]) In der Hausdorffschen Terminologie ist dann das System der Umgebungen von p mit einem System von Umgebungen der Eigenschaft E gleichwertig.

diskontinuierlicher Begrenzung, dann ergibt Satz I die topologische Invarianz der Kurvenpunkte. Verstehen wir unter der Eigenschaft E der Umgebung, daß deren Begrenzung a) eine Mächtigkeit $\leqq n$ hat, b) endlich ist, c) höchstens abzählbar ist, dann ergibt sich, da durch topologische Abbildung jede dieser drei Eigenschaften erhalten bleibt, der Satz: Durch topologische Abbildung des Raumes kann die Ordnung keines Punktes erhöht werden. Da die inverse Abbildung einer topologischen Abbildung topologisch ist, kann bei topologischer Abbildung des Raumes die Ordnung eines Punktes auch nicht erniedrigt werden. Wir haben also:

Satz II. *Die Ordnung eines Punktes ist eine topologische Invariante.*

Wir wenden uns nun wieder allgemeinen E-Punkten zu und beweisen über deren Verteilung im Raum:

Satz III. *Die Menge aller E-Punkte des Raumes ist ein G_δ.*

Dabei nennen wir G_δ das Produkt abzählbar vieler offener Mengen, F_σ die Summe abzählbar vieler abgeschlossener Mengen. — Sei nun R_k die Menge aller Punkte p des Raumes mit folgender Eigenschaft: Es existiert von p eine Umgebung mit der Eigenschaft E, deren Durchmesser $< \frac{1}{k}$ ist. Die Menge R_k ist für jedes k offen. Die Menge $M = \prod_{k=1}^{\infty} R_k$ ist also ein G_δ; anderseits ist sie identisch mit der Menge aller E-Punkte. Denn, sei erstens p ein E-Punkt, dann existieren von p beliebig kleine Umgebungen mit der Eigenschaft E; also liegt p in jeder der Mengen R_k und folglich auch in M. Ist zweitens p Punkt von M, dann existieren von p beliebig kleine Umgebungen mit der Eigenschaft E, also ist p ein E-Punkt. Damit ist Satz III bewiesen.

Satz III ist der abstrakte Kern u. a. des Satzes, daß die Menge aller Punkte, in denen der Raum höchstens n-dimensional ist, einen G_δ bildet. Für die Kurventheorie ergibt sich aus ihm:

Satz IV. *Die Menge aller Punkte von einer Ordnung $\leqq \alpha$ der Kurve K, wo α eine natürliche Zahl, w oder $\aleph_0$ bedeutet, ist ein G_δ. Bezeichnet K^α die Menge aller Kurvenpunkte, deren Ordnung genau α ist, so gilt das Schema:*

$$\begin{array}{ccccccc}
K^1, & K^2, & K^3, & \ldots, & K^w, & K^{\aleph_0}, & K^c \\
 & & & & . & . & . \\
G_\delta & P & . & & . & . & . \\
 & G_\delta & P & & . & . & . \\
 & & G_\delta & & . & . & . \\
 & & & \ldots & . & . & . \\
 & & G_{\delta\sigma} & & F_{\sigma\delta} & . & . \\
 & & & G_\delta & & P & . \\
 & & & G_\delta & & & F_\sigma
\end{array}$$

Dabei bezeichnen wir mit P eine Menge, die zugleich $G_{\delta\varrho}$ und $F_{\sigma\varrho}$ ist

Der erste Teil von Satz IV ist eine Folge von Satz III. Ferner sieht man: Für jedes natürliche n ist sowohl $\sum_{\alpha=1}^{n-1} K^{\alpha}$, als auch $\sum_{\alpha=1}^{n} K^{\alpha}$ ein G_δ, also K^n ein $G_{\delta\varrho}$, d. h. Differenz zweier Mengen G_δ. Ferner ist sowohl $K - \sum_{\alpha=1}^{n-1} K^{\alpha}$, als auch $K - \sum_{\alpha=1}^{n} K^{\alpha}$ ein F_σ, also K^n auch ein $F_{\sigma\varrho}$, d. h. Differenz zweier Mengen F_σ. Jedes K^n ist also eine Menge P. Die Menge aller Punkte von irgendeiner endlichen Ordnung ist ein $G_{\delta\sigma}$, d. h. Summe abzählbar vieler Mengen G_δ (nämlich der Mengen K^n). Folglich ist K^w Komplement eines $G_{\delta\sigma}$ zu einem G_δ, also ein $F_{\sigma\delta}$, d. h. Produkt abzählbar vieler F_σ. $K^{\aleph_0}$ ist wieder eine Menge P. Damit ist Satz IV bewiesen.

§ 3.

Über die Endpunkte der Kurven.

Wir untersuchen nun näher den G_δ K^1 der Kurvenpunkte erster Ordnung oder, wie wir auch sagen wollen, der Endpunkte von K, eine Bezeichnungsweise, die sich durch das Beispiel B_1 rechtfertigt. Dabei legen wir die betrachtete Kurve als Raum zugrunde. Es gilt diesbezüglich der fundamentale

Satz V. *In jeder total vollständigen Kurve, d. h. in jeder Kurve, deren sämtliche beschränkte Teile kompakt sind, liegen die Punkte von höherer als erster Ordnung dicht und bilden einen kondensierten, in jedem Punkt der Kurve eindimensionalen F_σ, der in jedem nicht leeren, offenen Teile der Kurve Kontinua enthält. Die Menge der Endpunkte ist entweder leer oder nulldimensional.*

Wir bezeichnen die Menge aller Punkte von höherer als erster Ordnung der Kurve K mit ${}^1K$ und leiten zunächst einen Widerspruch her aus der Annahme, daß ${}^1K$ im Punkt p von K nicht eindimensional, also nulldimensional in p sei. In der Tat, diese Annahme besagt, daß beliebig kleine Umgebungen von p existieren, deren Begrenzungen bloß Endpunkte enthalten. Wir geben eine Umgebung $V(p)$ so klein vor, daß $K - \overline{V}(p)$ nicht leer ist; und nun betrachten wir eine Umgebung $U(p)$, die samt ihrer abgeschlossenen Hülle $\overline{U}(p)$ in $V(p)$ liegt, — wir drücken dies durch das Symbol $U(p) \ll V(p)$ aus, — und deren Begrenzung B bloß Endpunkte enthält. Jedem Punkt von B kann eine p nicht enthaltende Umgebung $\ll V(p)$ zugeordnet werden, deren Begrenzung genau einen Punkt enthält. Nach dem Borelschen Theorem überdecken endlich viele von diesen Umgebungen, etwa $U_1, U_2, \ldots, U_n$, die Menge B. Die Begrenzung jeder dieser Umgebungen enthält genau einen Punkt, die von U_i etwa den

Punkt b_i. Es mögen die Punkte $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ in $U(p)$, die Punkte $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ außerhalb von $U(p)$ liegen. Dann ist aber

$$W(p) = U(p) + \sum_{a=1}^{k} U_{i_a} - U(p) \cdot \sum_{a=1}^{l} \overline{U}_{j_a}$$

eine Umgebung von $p < V(p)$ mit leerer Begrenzung. Denn ein Punkt der Begrenzung von $W(p)$ müßte der Begrenzung einer der Mengen $U(p)$, U_{i_a} oder U_{j_a} angehören. Die Punkte dieser Begrenzungen liegen aber teils in $W(p)$, teils außerhalb von $\overline{W}(p)$. — Eine Umgebung von $p < V(p)$ mit leerer Begrenzung widerspricht aber, da $K - \overline{V}(p)$ nicht leer ist, dem Zusammenhang von K. Wir sehen also, daß die Annahme, ${}^1K$ sei in p nulldimensional, zu einem Widerspruch führt[9a]).

${}^1K$ ist in keinem Punkte nulldimensional und nach Satz IV ein F_σ. Dann enthält aber nach einem Lemma von Mazurkiewicz[10]) jede nicht leere in ${}^1K$ offene Menge Kontinua (ist nicht „punctiform"). Insbesondere ist sie also ferner kondensiert und in der Kurve dicht.

Betrachten wir nun irgendeinen Endpunkt p von K. Es existiert eine auf p sich zusammenziehende Folge $\{U_i\}$ von Umgebungen, deren Begrenzungen $\{B_i\}$ aus je einem Punkt bestehen. Da ${}^1K$ auch in p nicht nulldimensional ist, so ist für fast alle Mengen B_i ihr einziges Element ein Punkt von ${}^1K$, also kein Endpunkt. Mithin kann aus den U_i eine auf p sich zusammenziehende Folge von Umgebungen herausgegriffen werden, deren Begrenzungen zu K^1 fremd sind; d. h. die Menge K^1 ist, wenn sie nicht leer ist (wie z. B. bei der Kreislinie), in jedem ihrer Punkte, also schlechthin nulldimensional.

Insbesondere kann also keine Kurve ausschließlich aus Endpunkten bestehen. Daraus folgt, daß auch kein nicht leerer offener Teil einer Kurve ausschließlich aus Endpunkten bestehen kann, denn nach bekannten Sätzen enthielte er ein Teilkontinuum, also eine Kurve, die dann gleich-

[9a]) (Zusatz bei der Korrektur:) Durch dasselbe Verfahren kann, wenn p speziell von der Ordnung n ist, ein Widerspruch hergeleitet werden aus der Annahme, daß B weniger als n Punkte von ${}^1K$ enthält. Es gilt also, in Beantwortung einer mir von P. Alexandroff gestellten Frage, der Satz: *Die Menge ${}^1K$ ist in jedem Punkt von K von derselben Ordnung wie K, enthält also insbesondere in Bezug auf sich selbst keine Endpunkte.* Bemerkenswert ist an diesem Resultat auch folgendes: Es waren in der bisherigen Punktmengenlehre im allgemeinen F_σ-Mengen, die ohne Änderung gewisser Eigenschaften des Raumes weggelassen („vernachlässigt") werden konnten. In der Menge K^1 sehen wir einen G_δ (der nicht notwendig ein F_σ ist), nach dessen Vernachlässigung sich an den Ordnungen der Kurvenpunkte nichts ändert. —. Übrigens gelten die Sätze dieses Paragraphen für die Endpunkte von Kontinua überhaupt, nicht bloß für die von Kurven.

[10]) Vgl. Fund. Math. 3, S. 67. — Dieses Lemma ergibt sich auch aus dimensionstheoretischen Sätzen. Vgl. Menger, Einige Überdeckungssätze, Wien. Ber. 1924, S. 442.

falls bloß aus Endpunkten bestünde. Daraus sehen wir neuerdings, daß die Menge ${}^1K$ in K und sogar in jedem Teilkontinuum von K dicht ist. Damit ist Satz V in allen Stücken bewiesen.

Daß die Punkte von höherer als erster Ordnung in jeder Kurve dicht liegen, ist von vornherein plausibel. Wir wollen nun aber zeigen, daß unter Umständen auch die Endpunkte in einer Kurve dicht liegen und dann, in sich betrachtet, in gewissem Sinn sogar dichter angeordnet sind als die Punkte von höherer Ordnung.

Satz VI. *Es existieren Kurven, in denen die Endpunkte dicht liegen. Unter den separablen vollständigen Kurven sind dieselben identisch mit jenen, für welche die Menge aller Punkte von höherer als erster Ordnung von erster Kategorie im Sinn von Baire ist.*

Wir geben zunächst im R_2 ein Beispiel $\mathbf{B}_3$ für eine Kurve K, in der die Menge K^1 dicht liegt. Sei A eine Strecke von der Länge l. Als mA bezeichnen wir die Menge aller Strecken, die zugleich folgenden Bedingungen genügen:

1. Sie haben auf A ihren Mittelpunkt.

2. Sie stehen auf A senkrecht in einem Punkt, der von den Endpunkten von A einen Abstand $l \cdot d$ hat, wo d eine dyadisch rationale Zahl ist.

3. Sie haben, wenn $d = \frac{p}{2^n}$ ist, wo p eine ungerade Zahl bezeichnet, die Länge $\frac{1}{2^n}$.

Wir gehen nun von einer Strecke $S = m^0 S$ des R_2 aus. Beim ersten Schritt bilden wir $mS = m^1 S$, d. i. eine Summe von abzählbar vielen Strecken senkrecht zu S, deren jede durch ihren auf S gelegenen Mittelpunkt in zwei Halbstrecken zerfällt. Beim zweiten Schritt bilden wir $m^2 S$, — so nennen wir die Summe aller jener Strecken S^2, zu denen eine Halbstrecke H^1 von $m^1 S$ existiert, so daß S^2 zu mH^1 gehört. Allgemein bilden wir beim k-ten Schritt $m^k S$, — so nennen wir die Summe aller Strecken S^k, zu denen irgendeine Halbstrecke H^{k-1} von $m^{k-1} S$ existiert, so daß S^k zu mH^{k-1} gehört. Die abgeschlossene Hülle K von $\sum_{k=0}^{\infty} m^k S$ ist ein nirgends dichtes Kontinuum, also eine Kurve. Jeder Punkt, der Endpunkt von einer der Strecken irgendeiner Menge $m^k S$ ist, ist Endpunkt von K. (Die Mittelpunkte dieser Strecken sind offenbar Punkte vierter Ordnung.) In der Tat, sei p Endpunkt etwa der Strecke A von $m^k S$, deren Länge l sei. Bilden wir irgendeine gegen p konvergente Folge von Punkten auf A mit dyadisch irrationalen Abständen von p (gemessen in l), dann wird durch jeden eine Umgebung von p in K begrenzt und die so entstehende Umgebungsfolge zieht sich auf p zusammen. — Bereits die abzählbare Menge dieser Endpunkte liegt in K dicht, womit der erste Teil von Satz V bewiesen ist.

Den Beweis der zweiten Hälfte stützen wir auf den

Hilfssatz A. Unter den Mengen F_σ eines separablen vollständigen Raumes sind diejenigen, welche mit ihrem Residuum übereinstimmen, identisch mit jenen von erster Kategorie.

Dabei verstehen wir mit Hausdorff[11]) unter dem Residuum der Menge M die Menge $M \cdot \overline{\overline{M} - M}$ und nennen von erster Kategorie im Sinne von Baire eine Menge A, welche Summe abzählbar vieler in A nirgends dichter Mengen ist. Aus Sätzen von Hausdorff[12]) geht nun hervor, daß jede Menge M eines separablen vollständigen Raumes in genau einer Weise darstellbar ist als Summe einer in M abgeschlossenen Menge, welche mit ihrem Residuum identisch ist, und einer in M offenen Menge, welche reduzibel, d. h. zugleich F_σ und G_δ ist. Wir sehen: Wenn bei dieser Zerspaltung der zweite Bestandteil nicht leer ist, dann ist die Menge M, da sie einen offenen Teil enthält, der ein G_δ ist, nach bekannten Sätzen nicht von erster Kategorie. Also ist jeder F_σ, der von erster Kategorie ist, mit seinem Residuum identisch. — Ist umgekehrt die Menge M ein mit seinem Residuum identischer F_σ, also $= \sum_{i=1}^{\infty} M_i$, wo die Mengen M_i abgeschlossen sind, dann muß jede der Mengen M_i in M nirgends dicht sein. Sonst enthielte eine der Mengen, da sie abgeschlossen ist, einen nicht leeren, offenen Teil, der als Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer offenen Menge zugleich F_σ und G_δ wäre. Das ist aber bei einer mit ihrem Residuum identischen Menge unmöglich; also ist M von erster Kategorie. Damit ist Hilfssatz A bewiesen.

Sei nun K eine separable vollständige Kurve. Satz IV ergibt, daß die Menge ${}^1K$ ein F_σ ist; Satz V, daß ${}^1K$ in K dicht ist. Dann und nur dann, wenn auch K^1 in K dicht ist, ist ${}^1K$ mit seinem Residuum identisch, also nach Hilfssatz A von erster Kategorie. Damit ist auch der zweite Teil von Satz VI bewiesen.

Wir sehen also: bei jenen Kurven, in denen die Endpunkte dicht liegen, sind dieselben (obwohl in jedem Teilkontinuum die Nicht-Endpunkte dicht liegen) in gewissem Sinne dichter angeordnet, als die Nicht-Endpunkte. Denn die Menge der Endpunkte läßt sich, als G_δ, nach bekannten Sätzen nicht darstellen als Summe einer Folge von nirgends dichten Mengen, während dies für die Menge der Nicht-Endpunkte, wie wir gesehen haben, zutrifft. Aus Satz VI folgt insbesondere noch, daß K^1,

---

[11]) Mengenlehre (1914), S. 281.

[12]) a. a. O. S. 281 ff., 460 ff.; vgl. auch C. Kuratowski, Fund. Math. 3, S. 96.

wenn diese Menge in K dicht ist, von der Mächtigkeit des Kontinuums ist und keinen relativ offenen F_σ enthält.

§ 4.

Über die nicht regulären Kurvenpunkte.

Wir beweisen zunächst wieder einen abstrakten Satz, aus dem sich dann einige Struktursätze ergeben werden.

Satz VII. *Es liege ein total vollständiger Raum zugrunde. Die Umgebungen mit der Eigenschaft E mögen folgenden Bedingungen genügen:*

1. *Besitzen U_1 und U_2 die Eigenschaft E, dann auch $U_1 + U_2$.*

2. *Besitzt die Umgebung U mit der Begrenzung B die Eigenschaft E, dann auch jede Umgebung V, deren Begrenzung Teil von B ist.*

3. *Alle Umgebungen mit leeren Begrenzungen besitzen die Eigenschaft E.*

Behauptung. *Das Komplement A der Menge aller E-Punkte des Raumes ist entweder leer oder ein kondensierter, in keinem seiner Punkte nulldimensionaler F_σ, und jede in A offene Menge enthält Kontinua.*

Zunächst ist die Menge A nach Satz III ein F_σ. Sei nun p ein Punkt von A, d. h. es existiere eine Umgebung $U(p)$, so daß es keine Umgebung mit der Eigenschaft $E < U(p)$ gibt. Wir zeigen: A ist in p nicht nulldimensional, d. h. es existieren nicht beliebig kleine Umgebungen von p mit zu A fremden Begrenzungen. Sei nämlich $V(p)$ eine beschränkte Umgebung $\leqslant U(p)$. Die Begrenzung B von $V(p)$ ist beschränkt, also kompakt; da $V(p)$ in $U(p)$ enthalten ist und daher nicht die Eigenschaft E besitzt, ist B nach Bedingung 3 nicht leer. Wir leiten einen Widerspruch her aus der Annahme, B sei zu A fremd. In der Tat, aus dieser Annahme würde folgen, daß jeder Punkt von B E-Punkt ist. Also kann B nach dem Borelschen Theorem mit endlich vielen beschränkten Umgebungen der Eigenschaft $E < U(p)$ überdeckt werden. Die Summe W dieser endlich vielen Umgebungen besitzt nach Voraussetzung 1. die Eigenschaft E. $V(p) + W = V'(p)$ ist eine Umgebung von $p < U(p)$. Die Begrenzung B' von $V'(p)$ ist Teil der Begrenzung von W, also besitzt $V'(p)$ nach Voraussetzung 2. die Eigenschaft E. Wegen $V'(p) < U(p)$ ist damit der angekündigte Widerspruch gegen die Voraussetzung hergestellt und bewiesen, daß A in p nicht nulldimensional ist.

Da also die Menge A ein in keinem seiner Punkte nulldimensionaler F_σ ist, so folgt nach der schon beim Beweise von Satz V verwendeten Bemerkung, daß jede nicht leere, in A offene Menge Kontinua enthält. Damit ist Satz VII bewiesen.

Bezeichnen wir als Umgebung mit der Eigenschaft E jede Umgebung mit endlicher Begrenzung, so ergibt sich:

Satz VIII. *In jeder total vollständigen Kurve ist die Menge* K^{∞} *der nicht regulären Punkte entweder leer oder ein kondensierter, in jedem seiner Punkte eindimensionaler* F_{σ} *und jede nicht leere, in* K^{∞} *offene Menge enthält Kontinua.*

Die drei Forderungen von Satz VII werden ja von den Umgebungen mit endlichen Begrenzungen offenbar erfüllt; außerdem ist nur zu bemerken, daß jede Teilmenge einer eindimensionalen Menge in jedem Punkt, in dem sie nicht nulldimensional ist, eindimensional ist.

Sagen wir von einer Umgebung, sie besitzt die Eigenschaft E, wenn ihre Begrenzung abzählbar ist, so werden die drei Forderungen von Satz VII ebenfalls erfüllt und wir erhalten für das Komplement der Menge aller E-Punkte, d. i. für die Menge aller Punkte der Ordnung c:

Satz IX. *In jeder total vollständigen Kurve ist die Menge* K^{c} *entweder leer oder ein* F_{σ} *mit den Eigenschaften des Satzes VIII von* K^{∞}.

Über die Menge K^{c} lassen sich aber noch weitergehende Aussagen machen. Die Menge K^{∞} kann nämlich immerhin abgeschlossen und dabei doch in keinem ihrer Punkte von unendlicher Ordnung sein. So ist in B_5 die Menge K^{∞} eine Strecke.

Anders liegen die Verhältnisse hinsichtlich K^{c}. Wir beweisen zunächst:

Hilfssatz B. Ist p Punkt von K^{c}, dann existieren nicht beliebig kleine Umgebungen $U(p)$ mit folgender Eigenschaft (*): Die Begrenzung von $U(p)$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ bis auf eine abzählbare Teilmenge überdeckbar mit einer Folge von Umgebungen, deren Begrenzungen abzählbar sind und deren Durchmesser $< \varepsilon$ sind und gegen Null konvergieren.

Wenn p Punkt von K^{c} ist, so existiert eine Umgebung $V(p)$, derart, daß die Begrenzung keiner Umgebung $U(p) < V(p)$ abzählbar ist. Besäße nun etwa die Umgebung $U(p) \ll V(p)$ die Eigenschaft (*), so kämen wir zu einem Widerspruch. Wir geben dann $\varepsilon > 0$ so klein vor, daß, wenn B die Begrenzung von $U(p)$ bezeichnet, $U(B;\varepsilon) \ll V(p)$ gilt. Und nun überdecken wir B bis auf eine abzählbare Teilmenge A mit einer Nullfolge $\{U_n\}$ von Umgebungen $< \varepsilon$, deren Begrenzungen B_n abzählbar sind. $U(p) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = U'(p)$ ist eine Umgebung $< V(p)$. Bezeichnet B' die Begrenzung von $U'(p)$, so gilt:

$$B' < \sum_{n=1}^{\infty} B_n + A. \tag{**}$$

Denn jeder Punkt von B', der keiner der Mengen B_n angehört, liegt, da die U_n eine Nullfolge bilden, in B; also wegen $B - A < \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ in A. Aus (**) folgt, daß B' abzählbar ist, womit der angekündigte Widerspruch gegen die Definition von $V(p)$ hergestellt und Hilfssatz B bewiesen ist. Aus ihm folgt:

Satz X. *Sei K eine total vollständige Kurve. Die Menge K^c ist in keinem ihrer Punkte regulär. In jedem Punkte von K^c, in dessen Nachbarschaft $K - K^c$ für jedes $\varepsilon > 0$ überdeckbar ist mit einer Nullfolge von Umgebungen $< \varepsilon$ mit abzählbaren Begrenzungen, ist die Menge K^c von der Ordnung c. [Diese Voraussetzung ist insbesondere erfüllt in allen jenen Punkten von K^c, in deren Nachbarschaft K^c ein G_δ ist; — oder in deren Nachbarschaft zu jedem Punkt von K abgesehen von einem K^c enthaltenden F_σ eine auf ihn sich regulär zusammenziehende*[13]*) Folge von Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen existiert.] Die Menge $\overline{K^c}$ ist in allen Punkten von K^c von der Ordnung c.*

Wäre erstens die Menge K^c in ihrem Punkt p regulär, so existierte eine auf p sich zusammenziehende Folge $\{U_n\}$ von Umgebungen des Punktes p, deren Begrenzungen B_n bloß endliche Teilmengen A_n von K^c enthielten. Das wären aber offenbar Umgebungen mit der durch Hilfssatz B ausgeschlossenen Eigenschaft (*). Denn für jedes n wäre $B_n - A_n$ ein F_σ, dessen jedem Punkt beliebig kleine Umgebungen mit abzählbaren Begrenzungen zugeordnet wären; also wären die Mengen $B_n - A_n$ für jedes $\varepsilon > 0$ mit einer Nullfolge solcher Umgebungen $< \varepsilon$ überdeckbar. — Aus demselben Grund kann zweitens die Menge K^c nicht von einer Ordnung $< c$ sein in einem ihrer Punkte, in dessen Nachbarschaft $K - K^c$ für jedes $\varepsilon > 0$ überdeckbar ist mit einer Nullfolge von Umgebungen $< \varepsilon$ mit abzählbaren Begrenzungen. Denn in diesem Fall besäßen die Umgebungen der sich auf p zusammenziehenden Folge, deren Begrenzungen mit K^c abzählbare Durchschnitte hätten, die Eigenschaft (*) von Hilfssatz B. — Wegen des Beweises der in der Klammer stehenden Bemerkung über Spezialfälle, in denen diese Überdeckbarkeitsbedingung erfüllt ist, muß auf eine ausführliche Darstellung[14]) verwiesen werden. Daß endlich die Menge $\overline{K^c}$ in allen Punkten von K^c die Ordnung c hat, ergibt sich ununmittelbar daraus, daß andernfalls die Umgebungen von Punkten, deren

[13]) Ist $\{U_n\}$ eine auf p sich zusammenziehende Folge von Umgebungen; B_n die Begrenzung von U_n; d_n der kleinste, D_n der größte Abstand des Punktes p von B_n, dann sagen wir, die U_n ziehen sich *regulär* auf p zusammen, wenn $\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{d_n}{D_n} > 0$ gilt; wenn also die U_n hinsichtlich p nicht allzu exzentrisch werden. Vgl. Menger, Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Wien. Ber. 1924.

[14]) Menger, a. a. O.

Begrenzungen mit K^c abzählbare Durchschnitte haben, die Eigenschaft (*) besäßen. Damit ist Satz X bewiesen.

Es sei darauf hingewiesen, daß Satz VII der abstrakte Kern gewisser dimensionstheoretischer Sätze ist. Wenn wir als Umgebung mit der Eigenschaft E eine Umgebung bezeichnen, deren Begrenzung eine Dimension $\leqq n-1$ hat, dann werden von diesen Umgebungen, wie sich zeigen läßt, die Voraussetzungen 1., 2., 3. von Satz VII erfüllt. Daher ist in jedem total vollständigen Raum die Menge aller Punkte, in denen der Raum eine Dimension $> n$ hat, ein F_σ mit den im Satz VII behaupteten Eigenschaften. — Auch Satz X hätte sich übrigens auf einen abstrakten Kern zurückführen lassen. Der Grund für die Gültigkeit des entscheidenden Hilfssatzes B liegt nämlich offenbar darin, daß nicht nur die Summe endlich vieler, sondern die Summe abzählbar vieler Umgebungen mit der Eigenschaft E die Eigenschaft E besitzt. So wird auch deutlich, warum für K^∞ die analogen Sätze nicht gelten. Dagegen ist die Summe abzählbar vieler abgeschlossener höchstens n-dimensionaler Mengen höchstens n-dimensional[15]). Daher gilt von Satz X in vollem Umfang das dimensionstheoretische Analogon. In der angeführten Arbeit über einige Überdeckungssätze ist der analoge Satz für die nulldimensionalen Mengen bewiesen. Während aber ein Beispiel einer (allerdings nicht abgeschlossenen) nicht nulldimensionalen Menge bekannt ist, welche in sich bloß eine nulldimensionale Menge von Punkten enthält, in denen sie nicht nulldimensional ist, bleibt hier die analoge Frage, ob die Menge K^c in einem ihrer Punkte von der Ordnung $\aleph_0$ sein kann, offen. — Hingegen ist klar, warum die Menge aller Punkte, in denen der Raum eine Dimension $\geqq n$ hat, in Analogie zur Menge aller nicht regulären Kurvenpunkte, nicht aber zur Menge aller Kurvenpunkte von einer Ordnung $\geqq n$ steht: Bezeichnen wir nämlich als Umgebung mit der Eigenschaft E eine Umgebung, deren Begrenzung eine Mächtigkeit $\leqq n$ besitzt, so wird die Voraussetzung 1. von Satz VII nicht erfüllt. Dies ist auch der Grund, warum die Sätze des § 3 kein eigentlich dimensions-theoretisches Analogon besitzen.

§ 5.

Trennungs- und Zerlegungseigenschaften der Kurven und Kurvenarten.

Wir nennen die Teilmengen A_1 und A_2 von M durch die Teilmenge B von M getrennt (in M), wenn $M-B$ keine zusammenhängende Menge enthält, die sowohl mit A_1 als auch mit A_2 Punkte gemein hat. Ferner sagen wir, der kürzeren Ausdrucksweise halber, von einer Menge M, deren sämtliche Punkte E-Punkte sind, M besitzt die Eigenschaft E.

Satz XI. *Es sei ein total vollständiges Kontinuum als Raum zugrunde gelegt. Die Summe zweier Umgebungen mit der Eigenschaft E besitze auch selbst die Eigenart E.*

Behauptung. *K besitzt die Eigenschaft E dann und nur dann, wenn*

[15]) Menger II, S. 147. (Zusatz bei der Korrektur): Der Beweis dieses Satzes (und auch seiner Verallgemeinerung auf F_σ, a. a. O. S. 150) läßt sich übrigens wörtlich auf die Kurven ohne Punkte der Ordnung c übertragen, so daß insbesondere der Satz gilt: *Ist die Summe abzählbar vieler Kurven ohne Punkte der Ordnung c ein Kontinuum, dann ist sie eine Kurve ohne Punkte der Ordnung c.*

je zwei fremde beschränkte abgeschlossene Teile von K getrennt sind durch die Begrenzung einer Umgebung mit der Eigenschaft E.

Nehmen wir an, daß K die Eigenschaft E besitzt und daß A_1 und A_2 zwei fremde beschränkte, also kompakte Teilmengen von K seien. Es existiert eine Umgebung $U(A_1)$, die zu A_2 fremd ist. Wir können jedem Punkt von A_1 eine Umgebung mit der Eigenschaft $E \ll U(A_1)$ zuordnen; wir können sodann A_1 mit endlich vielen derartigen Umgebungen überdecken und haben in der Summe dieser Umgebungen eine Umgebung von A_1 mit der Eigenschaft E, deren Begrenzung offenbar A_1 und A_2 trennt. Der Beweis der zweiten Hälfte von Satz XI liegt auf der Hand.

Für die Kurventheorie ergibt dieser Satz, der auch dimensionstheoretische Konsequenzen hat:

Satz XII. *Unter den total vollständigen Kontinua sind*

a) *die Kurven,*

b) *die Kurven ohne Punkte der Ordnung c,*

c) *die regulären (d. h. nur reguläre Punkte enthaltenden) Kurven*

identisch mit jenen, für welche je zwei fremde beschränkte abgeschlossene Teile trennbar sind

a) *durch eine diskontinuierliche,*

b) *durch eine höchstens abzählbare,*

c) *durch eine endliche Menge.*

Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch folgendes: Für die E-Punkte war die Existenz beliebig kleiner Umgebungen mit der Eigenschaft E gefordert; daß *alle* Umgebungen eines solchen Punktes die Eigenschaft E besitzen, war nicht gefordert (B_7). Man kann aber zeigen: Wenn die Summe zweier Umgebungen mit der Eigenschaft E die Eigenschaft E besitzt und wenn die ganze Menge M die Eigenschaft E hat, dann liegen die Umgebungen mit der Eigenschaft E immerhin in gewissem Sinn dicht: Zwischen je zwei offene Mengen U_1 und U_2, wo $U_1 \ll U_2$ und U_1 beschränkt ist, läßt sich eine Umgebung U mit der Eigenschaft E einschalten, $U_1 < U < U_2$. —

Wir gehen nunmehr daran, die Kurven und die wichtigsten Kurvenarten durch Überdeckungs- und Zerlegungseigenschaften zu charakterisieren. Dabei bezeichnen wir als halbkompakt eine Menge, welche Summe abzählbar vieler kompakter Mengen ist. Die Bedeutung dieses Begriffes beruht darauf, daß alle Mengen Euklidischer Räume halbkompakt sind. Ferner sagen wir von einer Menge M, deren Durchmesser $< \varepsilon$ ist, M sei $< \varepsilon$.

Satz XIII. *Damit die kompakte (halbkompakte) abgeschlossene Menge M die Eigenschaft E besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß*

M für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen (mit einer Nullfolge von) Umgebungen $< \varepsilon$ der Eigenschaft E überdeckbar ist.

Die Bedingung ist notwendig. Denn wenn zunächst jeder Punkt der kompakten abgeschlossenen Menge A ein E-Punkt ist, und eine Zahl $\varepsilon > 0$ vorgegeben wird, dann kann A nach dem Borelschen Theorem mit endlich vielen Umgebungen $< \varepsilon$ der Eigenschaft E überdeckt werden. Ist M halbkompakt und abgeschlossen oder allgemeiner $= \sum_{i=1}^{\infty} M_i$, wo die M_i kompakt und abgeschlossen sind, dann bestimmen wir, wenn $\varepsilon > 0$ vorgegeben ist, irgendeine gegen Null konvergente Folge $\{\varepsilon_i\}$ von positiven Zahlen $< \varepsilon$. Wir können für jedes i M_i mit endlich vielen Umgebungen $< \varepsilon_i$ von der Eigenschaft E überdecken. Die Gesamtheit dieser Umgebungen bildet dann eine M überdeckende Nullfolge von Umgebungen mit der Eigenschaft E. — Die Bedingung ist hinreichend. Wenn nämlich die halbkompakte abgeschlossene Menge M für jedes $\varepsilon > 0$ mit irgendeiner Folge von Umgebungen $< \varepsilon$ der Eigenschaft E überdeckbar ist, dann existieren zu jedem Punkt von M beliebig kleine Umgebungen der Eigenschaft E. Damit ist Satz XIII bewiesen.

Satz XIII ließe sich, wie aus seinem Beweis hervorgeht, in mehrfacher Hinsicht verschärfen, worauf es uns aber in folgendem nicht ankommt. Auf die Kurven angewendet, ergibt er unmittelbar:

Satz XIV. *Damit ein kompaktes (halbkompaktes) Kontinuum K*

a) *eine Kurve,*

b) *eine Kurve ohne Punkte der Ordnung c,*

c) *eine reguläre Kurve*

sei, ist notwendig und hinreichend, daß K für jedes $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen (mit einer Nullfolge von) Umgebungen $< \varepsilon$ überdeckbar ist, deren Begrenzungen bzw.

a) *kein Kontinuum enthalten,*

b) *höchstens abzählbar sind,*

c) *endlich sind.*

Unter Hinzunahme einiger Voraussetzungen kann der Überdeckungssatz XIII in einen eigentlichen Zerlegungssatz verwandelt werden. Ist U eine Umgebung mit der Eigenschaft E, so wollen wir die abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ von M als eine abgeschlossene Umgebung der Eigenschaft E bezeichnen und die Punkte von U als die inneren Punkte von $\overline{U}$ bezeichnen.

Satz XV. *Die Umgebungen mit der Eigenschaft E mögen folgenden Bedingungen genügen:*

1. *Wenn U_1 und U_2 die Eigenschaft E besitzen, dann besitzt auch* a) *$U_1 + U_2$ und* b) *$U_1 - U_1 \cdot \overline{U}_2$, falls diese Menge nicht leer ist, die Eigenschaft E.*

2. *Wenn eine Umgebung mit der Begrenzung B die Eigenschaft E besitzt, dann besitzt auch jede Umgebung, deren Begrenzung Teil von B ist, die Eigenschaft E.*

3. *Ist $\{U_i\}$ eine (eventuell endliche) Folge von Umgebungen mit der Eigenschaft E und bezeichnet B_i die Begrenzung von U_i, dann ist $\sum_{i=1}^{\infty} B_i$ diskontinuierlich.*

Behauptung. *Damit die kompakte (halbkompakte) abgeschlossene Menge M die Eigenschaft E besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß M für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen (einer Nullfolge von) abgeschlossenen Umgebungen $< \varepsilon$ der Eigenschaft E sei, die zu je zweien keinen inneren Punkt gemein haben.*

Die Bedingung ist notwendig. Sei nämlich M eine halbkompakte abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft E und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz XI existiert eine M überdeckende Nullfolge $\{U_i\}$ von Umgebungen $< \varepsilon$ mit der Eigenschaft E. Wir bilden:

$$U_1' = U_1, \quad U_k' = U_k - U_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \overline{U}_i \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Dann gilt $M < \sum_{k=1}^{\infty} \overline{U}_k'$; die $\overline{U}_k'$ sind, wenn wir etwaige leere unter ihnen tilgen, abgeschlossene Umgebungen $< \varepsilon$, die ihrer Konstruktion zufolge zu je zweien keinen inneren Punkt gemein haben und nach Voraussetzung 1b die Eigenschaft E besitzen.

Die Bedingung ist hinreichend. Sei zunächst für ein bestimmtes n die halbkompakte Menge M Summe einer Nullfolge $\{\overline{U}_i^n\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ von abgeschlossenen Umgebungen $< \frac{1}{n}$ mit der Eigenschaft E, die zu je zweien keinen inneren Punkt gemein haben. B_i^n bezeichne die Begrenzung von U_i^n. Jeder Punkt, der irgend zweien von den Mengen $\overline{U}_i^n$ gemein ist, liegt in ihren Begrenzungen, ist also Punkt der Menge $B^n = \sum_{i=1}^{\infty} B_i^n$. Jeder Punkt von $M - B^n$ dagegen ist innerer Punkt von einer der Mengen U_i^n. Zu jedem Punkt von $M - B^n$ existiert also eine Umgebung $< \frac{1}{n}$ mit der Eigenschaft E. — Wenn die Bedingung von Satz XV erfüllt ist, so existiert zu jedem Punkt von $M - \sum_{i, n=1}^{\infty} B_i^n = M - B$ eine auf ihn sich zusammenziehende Folge von Umgebungen der Eigenschaft E. Es ist dann also jeder Punkt von $M - B$ ein E-Punkt. Das Komplement A der Menge aller E-Punkte des Raumes M ist nach Satz VII entweder leer oder es enthält Kontinua, da die Voraussetzungen des Satzes VII durch die Bedingungen 1a und 2 des Satzes XV erfüllt werden.

Wegen $A < B < \sum_{i,n=1}^{\infty} B_i^n$ ist A nach Voraussetzung 3 diskontinuierlich, also leer, d. h. M besitzt die Eigenschaft E. Damit ist die Bedingung auch als hinreichend erwiesen.

Analog ergibt sich der Beweis von Satz XV für kompakte Mengen und ließe sich übrigens für noch allgemeinere Mengen führen, worauf es uns hier nicht ankommt. Für die Kurventheorie haben wir nun den

Satz XVI. *Damit das kompakte* (*halbkompakte*) *Kontinuum* K

a) *eine Kurve,*

b) *eine Kurve ohne Punkte der Ordnung* c,

c) *eine reguläre Kurve sei,*

ist notwendig und hinreichend, daß K *für jedes* $\varepsilon > 0$ *Summe von endlich vielen* (*einer Nullfolge von*) *abgeschlossenen Umgebungen* $< \varepsilon$ *sei, die zu je zweien bzw.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) \textit{diskontinuierliche}}\\ \text{b) \textit{höchstens abzählbare}}\\ \text{c) \textit{höchstens endliche}}\end{array}\right\}\ \textit{Durchschnitte haben.}$$

Verstehen wir nämlich unter Umgebung mit der Eigenschaft E eine Umgebung, deren Begrenzung a) diskontinuierlich, b) höchstens abzählbar, c) endlich ist, so werden die drei Forderungen von Satz XV offenbar erfüllt; die dritte, weil die Summe abzählbar vieler diskontinuierlicher abgeschlossener Mengen diskontinuierlich ist. Es ist also in allen Fällen Satz XV anwendbar, woraus Satz XVI folgt, wenn wir berücksichtigen, daß jeder Punkt, der mehr als einer der überdeckenden abgeschlossenen Umgebungen angehört, notwendig in ihrer Begrenzung liegt.

Implizit ist im Beweis des Satzes XVIa ein dimensions-theoretischer Satz enthalten: Bezeichnen wir als „höheren" Punkt eines Kontinuums jeden Punkt, für den die Begrenzungen aller hinlänglich kleinen Umgebungen Kontinua enthalten, dann ist in jedem Kontinuum die Menge aller höheren Punkte entweder leer oder ein Kontinua enthaltender F_σ mit den Eigenschaften des Satzes VII von A. — Auch Satz XIII ist Kern eines dimensions-theoretischen Satzes, aus Satz XV lassen sich Folgerungen für die Dimensionstheorie ziehen.

§ 6.

Über den Zusammenhang im kleinen von Kurven.

Eine Menge M heißt nach Hahn zusammenhängend im kleinen in ihrem Punkte p, wenn zu jeder vorgelegten Umgebung $U(p)$ eine Umgebung $V(p)$ existiert, so daß alle Punkte von $M \cdot V(p)$ mit p durch ein Teilkontinuum von $M < U(p)$ verbindbar sind. Eine Menge heißt zusammenhängend im kleinen schlechthin, wenn sie in jedem ihrer Punkte zusammenhängend im kleinen ist. Wir beweisen zunächst einen allgemeinen

Satz, welcher zeigt, daß die Punkte, in denen eine Menge nicht zusammenhängend im kleinen ist, sich ähnlich verhalten, wie die nicht-regulären Punkte einer Kurve.

Satz XVII. *Die Menge K^u aller Punkte, in denen das total vollständige Kontinuum K (das wir als Raum zugrunde legen) nicht zusammenhängend im kleinen ist, ist entweder leer oder ein kondensierter, in keinem seiner Punkte nulldimensionaler F_σ, der in jedem seiner nicht leeren, offenen Teile Kontinua enthält.*

Die Punkte, in denen die Menge K zusammenhängend im kleinen ist, sind die E-Punkte, wenn wir unter der Eigenschaft E einer Umgebung $U(p)$ folgendes verstehen: Es existiert eine Umgebung $V(p)$, so daß alle Punkte von $V(p)$ mit p durch ein Kontinuum $< U(p)$ verbunden sind. Nach Satz III bildet also die Menge aller Punkte, in denen K zusammenhängend im kleinen ist, einen G_δ, ihr Komplement K^u daher einen F_σ. Die weiteren Behauptungen von Satz XVII sind bewiesen, wenn wir zeigen, daß die Menge K^u entweder leer oder in keinem ihrer Punkte nulldimensional ist. Sei nun p ein Punkt von K^u; dann enthält jede hinlänglich kleine $U(p)$ unendlich viele Komponenten und es gibt in $U(p)$ eine Folge $\{p_n\}$ von Punkten, von denen keine zwei durch ein Kontinuum $< U(p)$ verbunden sind und die den Punkt p zum Häufungspunkt haben. (Andernfalls wäre nämlich die den Punkt p enthaltende Komponente von $U(p)$ eine Umgebung von p, deren sämtliche Punkte durch ein Kontinuum $< U(p)$ mit p verbunden wären.) Gegen diese Tatsache wollen wir nun einen Widerspruch herleiten aus der Annahme, daß K^u in p nulldimensional sei. Angenommen, in der Tat, $V(p)$ sei eine Umgebung $\ll U(p)$, deren Begrenzung B ausschließlich Punkte enthielte, in denen K zusammenhängend im kleinen ist. Zu jedem Punkt von B würde dann eine Umgebung $\ll U(p)$ existieren, deren sämtliche Punkte mit dem betreffenden Punkt von B durch ein Kontinuum $< U(p)$ verbunden wären. Endlich viele derartige Umgebungen, etwa die der Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_k$ von B, würden die beschränkte und daher kompakte abgeschlossene Menge B überdecken. Jeder der Punkte p_n ist nun aber nach bekannten Sätzen mit mindestens einem Punkt von B durch ein Kontinuum verbunden. Da unendlich viele Punkte p_n vorhanden sind und jeder von ihnen durch ein Kontinuum $< U(p)$ mit einem der endlich vielen Punkte b_i verbunden ist, so müssen mehrere von den p_n auch untereinander durch ein Kontinuum $< U(p)$ verbunden sein. Damit ist der angekündigte Widerspruch gegen die Voraussetzung hergeleitet, also gezeigt, daß die Begrenzungen aller hinreichend kleinen Umgebungen von p Punkte von K^u enthalten; daß also die Menge K^u in keinem ihrer Punkte nulldimensional ist, wie Satz XVII behauptet.

Die Eigenschaft des Zusammenhanges im kleinen ist für das Verhalten einer Punktmenge in mancher Hinsicht bedeutungsvoll, so daß es an sich naheliegend ist, die Bedingungen dafür zu suchen, daß eine Kurve im kleinen zusammenhängend sei. Diese Frage ist aber auch nach einer anderen Richtung von Interesse. Nach Hahn und Mazurkiewicz sind durch den Zusammenhang im kleinen unter den kompakten Kontinua die eindeutigen stetigen Bilder der Strecke charakterisiert; das sind aber jene Mengen, welche nach Jordan „Kurven" heißen. Offenbar ist diese Jordansche Kurvendefinition in gewisser Hinsicht viel zu weit, denn auch die Quadratfläche, der Würfelkörper usw. sind zusammenhängend im kleinen. Wenn wir nun aber unter den Kurven im Sinne unserer Definition jene charakterisieren, welche zusammenhängend im kleinen sind, so haben wir damit zugleich unter den Mengen, die nach Jordan „Kurven" heißen, gerade jene herausgehoben, welche den Namen Kurve mit Recht tragen; in der Ebene beispielsweise gerade jene, welche keinen offenen Teil der Ebene, kein Flächenstück, enthalten; also jene, die auch Kurven im Cantorschen Sinn sind. Zugleich gewinnen wir damit auch ein Kriterium für jene Mengen, die wir, der Anschauung folgend, als Kurven bezeichnen müssen, die aber nicht unter die Jordansche Definition fallen, welch letztere ja in gewisser Hinsicht wiederum viel zu eng ist.

Nun hat Sierpiński[16]) für die Jordanschen „Kurven" noch die folgende zweite Charakterisierung gefunden: Sie sind unter den kompakten Kontinua identisch mit jenen, die für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ sind. Wir werden sehen, daß durch einige Zusatzworte über die Art der Zerlegung in Teilkontinua unter den Jordanschen Kurven gerade diejenigen, die in Wahrheit eindimensional sind, charakterisiert werden können.

Satz XVIII. *Dafür, daß ein kompaktes Kontinuum K eine im kleinen zusammenhängende Kurve, oder mit andern Worten, eine eindimensionale Jordansche Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß K für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ sei, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben.*

Die Bedingung ist notwendig. Sei also K eine kompakte im kleinen zusammenhängende Kurve, $\varepsilon > 0$ eine vorgegebene Zahl. Zunächst sehen wir: Zu jedem Punkt von K existiert eine zusammenhängende Umgebung $< \varepsilon$ mit diskontinuierlicher Begrenzung. Sei nämlich p ein Punkt von K. Da K eine Kurve ist, existiert eine Umgebung $U(p) < U\left(p;\, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ mit diskontinuierlicher Begrenzung B. Sei $U'(p)$ die Menge aller Punkte von $U(p)$, die mit p durch ein Kontinuum $< \overline{U}(p)$ verbunden sind.

[16]) Fund. Math. 1, S. 44.

Offenbar ist $U'(p)$ zusammenhängend; ferner sehen wir, daß $U'(p)$ offen ist. Sei nämlich q Punkt von $U'(p)$, dann ist wegen des Zusammenhanges im kleinen von K jeder Punkt einer gewissen Nachbarschaft von q mit q und folglich auch mit p durch ein Kontinuum $< \bar{U}(p)$ verbunden. — Schließlich gilt, wenn B' die Begrenzung von $U(p)$ bezeichnet, $B' < B$. Dazu haben wir nachzuweisen, daß ein in $U(p)$ gelegener Häufungspunkt von $U'(p)$ auch Punkt von $U'(p)$ ist. Sei nun $\{q_n\}$ eine gegen den Punkt $q \neq p$ von $U(p)$ konvergente Folge von Punkten, deren jeder durch ein Kontinuum $\bar{U}(p)$ mit p verbunden ist, — der Punkt q_n etwa durch das Kontinuum $C_n < \bar{U}(p)$. Da die untere Näherungsgrenze der Mengenfolge $\{C_n\}$ den Punkt p enthält, also nicht leer ist, so ist die obere Näherungsgrenze der $\{C_n\}$ nach bekannten Sätzen[17]) ein p und q verbindendes Kontinuum $< \bar{U}(p)$; also ist q Punkt von $U'(p)$, wie behauptet. — Als Teil von B ist B' diskontinuierlich. Damit ist nachgewiesen, daß $U'(p)$ eine zusammenhängende Umgebung $< \varepsilon$ mit diskontinuierlicher Begrenzung ist.

Wir ordnen nun jedem Punkt von K eine zusammenhängende Umgebung $< \frac{\varepsilon}{4}$ mit diskontinuierlicher Begrenzung zu. Endlich viele, etwa die Mengen

$$(*) \qquad U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

überdecken K. Wir bilden nun, wie beim Beweise von Satz XV, die Mengen

$$(**) \qquad \bar{U}_1' = \bar{U}_1, \quad \bar{U}_k' = \bar{U}_k - U_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} U_i \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Das sind endlich viele K überdeckende abgeschlossene Umgebungen $< \frac{\varepsilon}{4}$ (wenn wir etwa vorkommende leere Mengen außer Betracht lassen), die zu je zweien keinen inneren Punkt gemein haben. $\bar{U}_1'$ ist ein Kontinuum. Wenn jede der Mengen $\bar{U}_k'$ endlich viele Komponenten enthält, dann sind wir am Ziel; dann haben wir nämlich K als Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ dargestellt, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben.

Es kann aber der Fall eintreten, daß manche von den Mengen (**) unendlich viele Komponenten enthalten. Da K zusammenhängend im kleinen ist, so sieht man unmittelbar, daß in diesem Fall für jedes vorgegebene $\eta > 0$ fast alle Komponenten Durchmesser $< \eta$ haben, und ferner, daß fast alle Komponenten der Menge $\bar{U}_i'$, wenn B_i deren Be-

[17]) Vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I, S. 87f. — Die obere (untere) Näherungsgrenze der Mengenfolge $\{A_n\}$ bedeutet dabei die Menge aller jener Punkte, deren jede Umgebung mit unendlich vielen (mit fast allen) A_n Punkte gemein hat.

grenzung bezeichnet, innerhalb $U(B_i; \eta)$ liegen. Es handelt sich in diesem Fall darum, die unendlich vielen vorliegenden Kontinua zu endlich vielen $< \varepsilon$ zusammenzufassen, so daß je zwei von ihnen höchstens Punkte von $\sum_{k=1}^{n} B_k$ gemein haben.

Zu diesem Zweck gehen wir so vor: Sei $\overline{U}_i'$ die erste unter den Mengen (**) mit unendlich vielen Komponenten. Die ihr in der Reihe der (**) vorangehenden Mengen sind Summe von endlich vielen Kontinua $< \frac{\varepsilon}{4}$, sie mögen etwa

$$(***) \qquad \overline{U}_1' = C_1, C_2, \ldots, C_r$$

heißen, die zu je zweien höchstens Punkte von $\sum_{k=1}^{n} B_k$ gemein haben. Fast alle Komponenten von $\overline{U}_i'$ haben nach der obigen Bemerkung Durchmesser $< \frac{\varepsilon}{4n}$, wo n die Anzahl der Mengen (**) bedeutet, und liegen innerhalb $U\left(B_i; \frac{\varepsilon}{4n}\right)$. Die höchstens endlich vielen Komponenten, welche diesen Bedingungen nicht genügen, nehmen wir unter dem Namen $C_{r+1}', \ldots, C_s'$ in die Zerlegung von K auf. Jene eventuellen Komponenten, die nur aus einem Punkt bestehen, gehören schon zu mindestens einer der Mengen (***). Die unendlich vielen übrigen Komponenten, welche den beiden angeführten Bedingungen genügen, sind selbst abgeschlossene Umgebungen, da in einer im kleinen zusammenhängenden Menge die Komponenten einer offenen Menge Gebiete sind[18]). Wir vereinigen jede von ihnen mit genau einer von denjenigen Mengen (***), mit denen sie Punkte gemein hat. Der Durchmesser von keiner der Mengen (***) kann hierdurch um mehr als $\frac{\varepsilon}{2n}$ wachsen. Seien

$$(\dagger) \qquad C_1', C_2', \ldots, C_r'$$

die durch Aufsaugung der kleinen Komponenten von $\overline{U}_i'$ vergrößerten Mengen (***). Die Mengen (†) sind Kontinua. Die Begrenzungen B_k' der C_k' sind Teile von $\sum_{k=1}^{n} B_k$. Denn ein Punkt p von B_k' gehört entweder der Begrenzung eines der Summanden von C_k' an; diese Summanden sind aber teils Mengen (***) und teils Komponenten von $\overline{U}_i'$; ihre Begrenzungen sind also durchwegs $< \sum_{k=1}^{n} B_k$. — Oder in jeder Umgebung von p liegen Punkte von unendlich vielen Komponenten von $\overline{U}_i'$, — dann aber liegt p in B_i. — Wenn wir zu den Mengen (†) noch die endlich

[18]) Vgl. H. Hahn, Fund. Math. 2, S. 189 ff.

vielen nicht aufgesogenen Komponenten von $\overline{U}_i'$ hinzufügen, so haben wir die Mengen $\overline{U}_1'$, $\overline{U}_2', \ldots, \overline{U}_i'$ aufgeteilt in endlich viele Kontinua $< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2n}$

$$(\dagger\dagger) \qquad C_1', C_2', \ldots, C_r', \ldots, C_s',$$

die zu je zweien diskontinuierliche Durchschnitte haben.

In der gleichen Weise können wir nun $\overline{U}_{i+1}'$, falls diese Menge unendlich viele Komponenten hat, aufteilen, wodurch die Durchmesser der Mengen wieder höchstens um $\frac{\varepsilon}{2n}$ wachsen. Und so fahren wir fort, bis wir nach Aufteilung von $\overline{U}_n'$ K in endlich viele Kontinua $< \frac{3\varepsilon}{4}$, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben, zerlegt haben. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung von Satz XVIII erwiesen.

Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich das kompakte Kontinuum K für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben. Nach dem Satz von Sierpiński ist K zusammenhängend im kleinen. K ist dann aber auch eine Kurve. Denn wenn K Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ ist, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben, dann ist K auch Summe von endlich vielen abgeschlossenen Umgebungen $< \varepsilon$, die zu je zweien kein Kontinuum gemein haben, und Satz XVI a ist anwendbar. Damit ist Satz XVIII bewiesen.

Satz XVIII läßt sich auf einen abstrakten Kern zurückführen, auf den wir hier nicht näher eingehen. Es sei bloß bemerkt, daß wir im Beweis von Satz XVIII statt der Diskontinuität der Begrenzungen mutatis mutandis offenbar Abzählbarkeit der Begrenzungen verwenden könnten. Wir erhalten dann als Ergänzung zu Satz XVI b:

Satz XIX. *Damit ein kompaktes Kontinuum K eine im kleinen zusammenhängende Kurve ohne Punkte der Ordnung c sei, ist notwendig und hinreichend, daß K für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ sei, die zu je zweien höchstens abzählbare Durchschnitte haben.*

Als unmittelbare Folgerung der Sätze XVI und XVIII sei noch hervorgehoben, daß die nicht im kleinen zusammenhängenden Kurven (vgl. B_5, B_6) (jene Kurven also, welche nach Jordan nicht Kurven sind,) unter den kompakten Kontinua identisch sind mit jenen, die für jedes $\varepsilon > 0$ Summe endlich vieler abgeschlossener Umgebungen $< \varepsilon$ mit zu je zweien diskontinuierlichen Durchschnitten sind, für die aber bei jeder Zerlegung in hinreichend kleine Kontinua Summanden auftreten, welche Kontinua miteinander gemein haben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir die Untersuchungen dieses Paragraphen in zweifacher Hinsicht ergänzen könnten. Erstens können unter den im kleinen zusammenhängenden kompakten Kontinua jene, welche genau n-dimensional sind, durch

Zerlegungssätze charakterisiert werden; damit sind Bedingungen dafür angegeben, daß eine Jordansche „Kurve" n-dimensional ist, also, wenn sie Teilmenge des R_n ist, daselbst einen offenen Teil enthält. Zweitens können die Untersuchungen auf „verallgemeinerte Jordansche Kurven", d. h. auf die eindeutigen stetigen Bilder der Halbgeraden und der Geraden ausgedehnt werden.

§ 7.

Über die regulären Kurven.

Hilfssatz B. Ist in einem total vollständigen Kontinuum K die Begrenzung B einer beschränkten Umgebung U endlich, so enthält $\overline{U}$ endlich viele Komponenten und keine von ihnen ist zu B fremd.

Wenn B die Mächtigkeit n hat und $\overline{U}$ enthielte mehr als n Komponenten, dann wäre mindestens eine Komponente, etwa K_1, von $\overline{U}$ zu B fremd. K_1 wäre dann aber eine Komponente von K, deren Komplement nicht leer ist, und eine solche kann, da K ein Kontinuum ist, nicht existieren. Damit ist Hilfssatz B bewiesen.

Sei nun ein Kontinuum K Summe von endlich vielen abgeschlossenen Umgebungen $< \varepsilon$, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben. Da die Begrenzung einer jeden solchen Umgebung höchstens solche Punkte enthalten kann, welche mindestens zwei von den Umgebungen gemein sind, so besitzt jede der abgeschlossenen Umgebungen eine endliche Begrenzung; jede der abgeschlossenen Umgebungen ist daher nach Hilfssatz B Summe von endlich vielen zueinander fremden Kontinua $< \varepsilon$. Es ist also dann K Summe endlich vieler Kontinua $< \varepsilon$, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben. Liegt umgekehrt eine Zerlegung des Kontinuums K in endlich viele Teilkontinua $< \varepsilon$ vor, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben, dann ist jedes dieser Kontinua eine abgeschlossene Umgebung in K und Satz XVI c ist anwendbar. Wir haben also

Satz XX. *Damit das kompakte Kontinuum K eine reguläre Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß K für jedes $\varepsilon > 0$ Summe von endlich vielen Kontinua $< \varepsilon$ sei, die zu je zweien höchstens endliche Durchschnitte haben.*

Wenden wir den Satz von Sierpiński an, so sehen wir, daß jede reguläre Kurve stetig durchlaufen werden kann. Bedenken wir ferner, daß jede Teilkurve einer regulären Kurve regulär ist, so haben wir:

Satz XXI. *Jede reguläre Kurve ist (so wie jede ihrer Teilkurven) zusammenhängend im kleinen, also eine Jordansche Kurve. Aber nicht jede im kleinen zusammenhängende Kurve ist regulär.*

Der zweite Teil von Satz XXI ergibt sich aus dem Beispiel $\mathbf{B}_9$ einer im kleinen zusammenhängenden, nicht regulären Kurve. Wir denken im

R_2 mit rechtwinkeligen kartesischen Koordinaten die Menge aller Punkte mit rationaler Abszisse, die auf der Strecke S: $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ liegen, in eine Folge $\{p_n\} = \{(r_n, 0)\}$ geordnet. In die Kurve K nehmen wir nun auf S und alle Strecken S_n: $0 \leqq x \leqq 1$, $y = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und ferner für jedes n die Strecke T_n: $x = r_n$, $0 \leqq y \leqq \frac{1}{n}$. Man erkennt leicht, daß K zusammenhängend im kleinen ist, obwohl die Punkte von S nicht regulär sind. Zu jedem Punkt p von S lassen sich sogar abzählbar viele einfache Kurvenbögen angeben (leicht konstruierbare Treppenpolygone), deren Längen sämtlich eine positive Zahl übersteigen und die bloß den Punkt p gemein haben.

Immerhin enthält die im kleinen zusammenhängende Kurve von B_9 Teilkurven, welche nicht zusammenhängend im kleinen sind, z. B. die Kurve, die aus S, allen S_n und T_1 besteht. *Vermutlich enthält jede im kleinen zusammenhängende Kurve, die nicht regulär ist, Teilkurven, die nicht zusammenhängend im kleinen sind.* Wenn diese Vermutung richtig ist, dann sind die regulären Kurven außer den sie kennzeichnenden Zerlegungseigenschaften auch dadurch unter den Kurven oder den kompakten Kontinua charakterisiert, daß sie samt allen ihren Teilkurven zusammenhängend im kleinen sind[18a]). Um zu zeigen, daß jede nicht reguläre Kurve einen F_σ enthält, der nicht zusammenhängend im kleinen ist, würde der Nachweis dafür genügen, daß jede nicht reguläre Kurve abzählbar viele zu je zweien fremde Kurvenbögen enthält, deren Längen sämtlich eine positive Zahl übersteigen.

In gewissem Sinne hinausgehend über Satz XXI ist:

Satz XXII. *Eine Kurve ist in jedem regulären Punkt zusammenhängend im kleinen. Die nicht-regulären Punkte, in denen eine Kurve zusammenhängend im kleinen ist, bilden einen $F_{\sigma\varrho}$, der auch Punkte von K^c enthalten kann.*

Der erste Teil von Satz XXII ist eine Folge vom Hilfssatz B. Die im zweiten Teil betrachtete Menge ist darstellbar als Differenz der beiden F_σ $K^\infty - K^u \cdot K^\infty$. In der Kurve von B_6 besteht diese Menge aus einem Punkt von K^c.

Wir haben im § 3 gesehen, daß die Punkte von höherer als erster Ordnung in jeder Kurve in gewissem Sinne ausgezeichnet sind. Man würde nun erwarten, daß in den regulären Kurven auch die Punkte von kleinerer als dritter Ordnung, mithin also die Punkte von zweiter Ordnung ausgezeichnet sind. Dies ist indes nicht der Fall: Es können Punkte von höherer als zweiter Ordnung eine reguläre Kurve ausfüllen, wie das Bei-

---

[18a]) (Zusatz bei der Korrektur): Diese Vermutung ist, wie aus einem mir von P. Alexandroff mitgeteilten Beispiel hervorgeht, im R_3 unrichtig. Für den R_2 bleibt dagegen die Frage offen.

spiel $\mathbf{B}_{10}$ einer bereits von Sierpiński[19]) konstruierten Kurve zeigen soll. Die Kurve entsteht so: Ein abgeschlossenes gleichseitiges Dreieck der Ebene wird in vier kongruente Dreiecke geteilt durch Strecken, welche die Seitenmittelpunkte verbinden. Das mittlere der vier Teildreiecke wird ohne seinen Rand getilgt; jedes der drei übrigen Dreiecke wird wieder in vier Dreiecke geteilt und das mittlere ohne seinen Rand getilgt; und so fort ad infinitum. Daß auf diese Weise eine reguläre Kurve entsteht, läßt sich auf Grund von Satz XX leicht einsehen. Ferner überzeugt man sich davon, daß die entstehende Kurve, abgesehen von den drei Eckpunkten des Ausgangsdreieckes (welche man übrigens durch Deformation in einen Punkt sechster Ordnung zusammenbiegen kann), keinen Punkt von niedrigerer als dritter Ordnung enthält.

Von Wichtigkeit ist ferner folgendes Problem: Es ist klar, daß zu einem Punkt p von der Ordnung n der Kurve K nicht mehr als n einfache Bögen existieren können, welche zu je zweien bloß den Punkt p als ihren einen Endpunkt gemein haben. *Existieren aber zu einem Punkt p von der Ordnung n der regulären Kurve K wirklich immer n in p zusammenstoßende einfache Kurvenbögen; und zu einem Punkt p von der Ordnung w abzählbar viele in p zusammenstoßende Bögen mit gegen Null konvergierenden Durchmessern?* Vermutlich ist dies richtig. Keinesfalls aber kann man, wenn ein Bogen, der den Punkt p von der Ordnung n zum Endpunkt hat, irgendwie (ohne besondere Vorsichtsmaßregeln) herausgegriffen wurde, immer noch $n-1$ weitere Bögen herausgreifen, die in p zusammenstoßen. Nehmen wir nämlich als $\mathbf{B}_{11}$ im R_2 die Kurve K bebestehend aus S: $0 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$; ferner aus den Halbkreisen zwischen den Punkten $\left(\frac{1}{2^n}, 0\right)$ und $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, 0\right)$ in der oberen Halbebene und den Halbkreisen zwischen den Punkten $\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ und $\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+2}}\right)$ in der unteren Halbebene $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Nullpunkt ist von der Ordnung 2 und es lassen sich auch zwei in ihm zusammenstoßende, sonst fremde Bögen angeben, nämlich die Summe der oberen Halbkreise und die der unteren Halbkreise. Heben wir aber zuerst den Bogen S heraus, dann existiert kein weiterer Bogen in K, der mit S bloß den Nullpunkt gemein hätte.

Von den Spezialfällen, in denen der Beweis der obigen Vermutung mit einfachen Mitteln gelingt, sei hier bloß der Fall der *Baumkurven* erwähnt. So nennen wir unter den kompakten regulären Kurven jene, welche keine einfache geschlossene Teilkurve (d. h. kein topologisches Bild einer Kreislinie) enthalten. Über sie gilt:

---

[19]) Prace Mat. Fiz. Warschau 27 (1916), S. 77, eine Arbeit, die ich im Detail nicht lesen konnte, da sie in polnischer Sprache verfaßt ist.

Satz XXIII. *Zu jedem Punkt p der Ordnung n einer Baumkurve K existieren n einfache Teilbögen von K, welche bloß den Punkt p als ihren einen Endpunkt miteinander gemein haben. Die Baumkurven sind unter den kompakten regularen Kurven durch jede der drei folgenden Eigenschaften charakterisiert*: a) *Irgend zwei ihrer Teilkurven sind fremd oder sie haben einen zusammenhängenden Durchschnitt*; b) *sie zerfallen nach Tilgung irgendeines ihrer Punkte von höherer als erster Ordnung*; c) *je zwei ihrer Punkte und Teilkurven sind durch einen Punkt trennbar.*

Den einfachen Beweis dieses Satzes übergehen wir hier.

§ 8.

Über die gewöhnlichen Kurven.

Um von den regulären Kurven schrittweise zu den Kurven zu gelangen, mit denen sich die kombinatorische Topologie beschäftigt, wären zunächst jene regulären Kurven zu untersuchen, die Summen von endlich vielen einfachen Kurvenbögen sind, ferner jene, welche abgesehen von abzählbar vielen End- und Verzweigungspunkten lauter gewöhnliche Punkte, d. h. Punkte von zweiter Ordnung enthalten. Indem wir hier, wo es sich bloß um die Grundzüge der Kurventheorie handelt, diese Zwischenprobleme übergehen, wenden wir uns gleich dem letzten Schritt dieser Spezialisierung zu. Zunächst gilt:

Hilfssatz C. Ist K eine kompakte reguläre Kurve, dann existiert keine kompakte Kurve K_1, die K als echten Teil enthält und in allen Punkten von K dieselbe Ordnung hat, wie K.[20])

Nehmen wir nämlich an, es sei $K < K_1$ und p ein Punkt von K_1, der nicht zu K gehört. K_1 ist als kompakte reguläre Kurve zusammenhängend im kleinen, also ist p durch einen einfachen Bogen $B < K_1$ mit K verbunden. Da K abgeschlossen ist, existiert auf B, wenn wir von p ausgehen, ein erster Punkt, der zu K gehört; er heiße q. Dann ist aber klar, daß K_1 in q eine um mindestens 1 höhere Ordnung hat als K. Damit ist Hilfssatz C bewiesen.

Satz XXIV. *Unter den kompakten Kontinua sind die einfachen Bögen identisch mit den Kurven, welche abgesehen von zwei Endpunkten nur gewöhnliche Punkte enthalten; die einfachen geschlossenen Kurven sind identisch mit jenen, welche nur gewöhnliche Punkte enthalten.*

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Sei ferner K ein Kontinuum, welches außer den beiden Endpunkten a und b bloß gewöhnliche Punkte enthält. Als reguläre Kurve ist K zusammenhängend im kleinen. K enthält also einen einfachen Kurvenbogen zwischen a und b. Nach

[20]) Ein Analogon zu diesem Satz, der übrigens starker Verallgemeinerung fähig ist, findet sich bei Janiszewski, Journ. d. l'Ec. Pol. (2) **16** (1912), S. 148. — Punkte der Ordnung ω sind auszuschließen.

Hilfssatz C ist aber K durch diesen Kurvenbogen erschöpft. — Sei ferner K ein Kontinuum, das ausschließlich gewöhnliche Punkte enthält. Greifen wir zwei Punkte a und b aus K heraus, so enthält K einen einfachen Bogen zwischen a und b, er heiße $B(a, b)$. Außerdem muß K einen Punkt c enthalten, welcher nicht Punkt von $B(a, b)$ ist. K enthält auch zwei Bögen $B(a, c)$ und $B(b, c)$. Da K Punkte von höherer als zweiter Ordnung nicht enthält, haben die drei vorliegenden Bögen zu je zweien nur einen Endpunkt gemein. $B(a, c) + B(c, b)$ ist also ein Bogen $B'(a, b)$. Folglich enthält K die einfache geschlossene Kurve $B(a, b) + B'(a, b)$. Nach Hilfssatz C ist K durch diese einfache geschlossene Kurve erschöpft. Damit ist Satz XXIV bewiesen.

Satz XXV. *Unter den kompakten Kontinua sind jene, welche, abgesehen von endlich vielen End- und Verzweigungspunkten, nur gewöhnliche Punkte enthalten, identisch mit den gewöhnlichen Kurven, d. h. mit jenen, die Summe sind von endlich vielen einfachen Kurvenbögen, die zu je zweien höchstens die Endpunkte gemein haben. In einem Punkt p der Ordnung n einer gewöhnlichen Kurve stoßen genau n einfache Bögen zusammen, welche nur den Punkt p als ihren einen Endpunkt miteinander gemein haben. Die Begrenzung jeder hinlänglich kleinen zusammenhängenden Umgebung eines solchen Punktes enthält genau n Punkte. Sind die ganzen, nicht negativen Zahlen $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$ vorgegeben, so ist notwendig und hinreichend, damit (und zwar im R_3) eine Kurve existiert, welche außer gewöhnlichen Punkten genau α_i Punkte der Ordnung i $(i = 1, 3, 4, \ldots, n)$ enthält, das Bestehen der Relationen:*

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\,\alpha_i \equiv 0\,(2),$$

$$(2) \qquad \alpha_1 \leqq \sum_{i=3}^{n} i\,\alpha_i - 2\sum_{i=3}^{n} \alpha_i + 2.$$

Das Gleichheitszeichen in (2) ist für die gewöhnlichen Baumkurven charakteristisch.

Daß die Kurven, welche zerlegbar sind in einfache Bögen, die zu je zweien höchstens Endpunkte gemein haben, abgesehen von höchstens endlich vielen End- und Verzweigungspunkten nur gewöhnliche Punkte enthalten, ist klar. Liege umgekehrt eine solche Kurve K vor und sei p ein Punkt von K von der Ordnung $i \neq 2$. Sei $U(p)$ eine Umgebung, die außer p nur gewöhnliche Punkte von K enthält und deren Begrenzung genau i Punkte enthält. Die i Punkte sind mit p durch i einfache Bögen verbunden, die bloß den Punkt p als Endpunkt gemein haben. Durch diese i Bögen ist $\overline{U}(p)$ auch erschöpft. Jede zusammenhängende Umgebung von $p < U(p)$ hat mit jedem dieser Bögen einen in p endenden

Teilbogen gemein und daher eine genau i Punkte enthaltende Begrenzung. Mit endlich vielen solchen Umgebungen und einzelnen Kurvenbögen kann K überdeckt werden, woraus eine Zerlegung von K in endlich viele einfache Kurvenbögen, die zu je zweien höchstens Endpunkte gemein haben, — also eine Zerlegung von K in Zellen im Sinn der kombinatorischen Topologie — ohne weiteres hergeleitet werden kann. — Zerlegen wir K in $a_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ zusammenhängende Umgebungen, deren jede einen nichtgewöhnlichen Punkt enthält. Diese Umgebungen können einfache geschlossene Kurven enthalten. Die außerdem von den End- und Verzweigungspunkten ausgehenden einfachen Kurvenbögen sind einander paarweise zugeordnet, indem immer zwei von ihnen in einem gewöhnlichen Punkt zusammenstoßen. Daraus geht die Notwendigkeit von (1) hervor. Die Notwendigkeit von (2) folgt daraus, daß K zusammenhängend ist und daher, wenn mehrere Verzweigungspunkte vorhanden sind, sie alle durch mindestens einen einfachen Teilbogen von K miteinander verbunden sein müssen. Demnach sind von den einfachen Bögen, welche von den Verzweigungspunkten ausgehen, insgesamt mindestens $2\left(\sum_{i=3}^{n} \alpha_i - 1\right)$ Bögen aneinandergebunden, in dem Sinn, daß sie nicht zu Endpunkten führen. Damit überdies jeder der Endpunkte mit einem Verzweigungspunkt durch einen Bogen verbindbar sei, muß die Relation (2) erfüllt sein. — Sind umgekehrt die Zahlen α_i gegeben und die Relationen (1) und (2) erfüllt, dann nehmen wir im R_3 $a_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ verschiedene Punkte an. Zunächst führen wir einen einfachen Bogen durch alle Verzweigungspunkte; sodann verbinden wir, was wegen (2) möglich ist, jeden Endpunkt mit einem Verzweigungspunkt; danach behalten wir wegen (1) eine gerade Anzahl von noch freien Bögen übrig, die von Verzweigungspunkten ausgehen. Wir ordnen dieselben einander irgendwie paarweise zu und verbinden die zugeordneten Bögen in gewöhnlichen Punkten. Wir bemerken noch, daß sich durch systematische Durchführung dieses Verfahrens zugleich eine Übersicht über die topologisch verschiedenen Typen von Kurven gewinnen ließe, die zu den vorgegebenen Zahlen α_i gehören. — Gilt in (2) das Gleichheitszeichen, dann gibt es außer einem einfachen Kurvenbogen, welcher die Verzweigungspunkte miteinander verbindet, bloß Verbindungsbögen zwischen den End- und den Verzweigungspunkten. Es liegt dann eine gewöhnliche Baumkurve vor, welche zwischen a_0 Punkten $a_1 = \sum_{i=3}^{n} \alpha_i - 1 + \alpha_1 = a_0 - 1$ Bögen enthält, wie dies der bekannten Relation für Baumkurven entspricht. Damit ist Satz XXV bewiesen und *der Anschluß an die kombinatorische Topologie der eindimensionalen Mannigfaltigkeiten hergestellt.*

Bemerken wir zum Abschluß, daß die hier vorgetragene Kurventheorie nicht nur durch eine allgemeine Dimensionstheorie gefordert wird, welche ihr tragender Untergrund und zugleich in gewisser Hinsicht ihr formales Analogon ist, — sondern daß sie auch den Vorteil hat, daß die ihr eigentümlichen Begriffe, insbesondere der Ordnungsbegriff, auf höhere Dimensionen übertragbar sind! Dem Endpunkt der Kurven entspricht, etwa bei den Flächen, der Randpunkt, d. i. ein Punkt, zu dem beliebig kleine Umgebungen existieren, die von einfachen Kurvenbögen begrenzt sind. Der Flächenpunkt zweiter Ordnung ist ein solcher, zu dem beliebig kleine Umgebungen existieren, die von zwei einfachen Bögen begrenzt sind. Hier zeigt sich schon die größere gestaltliche Mannigfaltigkeit der Flächen gegenüber den Kurven: Wir erhalten verschiedene Typen von Flächenpunkten zweiter Ordnung, je nachdem die beiden begrenzenden Bögen getrennt sind oder eine einfache geschlossene Kurve bilden. Noch größer ist die Zahl der Typen von Flächenpunkten dritter und höherer Ordnung. Doch sind alle diese gestaltlichen Verhältnisse durch einfache Gesetze beherrscht, auf die ich mir vorbehalte, in einer anderen Abhandlung einzugehen. *Der hier dargelegten Kurventheorie läuft also eine Theorie der Flächen, der Körper, der n-dimensionalen Körper parallel.*

(Eingegangen am 13. 2. 1925.)