Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Wenn eine eckige Klammer einen linearen Raum bezeichnet, dessen Dimension gleich der in dieser Klammer befindlichen Zahl ist, wenn ferner durch das Bedingungssymbol $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ vorausgesetzt wird, dass ein $[a_p]$, in ihm liegend ein $[a_{p-1}]$, in diesem liegend ein $[a_{p-2}]$ u. s. f. bis $[a_0]$ gegeben ist, und wenn die einem $[p]$ auferlegte Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ bedeutet, dass der $[p]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam habe, so muss:

$$(1) \qquad 0 \gtreqless a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leqq n$$

sein, damit für einen in einem $[n]$ gedachten $[p]$ die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ Sinn hat. Wenn man aber den a alle mit (1) verträglichen ganzzahligen Werthe ertheilt, so erhält man, wie ich schon früher gezeigt habe*), die Gesammtheit der *charakteristischen* Bedingungen des $[p]$, d. h. derjenigen Bedingungen, durch welche allein sich jede sonstige einem $[p]$ auferlegbare Bedingung bei Zugrundelegung eines beliebigen Systems von $[p]$ ausdrücken lässt. Anders ausgedrückt, die endliche Zahl der gemeinsamen Elemente zweier Systeme Σ und Σ' von $[p]$ ist eine Summe von Producten je zweier Factoren (*Gradzahlen*) derartig, dass immer der eine Factor angiebt, wieviel $[p]$ des Σ eine gewisse Bedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ erfüllen, während der andere Factor eine analoge Bedeutung für Σ' hat. Wegen der fundamentalen Rolle, die hiernach in der Theorie der linearen Räume diejenigen Zahlen spielen müssen, welche angeben, wieviel $[p]$ keine andere als charakteristische Bedingungen erfüllen, habe ich schon 1886**) alle Zahlen durch eine Formel zusammengefasst, welche zählen, wieviel $[p]$ ausser der allgemein gelassenen Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ noch h Mal die einfache Bedingung

*) Mitt. der Math. Ges. in Hamburg. Band I, S. 134 bis 155.

**) Acta Mathematica, Band 8, S. 117.

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2, \cdots, n)$$

erfüllen, wo

$$h = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$$

sein muss, damit die Frage nach der gesuchten Anzahl x Sinn hat. Für diese Anzahl erhielt ich damals:

$$(2) \qquad x = \frac{h!\ D}{a_0!\ a_1!\ a_2! \ldots a_p!},$$

wo D die bekannte Determinante ist, welche gleich dem Producte aller möglichen positiven Differenzen je zweier der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ ist.

Im Folgenden soll nun eine Verallgemeinerung dieses Resultats mitgetheilt werden, die der Verfasser gelegentlich seiner Aufsuchung allgemeiner Anzahlfunctionen für Räume *zweiten* Grades fand. Durch Vergleichung des neuen Resultats mit dem alten durch F. (2) ausgedrückten, erhält man eine interessante Relation zwischen der Determinante D und einer auf Binomialcoefficienten bezüglichen Determinante.

Fügt man der einem $[p]$ auferlegten Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ die schon oben erwähnte einfache Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2, \ldots, n),$$

die wir kurz μ nennen wollen, hinzu, so erhält man*):

$$(3) \quad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu = (a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_p) + (a_0, a_1-1, a_2, \ldots, a_p) + \cdots + (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p-1).$$

Fügt man nun diese Bedingung μ immer wieder von Neuem hinzu, so gelangt man schliesslich nach h-maligem Hinzufügen, wenn

$$h = a_0 + a_1 + \cdots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$$

ist, zu einem Vielfachen der Bedingung $(0, 1, 2, \ldots, p)$, die ausdrückt, dass der $[p]$ gegeben ist, und dieses Vielfache ist dann die oben mit (2) bezeichnete Anzahl. Es hat aber das h-malige Hinzufügen der Bedingung μ auch dann Sinn, wenn h kleiner bleibt als die eben angegebene obere Grenze. In diesem Falle ergiebt sich eine Summe von Vielfachen von Bedingungen $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p)$, wo nunmehr:

$$(4) \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_p = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p - h$$

sein muss. Wir können also ansetzen:

$$(5) \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu^h = \sum x_b \,.\, (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p),$$

wo die Summirung auf alle Zahlengruppen b zu erstrecken ist, die ausser dem selbstverständlichen:

---

*) Acta Mathem. Band 8, S. 104.

$$0 \leqq b_0 < b_1 < b_2 \cdots < b_p \leqq n$$

auch der Gleichung (4) gehorchen. Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Coefficienten x_b allgemein als Function der Zahlen a und b darzustellen.

Zunächst ergiebt sich aus § 5 meiner im 26. Bande der Math. Ann. (S. 44) enthaltenen Abhandlung, dass für $p = 1$ die gesuchte Function x_b eine Differenz zweier Binomialcoefficienten wird, nämlich:

$$(6) \qquad h_{a_0 - b_0} - h_{a_0 - b_1} \quad \text{oder} \quad \frac{(a_0 + a_1 - b_0 - b_1)!}{(a_0 - b_0)!\,(a_1 - b_1)!} - \frac{(a_0 + a_1 - b_0 - b_1)!}{(a_0 - b_1)!\,(a_1 - b_0)!}.$$

Von hier aus kann man mit Benutzung meiner im 8. Bande der Acta Mathematica angestellten Erörterungen zu dem Falle $p = 2$ emporsteigen. Dann erhält man eine aus 6 *Tri*nomial-Coefficienten bestehende algebraische Summe, deren Basen sämmtlich h sind und deren Indices die Differenzen zwischen den a und den b sind. Hiernach lag es nahe, x_b allgemein als ein gewisses Vielfaches einer aus Binomialcoefficienten bestehenden Determinante hinzuschreiben, so dass jeder Binomialcoefficient ein a zur Basis und ein b zum Index hat. War aber so die Form der Function x_b erst gefunden, so bot der Beweis keine Schwierigkeit mehr, da es nur darauf ankam, aus der Annahme der Richtigkeit für μ^m die Richtigkeit für μ^{m+1} zu erkennen, was durch Formel (3) gelingt. So erhält man x_b in folgender Gestalt:

$$(7) \qquad x_b = \frac{h!\, b_0!\, b_1!\, b_2! \ldots b_p!}{a_0!\, a_1!\, a_2! \ldots a_p!} \begin{vmatrix} (a_0)_{b_0}, & (a_0)_{b_1}, & \cdots, & (a_0)_{b_p} \\ (a_1)_{b_0}, & (a_1)_{b_1}, & \cdots, & (a_1)_{b_p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (a_p)_{b_0}, & (a_p)_{b_1}, & \cdots, & (a_p)_{b_p} \end{vmatrix},$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(8) \qquad x_b = h! \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_0 - b_0)!}, & \frac{1}{(a_0 - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_0 - b_p)!} \\ \frac{1}{(a_1 - b_0)!}, & \frac{1}{(a_1 - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_1 - b_p)!} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{1}{(a_p - b_0)!}, & \frac{1}{(a_p - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_p - b_p)!} \end{vmatrix}.$$

Löst man diese Determinante in ihre $(p + 1)!$ Glieder auf, so erhält man x_b als eine algebraische Summe von gewissen Polynomialcoefficienten, die zur h^{ten} Potenz einer $(p+1)$-gliedrigen Summe gehören. Beispielsweise sei $p=2$, $a_0=2$, $a_1=6$, $a_2=7$, $h=6$. Dann kommt für $(2, 6, 7)\,\mu^6$, d. h. für die Bedingung, dass eine Ebene, in einem 7-dimensionalen linearen Raume liegend, eine gegebene Ebene in einem Punkte schneidet, und ausserdem 6 gegebene 4-dimensionale lineare Räume in je einem Punkte schneidet, eine Summe von Vielfachen der Bedingungen (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4) und für diese Vielfachen ergiebt sich aus (7) oder (8) beziehungsweise 0, 14, 45, 30, 19, 30, 5. Durch sechsmalige Anwendung der Formel (3) findet man diese Coefficienten bestätigt, nämlich:

$$\begin{aligned}
(2,6,7)\,\mu^1 &= (1,6,7) + (2,5,7),\\
(2,6,7)\,\mu^2 &= (0,6,7) + 2(1,5,7) + (2,4,7) + (2,5,6),\\
(2,6,7)\,\mu^3 &= 3(0,5,7) + 3(1,4,7) + 3(1,5,6) + (2,3,7)\\
&\quad + 2(2,4,6),\\
(2,6,7)\,\mu^4 &= 6(0,4,7) + 6(0,5,6) + 4(1,3,7) + 8(1,4,6)\\
&\quad + 3(2,3,6) + 2(2,4,5),\\
(2,6,7)\,\mu^5 &= 10(0,3,7) + 20(0,4,6) + 4(1,2,7) + 15(1,3,6)\\
&\quad + 10(1,4,5) + 5(2,3,5),\\
(2,6,7)\,\mu^6 &= 14(0,2,7) + 45(0,3,6) + 30(0,4,5) + 19(1,2,6)\\
&\quad + 30(1,3,5) + 5(2,3,4).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch übrig, die Formel (7) mit der früher gefundenen Formel (2) zu vergleichen. Behufs dessen haben wir in (7) speciell

$$b_0 = 0,\quad b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\ \cdots,\ b_p = p$$

anzunehmen, und das Ergebniss gleich $\dfrac{h!\,D}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots a_p!}$ zu setzen. Auf diese Weise erhalten wir, da D die aus den 0^{ten} bis p^{ten} Potenzen der Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_p$ gebildete Determinante ist, die folgende interessante Relation:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} (a_0)^0, & (a_0)^1, & \cdots, & (a_0)^p \\ (a_1)^0, & (a_1)^1, & \cdots, & (a_1)^p \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (a_p)^0, & (a_p)^1, & \cdots, & (a_p)^p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a_0)_0, & (a_0)_1, & \cdots, & (a_0)_p \\ (a_1)_0, & (a_1)_1, & \cdots, & (a_1)_p \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ (a_p)_0, & (a_p)_1, & \cdots, & (a_p)_p \end{vmatrix} = 0!\,1!\,2!\,3!\cdots p!.$$

Diese Relation zwischen den 0^{ten} bis p^{ten} Potenzen von $p+1$ Zahlen und den Binomialcoefficienten derselben Zahlen mit den Indices 0 bis p, findet sich auch, wie mir Herr Busche in Bergedorf mittheilte, in Baltzer's Determinanten (5. Auflage, § 10, K. 3, S. 87) und wird dort aus einer von Borchardt in den Abh. der Berl. Academie (1860, S. 4) herrührenden Interpolationsformel abgeleitet.

Hamburg, am 5. März 1891.