Untersuchungen über das logische Schließen*). II.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

IV. Abschnitt.

Einige Anwendungen des Hauptsatzes.

§ 1.

Anwendungen des Hauptsatzes in der Aussagenlogik.

1.1. Eine triviale Folgerung aus dem Hauptsatz ist die allerdings schon bekannte (siehe z. B.: H.-A., Seite 65) Widerspruchsfreiheit der klassischen (und intuitionistischen) Prädikatenlogik: Die Sequenz $\rightarrow$ (welche aus jeder Widerspruchssequenz $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ herleitbar ist, vgl. 3.21) kann Untersequenz keiner anderen Schlußfigur als eines Schnittes sein, ist also überhaupt nicht herleitbar.

1.2. Lösung des Entscheidungsproblems für die intuitionistische Aussagenlogik.

Auf Grund des Hauptsatzes können wir ein einfaches Verfahren angeben, um von einer Formel der Aussagenlogik, d. h. einer Formel ohne Gegenstandsvariable, zu entscheiden, ob sie klassisch bzw. intuitionistisch richtig ist oder nicht. (Für die klassische Aussagenlogik ist allerdings schon längst eine einfache Lösung bekannt, siehe z. B.: H.-A., Seite 11.)

Dazu beweisen wir noch folgenden Hilfssatz:

Eine Sequenz, in deren Antezedens nicht ein und dieselbe Formel mehr als dreimal als S-Formel vorkommt, und in deren Sukzedens ebenfalls nicht ein und dieselbe Formel mehr als dreimal als S-Formel vorkommt, nennen wir „reduziert". Nun gilt der Hilfssatz:

1.21. Jede LJ- bzw. LK-Herleitung, deren Endsequenz reduziert ist, läßt sich in eine LJ- bzw. LK-Herleitung mit gleicher Endsequenz umwandeln, in der sämtliche Sequenzen reduziert sind (und die keine Schnitte enthält, wenn die vorige keine enthielt).

Beweis dieses Hilfssatzes: Wir bezeichnen eine Sequenz, welche aus einer anderen dadurch entsteht, daß man im Antezedens, sowie unabhängig davon im Sukzedens, solche Formeln, die mehr als einmal als S-Formeln darin vorkommen, an beliebigen Stellen (bzw. gar nicht) wegläßt, so daß sie jeweils nur noch einmal oder zweimal oder dreimal vorkommen, als eine „reduzierte jener anderen Sequenz".

*) Diese Arbeit, einschließlich des I. Teils aus Bd. 39, Heft 2, ist von der Math.-Nat. Fakultät der Universität Göttingen als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

Offenbar kann man aus einer reduzierten einer Sequenz jede andere reduzierte derselben Sequenz mittels Verdünnungen, Zusammenziehungen und Vertauschungen herleiten, und zwar so, daß dabei nur reduzierte Sequenzen vorkommen.

Nach dieser Vorbemerkung führen wir die Umwandlung der vorliegenden LJ- bzw. LK-Herleitung in folgender Weise durch:

Alle Grundsequenzen sowie die Endsequenz bleiben erhalten, diese sind ja bereits sämtlich reduzierte Sequenzen.

Die zu einer Schlußfigur gehörigen H-Sequenzen werden in reduzierte derselben umgewandelt, in gleich anzugebender Weise. Auf Grund der Vorbemerkung macht es nichts aus, wenn eine Sequenz, die zwei verschiedenen H-Schlußfiguren angehört, beidemal durch eine andere reduzierte ersetzt wird, denn man leitet dann einfach die eine aus der anderen durch Verdünnungen, Zusammenziehungen und Vertauschungen her, so daß schließlich wieder eine lückenlose Herleitung entsteht. (Für eine Sequenz, die zugleich einer Schlußfigur angehört sowie Grundsequenz oder Endsequenz ist, gilt das gleiche, da sie natürlich eine reduzierte von sich selbst ist.)

Die Umwandlungen der Schlußfiguren geschehen nun in folgender Weise:

Kommt innerhalb Γ eine Formel mehr als einmal vor, so wird sie innerhalb Γ, in Obersequenzen und Untersequenz, sovielmal (an entsprechenden Stellen) weggelassen, bis sie in Γ nur noch einmal vorkommt. Ebenso verfährt man mit Δ, Θ und Λ (d. h. mit den im Schema der Schlußfigur, III, 1.21 und 1.22, so bezeichneten Formelreihen).

Nach den beschriebenen Umwandlungen besteht nun die Herleitung bereits nur noch aus reduzierten Sequenzen. (Eine Vertauschung mit $\mathfrak{D}$ gleich $\mathfrak{E}$ kann eine Ausnahme bilden, doch diese wäre eine identische Schlußfigur und konnte überhaupt vermieden werden.)

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Nach dem Hauptsatz zusammen mit dem Zusatz III, 2.513 und diesem Hilfssatz (1.21) gilt nun:

1.22. Für jede intuitionistisch bzw. klassisch richtige reduzierte Sequenz gibt es eine LJ- bzw. LK-Herleitung ohne Schnitte, die nur aus reduzierten Sequenzen besteht, und deren H-S-Formeln Teilformeln der S-Formeln jener Sequenz sind.

1.23. Jetzt liege irgendeine Sequenz ohne Gegenstandsvariable vor. Wir wollen entscheiden, ob sie intuitionistisch bzw. klassisch richtig ist oder nicht. Zunächst können wir statt ihrer eine äquivalente reduzierte Sequenz $\mathfrak{Sq}$ nehmen.

Nun ist die Anzahl aller reduzierten Sequenzen, deren S-Formeln Teilformeln der S-Formeln von $\mathfrak{Sq}$ sind, offenbar endlich. Also ist das Entscheidungsverfahren ohne weiteres auf folgende Weise durchführbar:

Wir nehmen das genannte endliche System von Sequenzen vor und untersuchen zunächst, welche von diesen etwa Grundsequenzen sind. Alsdann wird jede von den noch übrigen daraufhin geprüft, ob es eine Schlußfigur gibt, bei der sie Untersequenz und eine oder zwei von den bereits als herleitbar erkannten Sequenzen Obersequenzen sind. Ist dies der Fall, so wird sie zu den herleitbaren hinzugefügt. (Alles dies ist offenkundig entscheidbar.) So fahren wir fort, bis entweder die Sequenz $\mathfrak{Sq}$ selbst als herleitbar erkannt ist, oder aber das Verfahren zu keinen neuen herleitbaren Sequenzen mehr führt. Alsdann kann die Sequenz $\mathfrak{Sq}$ gemäß 1.22 überhaupt nicht in dem betreffenden Kalkül (LJ bzw. LK) herleitbar sein. Damit ist die Entscheidung über ihre Richtigkeit gelungen.

1.3. Ein neuer Beweis für die Nicht-Herleitbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Logik.

Das Entscheidungsverfahren ließe sich für praktische Anwendungen noch erheblich bequemer gestalten, die eben durchgeführte Betrachtung (1.2) soll eben nur die prinzipielle Möglichkeit zeigen.

Als Beispiel beweisen wir die Nicht-Herleitbarkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der intuitionistischen Logik auf eine von dem angegebenen Entscheidungsverfahren (welches ebenfalls einen Beweis hierfür ergeben müßte) unabhängige Weise.

(Diese wurde schon von Heyting[5]) auf ganz anderem Wege bewiesen.)

Die betreffende Sequenz lautet $\rightarrow A \vee \neg A$. Wir nehmen an, es gäbe eine LJ-Herleitung für diese. Dann gibt es nach dem Hauptsatz eine solche ohne Schnitte. Deren unterste Schlußfigur muß nun eine OES sein. Denn bei allen übrigen LJ-Schlußfiguren ist entweder das Antezedens der Untersequenz nicht leer, oder im Sukzedens steht eine Formel mit einem anderen äußersten Zeichen als $\vee$; allenfalls käme noch eine Verdünnung im Sukzedens in Frage, doch dann würde die Obersequenz lauten: $\rightarrow$, und diese ist nach 1.1 nicht herleitbar.

Also müßte entweder $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$ bereits (ohne Schnitte) herleitbar sein.

(Durch dieselbe Betrachtung folgt übrigens allgemein: Ist $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ eine intuitionistisch richtige Formel, so ist entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ eine intuitionistisch richtige Formel. In der klassischen Logik gilt das nicht, wie schon das Beispiel $A \vee \neg A$ zeigt.)

[5]) In der in Anm. [2]) zitierten Arbeit, S. 56.

Nun kann $\rightarrow A$ überhaupt nicht Untersequenz irgendeiner LJ-Schlußfigur (die kein Schnitt ist) sein, höchstens wiederum einer Verdünnung mit $\rightarrow$ als Obersequenz. Da $\rightarrow A$ ferner keine Grundsequenz ist, ist es also nicht herleitbar.

$\rightarrow \neg A$ kann auf Grund der gleichen Betrachtung nur aus $A \rightarrow$ durch NES hergeleitet sein, und $A \rightarrow$ wiederum, da A kein äußerstes Zeichen besitzt, nur aus $A, A \rightarrow$. So fortfahrend gelangt man immer nur zu Sequenzen der Gestalt $A, \ldots A \rightarrow$, aber niemals zu einer Grundsequenz.

Also ist $A \vee \neg A$ in der intuitionistischen Prädikatenlogik nicht herleitbar.

§ 2.

Eine Verschärfung des Hauptsatzes für die klassische Prädikatenlogik.

2.1. Es handelt sich um die folgende

Verschärfung des Hauptsatzes:

Es liege eine LK-Herleitung vor, deren Endsequenz von folgender Art ist:

Jede S-Formel dieser Sequenz enthält All- und Es-gibt-Zeichen höchstens am Anfang, und über die ganze übrige Formel erstreckt.

Dann läßt sich diese Herleitung in eine LK-Herleitung mit der gleichen Endsequenz umwandeln, welche folgende Eigenschaften hat:

1) Sie enthält keine Schnitte.

2) Es gibt darin eine H-Sequenz, wir nennen sie die „Mittelsequenz", derart, daß die Herleitung für diese (und also auch sie selbst) keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ enthält, und im übrigen Teil der Herleitung, die Mittelsequenz eingeschlossen, keine anderen Schlußfiguren als AES, AEA, EES, EEA und Strukturschlußfiguren vorkommen.

2.11. Die Mittelsequenz zerlegt sozusagen die Herleitung in einen oberen der Aussagenlogik angehörigen und einen unteren nur Einführungen von All- und Es-gibt-Zeichen enthaltenden Teil.

Über die Gestalt der umgewandelten Herleitung läßt sich noch folgendes ohne Mühe folgern: Der untere Teil, von der Mittelsequenz bis zur Endsequenz, gehört nur einem einzigen Faden an, da nur Schlußfiguren mit einer Obersequenz darin vorkommen. Die S-Formeln der Mittelsequenz sind von folgender Art:

Jede im Antezedens der Mittelsequenz stehende S-Formel entsteht aus einer S-Formel im Antezedens der Endsequenz, indem man die voranstehenden All- und Es-gibt-Zeichen (mit den danebenstehenden gebundenen Gegenstandsvariablen) wegläßt, und im übrigen Teil der Formel die gebundenen Gegenstandsvariablen durch gewisse freie Gegenstandsvariablen ersetzt. Dasselbe gilt für die Sukzedentia.

Dies folgt durch dieselbe Betrachtung wie unter III, 2.5 1 2.

2.2. Beweis des Satzes (2.1.)[6]).

Die Umwandlung der Herleitung erfolgt in mehreren Schritten.

2.21. Zunächst wird der Hauptsatz (III, 2.5) angewandt: Nach diesem läßt sich die Herleitung in eine Herleitung ohne Schnitte umwandeln.

2.22. Umwandlung von Grundsequenzen, welche ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$ enthalten:

Solche können wegen der Teilformeln-Eigenschaft (III, 2.5 1 3) nur die Form $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ oder $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}$ haben. Man wandelt sie um zu ($\mathfrak{a}$ sei eine in der Herleitung noch nicht vorkommende freie Gegenstandsvariable):

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,AEA}{\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}}\,AES \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}}\,EES}{\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x} \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F} \mathfrak{x}}\,EEA$$

Durch genügend oftmalige Wiederholung dieses Verfahrens kann man offenbar erreichen, daß keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ mehr in irgendeiner Grundsequenz der Herleitung vorkommen.

2.23. Wir machen jetzt eine vollständige Induktion nach der folgendermaßen definierten „Ordnung" der Herleitung:

Von den Logische-Zeichen-Schlußfiguren bezeichnen wir die zu den Zeichen &, $\vee$, $\neg$ und $\supset$ gehörigen als „Aussagen-Schlußfiguren", die übrigen, also *AES*, *AEA*, *EES* und *EEA* als „Prädikaten-Schlußfiguren". Jede Prädikatenschlußfigur in der Herleitung erhält folgende Ordnungszahl zugeordnet:

---

[6]) Folgender Spezialfall des Satzes 2.1 wurde bereits von Herbrand auf völlig anderem Wege bewiesen:

Ist eine Formel $\mathfrak{P}$, in der All- und Es-gibt-Zeichen nur am Anfang, und über die ganze übrige Formel erstreckt, vorkommen (bekanntlich gibt es zu jeder Formel eine klassisch äquivalente Formel von dieser Gestalt, s. etwa H.-A., Seite 63), klassisch herleitbar, so gibt es eine Sequenz (die obige Mittelsequenz) mit leerem Antezedens, von deren Sukzedensformeln eine jede aus $\mathfrak{P}$ durch Weglassen der All- und Es-gibt-Zeichen (mit den danebenstehenden Variablen) und Einsetzung von freien Gegenstandsvariablen für die gebundenen Gegenstandsvariablen entsteht; diese Sequenz ist ferner ohne Anwendung der Zeichen $\forall$ und $\exists$ klassisch herleitbar, und aus ihr läßt sich $\to \mathfrak{P}$ lediglich unter Benutzung der von uns als *AES*, *EES*, Zusammenziehung im Sukzedens und Vertauschung im Sukzedens bezeichneten Schlußfiguren herleiten. (Nach dem Satz 2.1 kämen noch Verdünnungen im Sukzedens hinzu; es ist leicht einzusehen, daß solche stets vermeidbar sind.)

Siehe auch: J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique. C. r. de la Soc. des sciences et des lettres de Varsovie **24** (1931), Cl. III, Seite 31, Anm. 1.

Man betrachtet den Fadenteil von der Untersequenz der Schlußfigur bis zur Endsequenz der Herleitung (einschließlich dieser) und zählt die darin vorkommenden Untersequenzen von Aussagen-Schlußfiguren. Deren Anzahl ist die Ordnungszahl.

Die Summe der Ordnungszahlen aller Prädikaten-Schlußfiguren in der Herleitung ist die *Ordnung der Herleitung*.

Diese wollen wir solange durch einzelne Schritte verringern, bis sie zu 0 wird.

Wir stellen zunächst fest, daß dann der Satz (2.1) leicht zu Ende zu beweisen ist: (Die Schritte (2.232) werden so beschaffen sein, daß dabei die durch 2.21 und 2.22 erreichten Eigenschaften erhalten bleiben.)

2.231. Dazu nehmen wir an, die Herleitung sei bereits auf die Ordnung 0 gebracht. Nun gehen wir von der Endsequenz aus jeweils zu der Obersequenz der darüberstehenden Schlußfigur über. Wir machen halt, sobald wir zu einer Untersequenz einer Aussagen-Schlußfigur oder zu einer Grundsequenz kommen; diese Sequenz nennen wir $\mathfrak{S}$q. (Sie wird uns, nach einer gleich anzugebenden Umwandlung, als „Mittelsequenz" dienen.)

Die Herleitung von $\mathfrak{S}$q wandeln wir nun so um:

Wir lassen alle *H-S*-Formeln, welche etwa noch ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$ enthalten, einfach weg. Dabei bleibt nun *diese* Herleitung korrekt: Grundsequenzen werden nämlich nicht betroffen, auf Grund von 2.22. Ferner wird keine Haupt- oder Nebenformel einer Schlußfigur weggelassen, denn enthielte eine solche ein Zeichen $\forall$ oder $\exists$, so enthielte jedenfalls die Hauptformel ein solches; nun kommen aber keine Prädikaten-Schlußfiguren vor (weil sonst die Ordnungszahl dieser Schlußfigur größer als 0 wäre), und Aussagen-Schlußfiguren können auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft (III, 2.513) und der Voraussetzung des Satzes 2.1 kein $\forall$ oder $\exists$ in ihrer Hauptformel enthalten. Nun bleibt jede Schlußfigur korrekt, wenn man eine Formel, die nicht als Haupt- oder Nebenformel vorkommt, überall wo sie in der Schlußfigur als *S*-Formel auftritt, wegläßt; das ist leicht aus den Schemata III, 1.21; III, 1.22 ersichtlich. (Allenfalls entsteht eine identische Schlußfigur, diese wird wie üblich weggeschafft.)

Die aus $\mathfrak{S}$q durch die Umwandlung entstandene Sequenz $\mathfrak{S}$q* unterscheidet sich von $\mathfrak{S}$q dadurch, daß evtl. gewisse *S*-Formeln weggefallen sind. Wir lassen nun auf sie einige Verdünnungen und Vertauschungen folgen, derart, daß danach wieder die Sequenz $\mathfrak{S}$q dasteht, und an diese fügen wir den unveränderten unteren Teil der Herleitung an.

Nun sind wir am Ziel: $\mathfrak{S}$q* ist die Mittelsequenz und erfüllt offensichtlich alle Anforderungen, welche im Satz (2.1) an diese gestellt werden.

2.232. Jetzt steht nur noch der **Induktionsschritt** aus, d. h.: Die Ordnung der Herleitung sei größer als 0, und es handelt sich darum, sie zu verringern.

2.23 2.1. Wir beginnen mit einer **Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen** in derselben Weise wie unter III, 3.10. Dadurch erreichen wir, daß die Herleitung folgende Eigenschaft hat (III, 3.101):

Für jede AES (bzw. EEA) gilt: Ihre Eigenvariable kommt in der Herleitung nur in den Sequenzen über der Untersequenz der AES (bzw. EEA) vor, und kommt ferner in keiner anderen AES oder EEA als deren Eigenvariable vor.

Hierbei wird die Ordnung offenbar nicht geändert.

2.23 2.2. Nunmehr kommen wir zur eigentlichen Umwandlung.

Zunächst stellen wir fest: Es gibt in der Herleitung eine Prädikaten-Schlußfigur — wir nennen sie $\mathfrak{Sf}\,1$ — mit folgender Eigenschaft: Verfolgt man den Fadenteil von der Untersequenz dieser Schlußfigur bis zur Endsequenz, so ist die **erste** Untersequenz einer Logische-Zeichen-Schlußfigur, zu der man gelangt, Untersequenz einer **Aussagen**-Schlußfigur (diese Schlußfigur nennen wir $\mathfrak{Sf}\,2$). Gäbe es nämlich keine solche Stelle, so wäre die Ordnung der Herleitung gleich 0.

Unser Ziel ist jetzt, die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}\,1$ über $\mathfrak{Sf}\,2$ hinweg nach unten zu verschieben. Das ist leicht durchzuführen, es geschieht nach folgenden Schemata:

2.23 2.21. $\mathfrak{Sf}\,2$ habe eine Obersequenz.

2.23 2.211. $\mathfrak{Sf}\,1$ sei eine AES. Dann lautet der zu behandelnde Teil der Herleitung:

$$
\begin{array}{l l}
\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a} & \\
\hline
\Gamma \rightarrow \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} & AES \\
\hline\hline
\Delta \rightarrow \Lambda & \mathfrak{Sf}\,2 \text{ mit evtl. vorangehenden Struktur-Schlußfiguren}
\end{array}
$$

Wir wandeln ihn um zu:

$$
\begin{array}{l l}
\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}\mathfrak{a} & \\
\hline\hline
\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} & \text{evtl. mehrmalige Vertauschung, sowie eine Verdünnung} \\
\hline\hline
\Delta \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Lambda & \left\{ \begin{array}{l} \text{Schlußfiguren genau derselben Art wie oben, d. h. wie:} \\ \mathfrak{Sf}\,2 \text{ mit evtl. vorangehenden Struktur-Schlußfiguren} \end{array} \right. \\
\hline\hline
\Delta \rightarrow \Lambda, \mathfrak{F}\mathfrak{a} & \text{evtl. mehrmalige Vertauschung} \\
\hline
\Delta \rightarrow \Lambda, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} & AES \\
\hline\hline
\Delta \rightarrow \Lambda & \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung}
\end{array}
$$

Die Wegschaffung des $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ durch Zusammenziehung, zum Schluß, ist darum möglich, weil $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ in Λ als S-Formel vorkommen muß. (Denn die S-Formel $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ konnte, in der ursprünglichen Herleitung, durch $\mathfrak{Sf}\,2$

und die vorangehenden Struktur-Schlußfiguren nicht im Sukzedens zum Verschwinden gebracht werden, sie kann ja nicht etwa Nebenformel von $\mathfrak{Sf}\,2$ sein, auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft III, 2.513 und der Voraussetzung des Satzes 2.1.)

Die Variablenbedingung ist für die verschobene *AES* auf Grund von 2.232.1 erfüllt.

Die Ordnung der Herleitung hat sich offenbar um 1 verringert.

2.23 2.212. Der Fall, daß $\mathfrak{Sf}\,1$ eine *EES* ist, wird genau so behandelt, man hat nur $\forall$ durch $\exists$ zu ersetzen.

2.23 2.213. Die Fälle, daß $\mathfrak{Sf}\,1$ eine *AEA* oder *EEA* ist, werden spiegelbildlich zu den beiden vorigen behandelt.

2.232.22. Der Fall, daß $\mathfrak{Sf}\,2$ zwei Obersequenzen hat, also eine *UES*, *OEA* oder *FEA* ist, läßt sich in ganz entsprechender Weise erledigen; es werden allenfalls einige zusätzliche Struktur-Schlußfiguren erforderlich.

2.3. Analog zu dem Satz 2.1 lassen sich weitere Verschärfungen des Hauptsatzes in dem Sinne erreichen, daß man gewisse Vorschriften über die Reihenfolge der Logische-Zeichen-Schlußfiguren in einer Herleitung machen kann. Man kann nämlich die Schlußfiguren in weitem Maße übereinander hinweg verschieben, in derselben Weise wie es eben geschehen ist (2.23 2.2).

Wir gehen darauf nicht näher ein.

§ 3.

Anwendung des verschärften Hauptsatzes (2.1) zu einem neuen[7]) Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion.

Als Arithmetik bezeichnen wir die (elementare, d.h. keine analytischen Hilfsmittel benutzende) Theorie der natürlichen Zahlen. Diese können wir unter Verwendung unseres logischen Kalküls *LK* in folgender Weise formalisieren:

3.1. In der Arithmetik pflegt man „Funktionen" zu benutzen, z.B. x' (gleich $x+1$), $x+y$, $x\cdot y$. Da wir jedoch bei unseren logischen Untersuchungen keine Funktionszeichen eingeführt haben, wollen wir, um diese trotzdem auf die Arithmetik anwenden zu können, die Aussagen

---

[7]) Ältere Beweise finden sich bei J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 1—46; J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 166 (1932), S. 1—8.

der Arithmetik in einer Weise formalisieren, wobei an Stelle der Funktionen Prädikate auftreten. Wir benutzen z. B. statt der Funktion x' das Prädikat $x \operatorname{Vg} y$, zu lesen: x ist der Vorgänger von y, d. h. $y = x + 1$. Ferner sehen wir $[x + y = z]$ als Prädikat mit drei Argumentstellen an; darin haben also die Zeichen $+$ und $=$ keine selbständige Bedeutung. Ein anderes Prädikat ist $x = y$, dieses Gleichheitszeichen hat also mit dem vorigen formal gar nichts zu tun.

Ferner wollen wir auch die Zahl 1 nicht als Gegenstandszeichen schreiben, da wir in unserem logischen Formalismus nur Gegenstandsvariable und keine Zeichen für bestimmte Gegenstände verwendet haben. Wir benutzen daher folgende Umschreibung: Das Prädikat „Eins x“ bedeute inhaltlich: „x ist die Zahl 1“.

Der Satz: „$x + 1$ ist der Nachfolger von x“ ließe sich z. B. in unserem Formalismus so darstellen:

$$\forall x \forall y \forall z ((\operatorname{Eins} y \mathbin{\&} [x + y = z]) \supset x \operatorname{Vg} z).$$

Die übrigen natürlichen Zahlen lassen sich durch die Prädikate $\operatorname{Eins} x \mathbin{\&} x \operatorname{Vg} y$, $\operatorname{Eins} x \mathbin{\&} x \operatorname{Vg} y \mathbin{\&} y \operatorname{Vg} z$, usw. charakterisieren.

Wie aber sollen wir die jetzt eingeführten Prädikatzeichen in unseren Kalkül einordnen, wo wir doch nur Aussagenvariable zugelassen haben? Dazu setzen wir einfach fest, daß die Prädikatzeichen genau wie Aussagenvariable anzusehen sind. Genau gesagt: Wir sehen Ausdrücke der Form

$$\operatorname{Eins} \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x} \operatorname{Vg} \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad [\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{z}],$$

wobei für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ irgendwelche Gegenstandsvariablen stehen, lediglich als leichter verständliche Schreibweisen für die Formeln

$$A\mathfrak{x}, \quad B\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad C\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad D\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$$

an. In diesem Sinne sind die folgenden Axiomformeln wirklich Formeln nach unserer Definition.

(Man kann die Zahl 1 nicht etwa als Schreibweise für eine Gegenstandsvariable ansehen, da in unserem Kalkül die Gegenstandsvariablen wirklich als variabel fungieren, während das für die Aussagenvariablen nicht der Fall ist.)

Als „Axiomformeln“ der Arithmetik nehmen wir zunächst die folgenden, wir werden später im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis (siehe 3. 3) allgemeine Gesichtspunkte angeben, nach denen weitere zulässige Axiomformeln gebildet werden können:

Gleichheit: $\forall x\, x = x$ (Reflexivität)

$\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$ (Symmetrie)

$\forall x \forall y \forall z ((x = y \,\&\, y = z) \supset x = z)$ (Transitivität)

Eins: $\exists x \,\mathrm{Eins}\, x$ (Existenz der 1)

$\forall x \forall y ((\mathrm{Eins}\, x \,\&\, \mathrm{Eins}\, y) \supset x = y)$ (Eindeutigkeit der 1)

Vorgänger: $\forall x \exists y\, x \mathrm{Vg}\, y$ (Existenz des Nachfolgers)

$\forall x \forall y (x \mathrm{Vg}\, y \supset \neg \mathrm{Eins}\, y)$ (1 hat keinen Vorgänger)

$\forall x \forall y \forall z \forall u ((x \mathrm{Vg}\, y \,\&\, z \mathrm{Vg}\, u \,\&\, x = z) \supset y = u)$
(Eindeutigkeit des Nachfolgers)

$\forall x \forall y \forall z \forall u ((x \mathrm{Vg}\, y \,\&\, z \mathrm{Vg}\, u \,\&\, y = u) \supset x = z)$
(Eindeutigkeit des Vorgängers)

Eine Formel $\mathfrak{B}$ heißt innerhalb der Arithmetik mit Ausschluß der vollständigen Induktion herleitbar, wenn es eine LK-Herleitung für eine Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$$

gibt, worin $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ Axiomformeln der Arithmetik sind.

Daß dieses formale System der Arithmetik in der Tat die in der inhaltlichen Arithmetik üblichen Beweisführungen (soweit sie die vollständige Induktion nicht benutzen) wiederzugeben gestattet, läßt sich nicht beweisen, da für inhaltliche Überlegungen kein fest begrenzter Rahmen besteht; man kann sich lediglich für einzelne inhaltliche Beweise durch den Versuch davon überzeugen.

3.2. Jetzt wollen wir die Widerspruchsfreiheit des angegebenen formalen Systems beweisen. Das ist mit Hilfe des verschärften Hauptsatzes (2.1) ganz einfach.

3.21. Eine „Widerspruchsformel" $\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ ist dann und nur dann in dem System herleitbar, wenn es eine LK-Herleitung für eine Sequenz mit leerem Sukzedens und arithmetischen Axiomformeln im Antezedens gibt. Nämlich:

Aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ erhält man $\Gamma \rightarrow$ so:

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow}\,NEA}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow}\,UEA}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \rightarrow}\,\text{Vertauschung}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \rightarrow}\,UEA}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \rightarrow}\,\text{Zusammenziehung}}{\Gamma \rightarrow}\,\text{Schnitt}$$

Die Umkehrung geschieht durch eine Verdünnung im Sukzedens.

Ist also unsere Arithmetik widerspruchsvoll, so gibt es eine LK-Herleitung mit der Endsequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow,$$

wobei $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ arithmetische Axiomformeln sind.

3.22. Nunmehr wenden wir die Verschärfung des Hauptsatzes (2.1) an. Die arithmetischen Axiomformeln erfüllen die an die S-Formeln der Endsequenz gestellte Bedingung. Also gibt es eine LK-Herleitung mit derselben Endsequenz, welche folgende Eigenschaften hat:

1) Sie enthält keine Schnitte.

2) Es gibt darin eine H-Sequenz, die „Mittelsequenz", deren Herleitung keine Zeichen $\forall$ und $\exists$ enthält, und aus der die Endsequenz durch eine Reihe von Schlußfiguren AEA, EEA, Verdünnung, Zusammenziehung und Vertauschung im Antezedens hervorgeht. Die Mittelsequenz hat leeres Sukzedens (2.11).

3.23. Anschließend nehmen wir eine Umbenennung von freien Gegenstandsvariablen wie unter III, 3.10 vor, dadurch ändert sich an den genannten Eigenschaften nichts, und es kommt die folgende hinzu (III, 3.101): Die Eigenvariable jeder EEA kommt in der Herleitung nur in Sequenzen über der Untersequenz der EEA vor.

3.24. Alsdann ersetzen wir in gleich anzugebender Weise jede freie Gegenstandsvariable überall, wo sie in der Herleitung vorkommt, durch ein und dieselbe natürliche Zahl. Dabei entsteht also eine Figur, die wir nicht mehr als LK-Herleitung bezeichnen dürfen; wieweit sie trotzdem einen inhaltlichen Sinn hat, werden wir nachher sehen.

Die Ersetzungen der freien Gegenstandsvariablen durch Zahlen geschehen in folgender Reihenfolge:

3.241. Zuerst werden alle freien Gegenstandsvariablen, die nicht als Eigenvariable einer EEA vorkommen, überall durch die Zahl 1 ersetzt. (Man könnte auch eine andere Zahl nehmen.)

3.242. Nunmehr nehmen wir die in der Herleitung vorkommenden EEA-Schlußfiguren von unten anfangend der Reihe nach vor und ersetzen jeweils deren Eigenvariable (überall wo sie in der „Herleitung" vorkommt) durch eine Zahl. Diese Zahl bestimmen wir wie folgt:

Die EEA kann nur lauten:

$$\frac{\mathrm{Eins}\,\mathfrak{a},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists x\, \mathrm{Eins}\, x,\ \Gamma \rightarrow \Theta} \quad \text{oder} \quad \frac{\nu\, \mathrm{Vg}\, \mathfrak{a},\ \Gamma \rightarrow \Theta}{\exists y\, \nu\, \mathrm{Vg}\, y,\ \Gamma \rightarrow \Theta}$$

(auf Grund der Teilformeln-Eigenschaft III, 2.513; ν kann nur eine Zahl sein, auf Grund von 3.241 und 3.23).

Im ersten Falle wird $\mathfrak{a}$ durch 1 ersetzt, im zweiten Falle durch die um 1 größere Zahl als ν.

3.25. Jetzt betrachten wir die aus der Herleitung entstandene Figur. Insbesondere interessiert uns das Aussehen der (ehemaligen) Mittelsequenz. Darüber können wir folgendes sagen:

Ihr Sukzedens ist leer, und jede der Antezedens-S-Formeln hat entweder die Gestalt Eins 1 oder $\nu \,\mathrm{Vg}\, \nu'$, wobei für ν eine Zahl und für ν' die um 1 größere Zahl steht, oder aber sie geht aus einer arithmetischen Axiomformel mit lauter Allzeichen am Anfang durch Weglassung der Allzeichen (und der danebenstehenden gebundenen Gegenstandsvariablen) und Einsetzung von Zahlen für die gebundenen Gegenstandsvariablen im übrigen Teil der Formel hervor. (Alles dies folgt durch dieselbe Betrachtung wie unter III, 2.512, siehe auch 2.11).

D. h.: Die S-Formeln im Antezedens der Mittelsequenz stellen inhaltlich richtige numerische Aussagen dar. Ferner gilt für die „Herleitung" der Mittelsequenz: Sie ist aus einer Herleitung ohne die Zeichen $\forall$ und $\exists$ hervorgegangen, indem man die darin vorkommenden freien Gegenstandsvariablen durch Zahlen ersetzte. Eine solche „Herleitung" stellt nun inhaltlich einen Beweis der Arithmetik, der nur Schlußweisen der Aussagenlogik benutzt, dar.

Damit sind wir zu folgendem Ergebnis gelangt:

Wenn unsere Arithmetik widerspruchsvoll ist, so läßt sich bereits aus richtigen numerischen Aussagen durch bloße Anwendung von Schlüssen der Aussagenlogik ein Widerspruch beweisen.

Dabei sind also „richtige numerische Aussagen" Aussagen der Form Eins 1, $\nu \,\mathrm{Vg}\, \nu'$, sowie alle numerischen Spezialfälle der unter den Axiomen vorkommenden generellen Aussagen, z. B. $3 = 3$; $4 = 5 \supset 5 = 4$; $3 \,\mathrm{Vg}\, 4 \supset \neg$ Eins 4.

Daß nun aus solchen Aussagen mittels der Aussagenlogik kein Widerspruch folgen kann, ist nahezu selbstverständlich, und ein Beweis hierfür wäre kaum mehr als eine formale Umschreibung eines inhaltlich klaren Sachverhalts. Wir wollen daher diesen nicht durchführen, wir deuten nur kurz das hierbei übliche Verfahren an:

Man setzt allgemein fest, für welche Zahlenwerte die Formeln Eins μ, $\mu = \nu$, $\mu \,\mathrm{Vg}\, \nu$, $\mu + \nu = \varrho$ usw. richtig und für welche sie falsch sind, ferner erklärt man in bekannter Weise (siehe etwa H.-A., S. 3) die Richtigkeit oder Falschheit von $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\neg \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ als Funktion der Richtigkeit oder Falschheit der Teilformeln, und zeigt dann, daß alle numerischen Spezialfälle der Axiomformeln „richtig" sind, sowie daß die Schlußfiguren der Aussagenlogik von richtigen Formeln immer wieder auf richtige Formeln führen. Eine Widerspruchsformel jedoch ist keine richtige Formel.

3. 3. Aus den unter 3. 25 gemachten Bemerkungen ist leicht ersichtlich, in welcher Weise sich das System der arithmetischen Axiomformeln erweitern läßt, ohne daß dadurch ein Widerspruch herleitbar wird: Wir können ganz allgemein solche Axiomformeln zulassen, welche Allzeichen nur am Anfang und über die ganze Formel erstreckt, sowie keine Es-gibt-Zeichen enthalten, und von denen jeder numerische Spezialfall inhaltlich richtig ist. (Wir könnten auch noch gewisse Formeln mit Es-gibt-Zeichen zulassen, sofern sie sich beim Widerspruchsfreiheitsbeweis in analoger Weise wie die beiden oben vorkommenden behandeln lassen.)

Z. B. sind folgende Axiomformeln für die Addition zulässig:

$$\forall x \forall y (x \mathrm{Vg}\, y \supset [x + 1 = y])$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v ((x \mathrm{Vg}\, y \;\&\; [z + x = u] \;\&\; [z + y = v]) \supset u \mathrm{Vg}\, v)$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u (([x + y = z] \;\&\; [x + y = u]) \supset z = u)$$
$$\forall x \forall y \forall z ([x + y = z] \supset [y + x = z])$$

und andere.

3. 4. Da man in der Zahlentheorie andauernd die vollständige Induktion braucht, so hat die Arithmetik ohne vollständige Induktion nur wenig praktische Bedeutung. Für die Arithmetik mit Einschluß der vollständigen Induktion ist jedoch die Widerspruchsfreiheit bisher noch nicht einwandfrei bewiesen.

V. Abschnitt.

Die Äquivalenz der neuen Kalküle *NJ*, *NK* und *LJ*, *LK* mit einem dem Formalismus von Hilbert angeglichenen Kalkül.

§ 1.

Der Begriff der Äquivalenz.

1. 1. Wir führen den folgenden Äquivalenzbegriff zwischen Formeln und Sequenzen ein (dieser ist im Einklang mit den unter I, 1. 1 und I, 2. 4 gemachten Angaben über den inhaltlichen Sinn des Zeichens $\curlywedge$ und der Sequenzen):

Gleiche Formeln sind äquivalent.

Gleiche Sequenzen sind äquivalent.

Zwei Formeln sind äquivalent, wenn die eine aus der anderen dadurch entsteht, daß man das Zeichen $\curlywedge$ überall durch die Formel $A \;\&\; \neg A$ ersetzt.

Die Sequenz $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ ist äquivalent mit folgender Formel:

wenn die $\mathfrak{A}$ und die $\mathfrak{B}$ nicht leer sind:

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1);$$

(diese Fassung ist für den Äquivalenzbeweis bequemer als die mit $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$),

wenn die $\mathfrak{A}$ leer sind, doch die $\mathfrak{B}$ nicht:

$$\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1;$$

wenn die $\mathfrak{B}$ leer sind, doch die $\mathfrak{A}$ nicht:

$$(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset (A \,\&\, \neg A);$$

wenn die $\mathfrak{A}$ und die $\mathfrak{B}$ leer sind:

$$A \,\&\, \neg A.$$

Die Äquivalenz ist transitiv.

1.2. (Man könnte natürlich den Äquivalenzbegriff noch wesentlich weiter fassen, z. B. pflegt man gewöhnlich zwei Formeln äquivalent zu nennen, wenn die eine aus der anderen herleitbar ist. Wir begnügen uns hier mit der angegebenen speziellen, für unsere Äquivalenzbeweise ausreichenden Fassung.)

Zwei Herleitungen wollen wir äquivalent nennen, wenn die Endformel bzw. Endsequenz der einen mit der der anderen äquivalent ist.

Zwei Kalküle nennen wir äquivalent, wenn sich jede Herleitung in dem einen Kalkül in eine äquivalente Herleitung in dem anderen Kalkül umwandeln läßt.

Im § 2 dieses Abschnitts werden wir einen dem Hilbertschen Formalismus angeglichenen Kalkül (*LHJ* für die intuitionistische, *LHK* für die klassische Prädikatenlogik) angeben. In den übrigen Paragraphen dieses Abschnitts werden wir dann die Äquivalenz der Kalküle *LHJ*, *NJ* und *LJ* (§ 3—5) sowie die Äquivalenz der Kalküle *LHK*, *NK* und *LK* (§ 6), in dem eben erklärten Sinne, zeigen. Und zwar beweisen wir der Reihe nach:

Jede *LHJ*-Herleitung läßt sich in eine äquivalente *NJ*-Herleitung umwandeln (§ 3), jede *NJ*-Herleitung läßt sich in eine äquivalente *LJ*-Herleitung umwandeln (§ 4), und jede *LJ*-Herleitung läßt sich in eine äquivalente *LHJ*-Herleitung umwandeln (§ 5); damit ist offenbar die Äquivalenz aller drei Kalküle bewiesen; ganz entsprechend verfahren wir dann mit den drei klassischen Kalkülen in § 6 (6.1—6.3).

§ 2.

Angabe eines logistischen Kalküls nach Hilbert[8]) und Glivenko[9]).

Wir erklären zunächst die intuitionistische Form des Kalküls: Eine *LHJ*-Herleitung besteht aus Formeln in stammbaumförmiger Anordnung, die Anfangsformeln sind Grundformeln.

Die Grundformeln und Schlußfiguren entstehen aus den folgenden Schemata nach derselben Einsetzungsvorschrift wie unter II, 2.21, d. h.:

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind beliebige Formeln einzusetzen, für $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ bzw. $\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ eine beliebige Formel mit $\forall$ bzw. $\exists$ als äußerstem Zeichen, $\mathfrak{x}$ bezeichne die zugehörige gebundene Gegenstandsvariable, für $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ diejenige Formel, welche aus $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ entsteht, indem man die gebundene Gegenstandsvariable $\mathfrak{x}$ überall, wo sie vorkommt, durch die freie Gegenstandsvariable $\mathfrak{a}$ ersetzt.

Schemata für Grundformeln:

2.11. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$
2.12. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$
2.13. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$
2.14. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$
2.15. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$
2.21. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$
2.22. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$
2.23. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})))$
2.31. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$
2.32. $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$
2.33. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}))$
2.41. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg\mathfrak{B}) \supset \neg\mathfrak{A})$
2.42. $(\neg\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$
2.51. $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$
2.52. $\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(Einige Schemata sind entbehrlich, doch kommt es uns auf Unabhängigkeit nicht an.)

Schemata für Schlußfiguren:

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \qquad \frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A} \supset \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}} \qquad \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{A}}{(\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}}$$

[8]) D. Hilbert, Die Grundlagen der Mathematik; Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ. 6 (1928), S. 65—85.

[9]) V. Glivenko, Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer; Acad. royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, 5e série, t. XV (1929), pp. 183—188.

Variablenbedingung: In den aus den beiden letzten Schemata entstehenden Schlußfiguren darf die im Schema mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete Gegenstandsvariable in der Unterformel nicht vorkommen (also nicht in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\,\mathfrak{x}$)

(Der Kalkül *LHJ* ist im wesentlichen äquivalent mit dem von Heyting[10].)

Durch Hinzunahme des Grundformelnschemas $\mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{A}$ entsteht der Kalkül *LHK* (klassische Prädikatenlogik).

(Dieser ist im wesentlichen äquivalent mit dem bei H.-A., Seite 53, angegebenen Kalkül.)

§ 3.

Umwandlung einer *LHJ*-Herleitung in eine äquivalente *NJ*-Herleitung.

Aus einer *LHJ*-Herleitung (V, 2) erhalten wir eine *NJ*-Herleitung (II, 2) mit gleicher Endformel durch folgende Umwandlung der *LHJ*-Herleitung: (Es werden dabei sämtliche *H*-Formeln dieser Herleitung als *H*-Formeln der *NJ*-Herleitung wiedererscheinen, und zwar werden diese stets von keiner Annahmeformel abhängen. Außerdem kommen weitere, von Annahmeformeln abhängige *H*-Formeln hinzu.)

3.1. An Stelle der *LHJ*-Grundformeln treten *NJ*-Herleitungen für diese, nach folgenden Schemata:

$$(2.11)\quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}}\,FE_1 \qquad\qquad (2.12)\quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}}\,FE}{\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})}\,FE_1$$

$$(2.13)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{2}{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FB}{\mathfrak{B}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FE_1}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}\,FE_2.$$

$$(2.14)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\mathfrak{B}} \quad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{3}{\mathfrak{B}} \supset \mathfrak{C})}{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}\,FE_1}{\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_3.$$

$$(2.15)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \quad \mathfrak{B} \overset{2}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}\,FE_1}{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_3.$$

$$(2.21)\quad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \overset{1}{\mathbin{\&}} \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\,UB}{(\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}}\,FE_1.$$

---

[10] s. Anm. [2].

Völlig analog wie 2.21 erledigen sich 2.22, 2.31, 2.32, 2.51 und 2.52.

(2.23)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{2}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}}\,UE}{\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})}\,FE_1}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}))}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \big((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C}))\big)}\,FE_3.$$

(2.33)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \overset{2}{\vee} \mathfrak{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{4}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{B}} \quad \mathfrak{B} \overset{3}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{C}}\,OB_1}{(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}}\,FE_2}{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset \big((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}\big)}\,FE_3}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \big((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})\big)}\,FE_4.$$

(2.41)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \overset{2}{\supset} \neg \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{B}}\,FB}{\curlywedge}\,NB}{\neg \mathfrak{A}}\,NE_1}{(\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A}}\,FE_2 \over (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A})}\,FE_3.$$

(2.42)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \neg \overset{2}{\mathfrak{A}}}{\curlywedge}\,NB}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FE_1}{(\neg \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}\,FE_2.$$

3.2. An Stelle der LHJ-**Schlußfiguren** treten Teile einer NJ-Herleitung nach folgenden Schemata:

$$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$ bleibt so, dies ist ja schon eine FB.

$$\dfrac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}} \quad \text{wird zu:} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}}\,FB}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AE}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,FE_1$$

$$\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{A}}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}} \quad \text{wird zu:} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{\exists} \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \qquad \dfrac{\overset{2}{\mathfrak{F}\mathfrak{a}} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\,FB}{\mathfrak{A}}\,EB_2}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}}\,FE_1.$$

Die Variablenbedingung für die Schlußfiguren AE und EB ist erfüllt, wie man leicht sieht, nämlich auf Grund der für die LHJ-Schlußfiguren bestehenden Variablenbedingung.

Damit ist die Umwandlung einer LHJ-Herleitung in eine äquivalente NJ-Herleitung vollzogen.

§ 4.

Umwandlung einer NJ-Herleitung in eine äquivalente LJ-Herleitung.

4.1. Diese geht so vor sich: Man ersetzt zunächst jede H-Formel der NJ-Herleitung durch folgende Sequenz (vgl. III, 1.1): Im Sukzedens steht nur die Formel selbst, im Antezedens stehen die Annahmeformeln, von denen sie abhing, und zwar in der Reihenfolge, wie sie in der NJ-Herleitung von links nach rechts vorkamen. (Es ist wohl deutlich, wie eine Reihenfolge der Anfangsformeln einer stammbaumförmigen Figur von links nach rechts gemeint ist).

Alsdann ersetzen wir ferner das Zeichen $\curlywedge$ überall, wo es vorkommt, durch $A \mathbin{\&} \neg A$. (Die hierdurch aus einer Formel $\mathfrak{A}$ entstehende Formel bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^*$.)

4.2. Nun haben wir bereits ein stammbaumförmiges System von Sequenzen. Die Endsequenz hat leeres Antezedens (II, 2.2), sie ist offenbar schon äquivalent mit der Endformel der NJ-Herleitung. Die Anfangssequenzen haben sämtlich die Gestalt $\mathfrak{D}^* \rightarrow \mathfrak{D}^*$ (II, 2.2), sind also bereits Grundsequenzen einer LJ-Herleitung.

Die aus den NJ-Schlußfiguren entstandenen Figuren werden nach den folgenden Schemata in Teile einer LJ-Herleitung umgewandelt:

4.21. Die Schlußfiguren OE, AE, EE sind bereits durch die Ersetzung in LJ-Schlußfiguren übergegangen. (Im Falle einer AE ist die LJ-Variablenbedingung auf Grund der NJ-Variablenbedingung erfüllt).

4.22. Eine UE wurde zu: $\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}^* \quad \Delta \rightarrow \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A}^* \mathbin{\&} \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Vertau-}\\\text{schung und Verdünnung}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\Delta \rightarrow \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\\text{Verdünnung}\end{array}\right.}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A}^* \mathbin{\&} \mathfrak{B}^*}\ UES$$

4.23. Eine FE wurde zu: $\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma_\varrho \rightarrow \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \rightarrow \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma_\varrho \rightarrow \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \rightarrow \mathfrak{B}^*}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung und Zusammenziehung, u. U. Verdünnung.}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varrho \rightarrow \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}\ FES$$

4.24. Bei einer NE verfährt man ebenso, schließlich hat man noch die Figur $\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}^*}$ zu behandeln.

Nun leitet man $A \mathbin{\&} \neg A \to$ wie folgt im Kalkül LJ her:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,NEA}{A \mathbin{\&} \neg A, A \to}\,UEA}{A, A \mathbin{\&} \neg A \to}\,\text{Vertauschung}}{A \mathbin{\&} \neg A, A \mathbin{\&} \neg A \to}\,UEA}{A \mathbin{\&} \neg A \to}\,\text{Zusammenziehung.}$$

Mit Hinzunahme dieser Sequenz macht man aus der zu behandelnden Figur:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A \qquad A \mathbin{\&} \neg A \to}{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\,\text{Schnitt}}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}^*}\,NES.$$

4.25. Die NJ-Schlußfigur $\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$ wurde durch die Ersetzung (4.1) zu $\dfrac{\Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}$. Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A \qquad A \mathbin{\&} \neg A \to}{\Gamma \to}\,\text{Schnitt}}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}\,\text{Verdünnung.}$$

Dabei ist über $A \mathbin{\&} \neg A \to$ die unter 4.24 angegebene Herleitung für diese Sequenz zu setzen.

4.26. Eine AB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x}}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\,AEA}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\,\text{Schnitt.}$$

4.27. Eine UB wird genau ebenso behandelt.

4.28. Eine FB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\,FEA}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\,\text{Schnitt}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}$$

4.29. Eine NB wurde zu: $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \neg \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to A \mathbin{\&} \neg A}$.

Man macht daraus:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \to \neg\,\mathfrak{A}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\neg\,\mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\,NEA}{\Delta, \Gamma \to}\,\text{Schnitt}}{\Gamma, \Delta \to}\,\text{evtl. mehrmalige Vertauschung}}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg\, A}\,\text{Verdünnung.}$$

4.2 10. OB: Auf die beiden rechten oberen Sequenzen läßt man zunächst wie oben bei FE und NE (4.2 3) Vertauschungen. Zusammenziehungen und Verdünnung (soweit nötig) folgen, derart, daß als Ergebnis jeweils eine Sequenz auftritt, in der eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ am Anfang des Antezedens steht (während im übrigen Antezedens genau die betreffenden ehemaligen Annahmeformeln verschwunden sind). Alsdann folgt:

$$\dfrac{\Xi \to \mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Verdünnung und}\\ \text{Vertauschung}\end{array}\right. \quad \dfrac{\mathfrak{B}^*, \Delta \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Verdünnung und}\\ \text{Vertauschung}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\,OEA}{\Xi, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\,\text{Schnitt.}$$

4.2 11. Eine EB wird ganz ähnlich behandelt, zunächst wird in der rechten Obersequenz $\mathfrak{F}^*\mathfrak{a}$ an den Anfang des Antezedens gebracht (wie unter 4.2 3), dann folgt:

$$\dfrac{\Delta \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\,EEA}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\,\text{Schnitt.}$$

Die LJ-Variablenbedingung für die EEA ist auf Grund der NJ-Variablenbedingung für die EB erfüllt.

Damit ist die Umwandlung einer NJ-Herleitung in eine äquivalente LJ-Herleitung vollzogen.

§ 5.

Umwandlung einer LJ-Herleitung in eine äquivalente LHJ-Herleitung.

Diese Umwandlung ist etwas schwieriger als die beiden bisherigen. Wir führen sie in einer Reihe von einzelnen Schritten durch.

Vorbemerkung: Zusammenziehungen und Vertauschungen im Sukzedens gibt es im Kalkül LJ nicht, da in solchen mindestens zwei S-Formeln im Sukzedens auftreten würden.

5. 1. Zunächst führen wir an Stelle der Schlußfiguren UEA, OES, AEA, EES, NEA und FEA neue Grundsequenzen ein, diese sind nach den folgenden Schemata zu bilden (Einsetzungsvorschrift wie in III, 1.2; dieselbe gilt im folgenden immer; wir werden übrigens für Formeln

neben den dort genannten Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ auch noch die Buchstaben $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ verwenden):

$\mathfrak{Gf}\,1$: $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ $\qquad$ $\mathfrak{Gf}\,2$: $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$

$\mathfrak{Gf}\,3$: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ $\qquad$ $\mathfrak{Gf}\,4$: $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$

$\mathfrak{Gf}\,5$: $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}\to\mathfrak{F}a$ $\qquad$ $\mathfrak{Gf}\,6$: $\mathfrak{F}a\to\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$

$\mathfrak{Gf}\,7$: $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\to$ $\qquad$ $\mathfrak{Gf}\,8$: $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$.

Wir wandeln also die betreffenden Schlußfiguren in der zu behandelnden LJ-Herleitung in folgender Weise um:

Eine UEA wird zu:

$$\frac{\overset{\mathfrak{Gf}\,1}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A},\Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B},\Gamma\to\Theta}\ \text{Schnitt.}$$

Entsprechend verwandeln wir die andere Form der UEA und jede AEA.

Symmetrisch dazu verfahren wir mit einer OES oder EES.

Eine NEA wird zu:

$$\cfrac{\Gamma\to\mathfrak{A} \qquad \cfrac{\overset{\mathfrak{Gf}\,7}{\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\to}}{\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}\to}\ \text{Vertauschung}}{\cfrac{\Gamma,\neg\mathfrak{A}\to}{\neg\mathfrak{A},\Gamma\to}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}}\ \text{Schnitt}$$

(Das Θ im Schema der NEA (III, 1.22) muß leer sein auf Grund der LJ-Sukzedensbedingung, ebenso bei der FEA.)

Eine FEA wird zu:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\mathfrak{A} \qquad \cfrac{\overset{\mathfrak{Gf}\,8}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A},\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}\ \text{Vertauschung}}{\Gamma,\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}\ \text{Schnitt} \qquad \mathfrak{B},\Delta\to\Lambda}{\cfrac{\Gamma,\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\Delta\to\Lambda}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\Gamma,\Delta\to\Lambda}\ \text{evtl. mehrmalige Vertauschung.}}\ \text{Schnitt}$$

5.2. Jetzt schreiben wir bei allen H-Sequenzen, welche *leeres Sukzedens* haben, die Formel $A\,\&\,\neg A$ ins Sukzedens.

Dabei bleiben die Grundsequenzen der Form $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$, sowie $\mathfrak{Gf}\,1$ bis $\mathfrak{Gf}\,6$ und $\mathfrak{Gf}\,8$, ferner die Schlußfiguren UES, AES und FES unverändert. Die übrigen Grundsequenzen und Schlußfiguren gehen über in Grundsequenzen und Schlußfiguren nach folgenden Schemata:

$\mathfrak{Gf}\,9$: $\neg\mathfrak{A},\mathfrak{A}\to\mathfrak{H}$

$\mathfrak{Sf}\,1$: $\dfrac{\Gamma\to\mathfrak{H}}{\mathfrak{D},\Gamma\to\mathfrak{H}}$ $\qquad$ $\mathfrak{Sf}\,2$: $\dfrac{\mathfrak{D},\mathfrak{D},\Gamma\to\mathfrak{H}}{\mathfrak{D},\Gamma\to\mathfrak{H}}$ $\qquad$ $\mathfrak{Sf}\,3$: $\dfrac{\Delta,\mathfrak{D},\mathfrak{E},\Gamma\to\mathfrak{H}}{\Delta,\mathfrak{E},\mathfrak{D},\Gamma\to\mathfrak{H}}$

$$\mathfrak{Sf}\,4\colon \dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}} \qquad \mathfrak{Sf}\,5\colon \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \mathfrak{H}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}\,6\colon \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{H} \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \mathfrak{H}} \qquad \mathfrak{Sf}\,7\colon \dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a}, \Gamma \to \mathfrak{H}}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \mathfrak{H}} \qquad \mathfrak{Sf}\,8\colon \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}$$

(für $\mathfrak{Sf}\,7$ besteht die Variablenbedingung: Die mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Gegenstandsvariable darf in der Untersequenz nicht vorkommen.)

5.3. Nunmehr läßt sich die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}\,4$ wie folgt durch andere ersetzen (dies liegt im wesentlichen an der allgemein gehaltenen Form des Schemas $\mathfrak{Gf}\,9$):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,1}{A \,\&\, \neg A \to A}}{\Gamma \to A}\,\mathfrak{Sf}\,5 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,2}{A \,\&\, \neg A \to \neg A}}{\Gamma \to \neg A}\,\mathfrak{Sf}\,5 \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,9}{\neg A, A \to \mathfrak{D}}}{\Gamma, A \to \mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}\,5}{A, \Gamma \to \mathfrak{D}}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}\,3}{\dfrac{\Gamma, \Gamma \to \mathfrak{D}}{\Gamma \to \mathfrak{D}}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}\,2 \text{ und } \mathfrak{Sf}\,3.}\,\mathfrak{Sf}\,5$$

In ähnlicher Weise ersetzen wir die Schlußfigur $\mathfrak{Sf}\,8$ (sooft sie in der Herleitung vorkommt), jedoch diesmal unter Benutzung einer neuen Schlußfigur nach dem Schema:

$$\mathfrak{Sf}\,9\colon \dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \to A \qquad \Gamma, \mathfrak{A} \to \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}.$$

Die Ersetzung geschieht wie folgt (für $\mathfrak{Sf}\,8$ tritt):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,1}{A \,\&\, \neg A \to A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \to A}\,\mathfrak{Sf}\,5}{\Gamma, \mathfrak{A} \to A}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}\,3 \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to A \,\&\, \neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,2}{A \,\&\, \neg A \to \neg A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \neg A}\,\mathfrak{Sf}\,5}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \neg A}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}\,3}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}\,\mathfrak{Sf}\,9.$$

5.4. Wir führen nun nochmals zwei neue Schlußfigurenschemata ein, nämlich:

$$\mathfrak{Sf}\,10\colon \dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \text{ und die Umkehrung: } \mathfrak{Sf}\,11\colon \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}.$$

Wir wollen Schlußfiguren dieser beiden Arten in die Herleitung hineinbringen, um mit ihrer Hilfe eine Reihe von anderen Schlußfiguren durch speziellere ersetzen zu können (unter 5.42 und 5.43).

5.41. Zunächst sind *FES*-Schlußfiguren jetzt mittels $\mathfrak{Sf}\,10$ ersetzbar: Eine *FES* wird umgewandelt zu:

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}\,\text{evtl. mehrmals } \mathfrak{Sf}\,3}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,\mathfrak{Sf}\,10.$$

5. 42. Alsdann werden die Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}\,1$, $\mathfrak{Sf}\,2$, $\mathfrak{Sf}\,3$, $\mathfrak{Sf}\,5$, $\mathfrak{Sf}\,6$ und $\mathfrak{Sf}\,7$ in folgender Weise umgewandelt:

Als Beispiel nehmen wir eine $\mathfrak{Sf}\,2$, diese verwandeln wir in folgende Figur (es sei Γ gleich $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\varrho$):

$$
\begin{array}{cl}
\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\varrho \rightarrow \mathfrak{H} & \\ \hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{\varrho-1} \rightarrow \mathfrak{J}_\varrho \supset \mathfrak{H} & \mathfrak{Sf}\,10 \\ \hline\hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\varrho \supset \mathfrak{H}).) & \text{mehrmals } \mathfrak{Sf}\,10 \\ \hline
\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\varrho \supset \mathfrak{H}).) & \mathfrak{Sf}\,13 \\ \hline\hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\varrho \rightarrow \mathfrak{H} & \text{mehrmals } \mathfrak{Sf}\,11.
\end{array}
$$

Ganz entsprechend verfahren wir mit allen genannten Schlußfiguren; wir ersetzen sie also unter Benutzung von $\mathfrak{Sf}\,10$ und $\mathfrak{Sf}\,11$ durch Schlußfiguren nach den Schemata:

$$
\mathfrak{Sf}\,12: \frac{\rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}\,13: \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}\,14: \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}
$$

$$
\mathfrak{Sf}\,15: \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}\,16: \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \qquad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{Sf}\,17: \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{C}}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{C}}
$$

(für $\mathfrak{Sf}\,17$ besteht die Variablenbedingung: Die mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Gegenstandsvariable darf in der Untersequenz nicht vorkommen.)

5. 43. In ähnlicher Weise ersetzen wir weiterhin unter Benutzung von $\mathfrak{Sf}\,10$ und $\mathfrak{Sf}\,11$ die Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}\,9$, $\mathfrak{Sf}\,13$ und $\mathfrak{Sf}\,14$ durch die folgenden:

$$
\mathfrak{Sf}\,18: \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset A \qquad \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \neg A}{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{Sf}\,19: \frac{\rightarrow \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}{\rightarrow \mathfrak{D} \supset \mathfrak{C}}
$$

$$
\mathfrak{Sf}\,20: \frac{\Delta \rightarrow \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{E} \supset \mathfrak{C})}{\Delta \rightarrow \mathfrak{E} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}.
$$

In derselben Weise lassen sich die Grundsequenzen $\mathfrak{Gf}\,8$ und $\mathfrak{Gf}\,9$ ersetzen durch:

$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, diese Form fällt unter das Schema $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$; sowie $\mathfrak{Gf}\,10$: $\neg \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{H}$.

5. 5. Nun kommt der letzte Schritt:

Wir ersetzen jede H-Sequenz

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$$

durch die Formel $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$.

(Sind die $\mathfrak{A}$ leer, so ist $\mathfrak{B}$ gemeint. Ein leeres Sukzedens kommt nach 5. 2 nicht mehr vor.)

Dadurch werden sämtliche Grundsequenzen (nämlich $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, $\mathfrak{Gf}\,1$ bis $\mathfrak{Gf}\,6$, $\mathfrak{Gf}\,10$) zu LHJ-Grundsequenzen.

Von den Schlußfiguren werden AES und $\mathfrak{Sf}\,17$ ebenfalls zu LHJ-Schlußfiguren. (Bei ersterer macht allerdings der Fall, daß Γ leer ist, eine Ausnahme. In diesem Falle leitet man (im Kalkül LHJ) aus $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ zunächst mittels 2.12 $(A \supset A) \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ her, wendet nunmehr die LHJ-Schlußfigur an und erhält dann mittels 2.11 schließlich wieder $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.)

Die aus den übrigen Schlußfiguren (das sind noch UES, $\mathfrak{Sf}$ 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 20) durch die Ersetzung entstehenden Figuren werden in folgender Weise in Teile einer LHJ-Herleitung übergeführt:

Eine UES wurde zu (sei zunächst Γ nicht leer):

$$\frac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}$$

Wir machen daraus:

$$\dfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \qquad \dfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad \overset{(2.23)}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})))}}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}))}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}.$$

Ist Γ leer, so verfahren wir wie zuvor bei der AES.

Die aus $\mathfrak{Sf}$ 12, 15, 16 und 19 durch die Ersetzung entstandenen Figuren lassen sich ganz entsprechend unter Verwendung von Grundformeln nach den Schemata 2.12, 2.15, 2.33 und 2.13 behandeln.

In ähnlicher Weise erledigt man $\mathfrak{Sf}$ 18 und $\mathfrak{Sf}$ 20 mittels 2.41 und 2.14 mit Hinzunahme von 2.15 und 2.14, 2.13.

Nun bleiben noch die aus $\mathfrak{Sf}$ 10 und $\mathfrak{Sf}$ 11 entstandenen Figuren. Beide sind trivial für leeres Γ, sei also im folgenden Γ nicht leer. Alsdann verwandeln wir diese Figuren so in LHJ-Herleitungsteile:

($\mathfrak{Sf}$ 10): Aus $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ haben wir $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ herzuleiten. Nun ergibt 2.23 mit 2.11: $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}))$. Dies mit $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ und 2.15, 2.14 ergibt $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, aus dieser Formel und 2.12, 2.15 ergibt sich $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, mit 2.14 also $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

($\mathfrak{Sf}$ 11): Aus $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ leiten wir $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$ im Kalkül LHJ wie folgt her: 2.21 und 2.22 ergeben $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A}$, daraus zusammen mit $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ erhält man (mit Hilfe von 2.15, 2.14, 2.15, 2.13) $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$.

Damit ist die Umwandlung der LJ-Herleitung in eine LHJ-Herleitung vollzogen. Beide sind ferner auch wirklich äquivalent, denn die Endsequenz der LJ-Herleitung ist nur von den Umwandlungen 5.2 und 5.5 betroffen worden und dabei offenbar in eine mit ihr (gemäß 1.1) äquivalente Formel übergegangen.

Nimmt man die Ergebnisse von § 3 bis 5 zusammen, so ist nunmehr die **Äquivalenz der drei Kalküle** LHJ, NJ und LJ voll bewiesen.

§ 6.

Die Äquivalenz der Kalküle LHK, NK und LK.

Nachdem die Äquivalenz der zugehörigen intuitionistischen Kalküle bewiesen ist, läßt sich die der klassischen ziemlich leicht folgern.

6.1. Um eine LHK-Herleitung in eine äquivalente NK-Herleitung umzuwandeln, verfährt man genau wie in § 3. Die hinzukommenden Grundformeln nach dem Schema $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ bleiben unverändert und sind dann gleich Grundformeln der NK-Herleitung.

6.2. Um eine NK-Herleitung in eine äquivalente LK-Herleitung umzuwandeln, verfährt man zunächst wie in § 4. Die hinzukommenden Grundformeln nach dem Schema $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ gehen dabei in Sequenzen der Form $\rightarrow \mathfrak{A}^* \vee \neg \mathfrak{A}^*$ über. Diese ersetzt man dann durch ihre LK-Herleitungen (gemäß III, 1.4). Damit ist die Umwandlung der NK-Herleitung in eine äquivalente LK-Herleitung vollzogen.

6.3. Umwandlung einer LK-Herleitung in eine LHK-Herleitung.

Wir führen einen Hilfskalkül ein, der sich von dem Kalkül LK in folgender Weise unterscheidet:

Die Schlußfiguren dürfen nach den Schemata III, 1.21, 1.22 gebildet werden, jedoch mit folgenden Einschränkungen: Zusammenziehung und Vertauschung im Sukzedens sind überhaupt nicht zulässig; bei den übrigen Schemata darf für Θ und Λ nichts eingesetzt werden, diese Stellen bleiben also leer.

Ferner kommen folgende zwei Schemata für Schlußfiguren hinzu (Einsetzungsvorschrift wie üblich, III, 1.2):

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 1\colon \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta} \text{ und die Umkehrung: } \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 2\colon \frac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}.$$

(Hierin braucht also Θ nicht leer zu sein.)

6.31. Umwandlung einer LK-Herleitung in eine Herleitung des Hilfskalküls:

(Das Verfahren ist ähnlich wie unter 5.4.)

Sämtliche Schlußfiguren außer Zusammenziehungen und Vertauschungen im Sukzedens werden nach folgender Vorschrift umgewandelt: Man läßt auf die Obersequenzen Schlußfiguren $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 folgen, solange bis man alle Formeln von Θ bzw. Λ negiert ins Antezedens (rechts neben Γ bzw. Δ) gebracht hat. Dann folgt eine Schlußfigur derselben Art wie die umzuwandelnde, und zwar ist dies nun eine im Hilfskalkül erlaubte Schlußfigur. (Man rechnet die ins Antezedens gebrachten Formeln zu Γ bzw. Δ.) Alsdann läßt man Schlußfiguren $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 folgen und bringt hierdurch Θ und Λ wieder ins Sukzedens zurück. (Bei FEA und Schnitt muß man u. U.

zuvor Vertauschungen im Antezedens vornehmen, diese sind aber ebenfalls erlaubte Schlußfiguren des Hilfskalküls.)

Nun bleiben noch die Zusammenziehungen — bzw. Vertauschungen — im Sukzedens zu erledigen. Bei einer solchen bringt man auf dieselbe Weise zunächst das ganze Sukzedens negiert ins Antezedens, läßt dann Vertauschungen, eine Zusammenziehung, und wieder Vertauschungen — bzw. eine Vertauschung — im Antezedens folgen, und bringt danach die negierten Formeln wieder (durch Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 2) ins Sukzedens zurück.

6.32. Umwandlung einer Herleitung des Hilfskalküls in eine Herleitung des Kalküls LJ mit Hinzunahme des Grundsequenzschemas $\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$:

Man ändert zunächst alle H-Sequenzen so ab:

Aus $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$

wird $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1$. Ist das Sukzedens leer, so bleibt es leer.

Nunmehr sind bereits alle Grundsequenzen bzw. Schlußfiguren des Hilfskalküls mit Ausnahme der Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 1 und $\mathfrak{Sf}$ 2 in Grundsequenzen bzw. Schlußfiguren des Kalküls LJ übergegangen. Denn jene Schlußfiguren entstanden aus den Schemata III, 1.21, 1.22 (mit Ausnahme der Schemata für Zusammenziehung und Vertauschung im Sukzedens), indem Θ und Λ stets leer blieben. Daher konnte höchstens eine Formel im Sukzedens stehen.

Wir haben also noch die aus den Schlußfiguren $\mathfrak{Sf}$ 1 und $\mathfrak{Sf}$ 2 durch obige Abänderung entstandenen Figuren umzuwandeln.

6.321. Zunächst $\mathfrak{Sf}$ 1: Ist Θ leer, so ersetzt man die Schlußfigur durch eine NEA mit anschließenden Vertauschungen im Antezedens. Sei nun Θ nicht leer. Θ^* bezeichne die zu Θ gehörigen Formeln in umgekehrter Reihenfolge und durch $\vee$ verbunden.

Dann lautet die Schlußfigur nach der Abänderung der Sukzedentia:

$$\frac{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}.$$

Diese wird in folgenden LJ-Herleitungsteil umgewandelt:

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Theta^* \to \Theta^*}{\neg \mathfrak{A}, \Theta^* \to \Theta^*}\,\text{Verdünnung}}{\Theta^*, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}\,\text{Vertauschung} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,NEA}{\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \to}\,\text{Vertauschung}}{\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}\,\text{Verdünnung}}{\Theta^* \vee \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}\,OEA}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \to \Theta^*}\,\text{Schnitt.}$$

6. 322. Eine Schlußfigur $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,2$ lautet nach der Abänderung der Sukzedentia:

$$\frac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}{\Gamma \rightarrow \Theta^* \lor \mathfrak{A}}.$$

Θ^* habe dieselbe Bedeutung wie im vorigen Fall. Wenn Θ leer ist, sei Θ^* leer und $\Theta^* \lor \mathfrak{A}$ bedeute $\mathfrak{A}$.

Wir wandeln sie in folgenden Herleitungsteil um:

$$\cfrac{\rightarrow \mathfrak{A} \lor \neg \mathfrak{A} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige Verdün-}\\ \text{nung und Vertauschung}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta^* \lor \mathfrak{A}}\,OES \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta^*}\left\{\begin{array}{l}\text{evtl. mehrmalige}\\ \text{Vertauschung}\end{array}\right.}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta^* \lor \mathfrak{A}}\,OES}{\mathfrak{A} \lor \neg \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta^* \lor \mathfrak{A}}\,OEA}{\Gamma \rightarrow \Theta^* \lor \mathfrak{A}}\,\text{Schnitt.}$$

Man sieht leicht ein, daß auch bei leerem Θ alles in Ordnung ist.

6. 3 3. Die nunmehr erhaltene LJ-Herleitung mit den hinzukommenden Grundsequenzen der Form $\rightarrow \mathfrak{A} \lor \neg \mathfrak{A}$ läßt sich wie in § 5 in eine LHJ-Herleitung mit hinzukommenden Grundformeln der Form $\mathfrak{A} \lor \neg \mathfrak{A}$ (s. 5. 5), d. h. in eine LHK-Herleitung umwandeln. Damit ist die Umwandlung der LK-Herleitung in eine LHK-Herleitung vollzogen. Die Endsequenz ist dabei gemäß 6. 3 2, 5. 2 und 5. 5 in eine (nach 1. 1) äquivalente Formel übergegangen.

Nimmt man die Ergebnisse von 6. 1, 6. 2 und 6. 3 zusammen, so ist nunmehr auch die Äquivalenz der drei klassischen Prädikatenlogik-Kalküle LHK, NK und LK bewiesen.

(Eingegangen am 21. Juli 1933.)